D6.45
A211
43
P.N.-2
64150
Smithsonian
2

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DEI LINCEI

## ANNO CCLXXXIII

1886

---

SERIE QUARTA

---

# MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME III.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1886

# ATTI

DELLA

# R. ACCADEMIA DEI LINCEI

## ANNO CCLXXXIII

1885-86

---

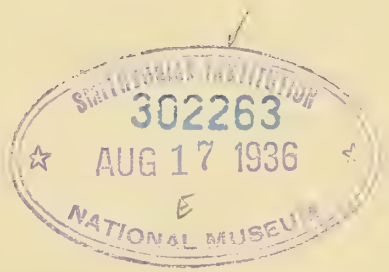
SERIE QUARTA

---

# MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME III.




ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1886

# Sulla determinazione del peso molecolare delle sostanze organiche per mezzo del punto di congelamento delle loro soluzioni.

Memoria di E. PATERNÒ e R. NASINI

*letta nella seduta del 21 marzo 1886.*

I recenti lavori di Raoult sui punti di congelamento delle soluzioni sia delle combinazioni organiche quanto delle inorganiche hanno dato a questo ramo della chimica fisica un'importanza sempre maggiore e noi crediamo che saranno bene accetti ai chimici dei nuovi studî su questo argomento ormai di tanto interesse.

Già da molti anni era conosciuto il fatto che le sostanze in soluzione nell'acqua abbassano il suo punto di congelamento e Blagden già nel 1788 (1) aveva detto che l'abbassamento è proporzionale alla quantità di sostanza sciolta nell acqua. Le sue ricerche rimasero però quasi sconosciute tanto che Rüdorff nel 1861 (2) fece nuovamente le esperienze di Blagden, giunse agli stessi risultati e pubblicò il suo lavoro credendo di essere stato egli lo scopritore della legge. Rüdorff stabilì in base a numerose esperienze che l'abbassamento termometrico nel punto di congelamento delle soluzioni era proporzionale alla quantità di sale disciolto in 100 grammi d'acqua: quindi dividendo l'abbassamento termometrico, cioè la differenza fra il punto di congelamento del solvente e quello della soluzione, per la quantità di sale disciolta in 100 grammi, si aveva un numero costante che si disse *coefficiente di abbassamento*. Rüdorff trovò che in alcuni casi questo coefficiente non si manteneva costante: egli spiegò le anomalie supponendo che alcuni sali sciogliendosi nell'acqua si idratassero e realmente, ammettendo l'esistenza di tali idrati, le anomalie spariscono per le sostanze che egli studiò; e le sue spiegazioni erano del rimanente concordi con tutto quello che si sapeva sul comportamento di quei certi sali nelle soluzioni acquose. Nel 1872 Coppet seguitò tali studî (3): egli introdusse una notevole modificazione nel modo di interpretare le esperienze e mentre Rüdorff si riferiva ad uguali quantità di sale disciolto egli invece si riferì a delle quantità proporzionali ai pesi molecolari o, in altri termini, invece di comparare i coefficienti di abbassamento comparò il prodotto di questi coefficienti per il peso molecolare, prodotto questo che fu chiamato *abbassamento molecolare*. Coppet trovò che l'abbassamento molecolare delle soluzioni di sali analoghi era presso a poco costante, ossia che soluzioni contenenti quantità di sali analoghi proporzionali al peso molecolare si congelano alla stessa temperatura. Coppet studiò anche attentamente se la legge di proporzionalità di Blagden e

(1) Phil. trans. LXXVIII, 277. 1788.

(2) Pogg. Ann. CXIV, 63. 1861; CXVI, 55. 1862; CXLV, 599. 1871.

(3) Ann. de Chimie et de Phisique, XXIII, 366. 1871; XXV, 502. 1872; XXVI, 98. 1872.

Rüdorff si manteneva sempre e trovò non solo che non si manteneva sempre, il che aveva dimostrato anche Rüdorff, ma che in molti casi, come ad esempio in quello del nitrato ammonico, le anomalie non potevano in alcun modo spiegarsi colla ipotesi della formazione di sali idrati. Nel 1882 Raoult cominciò la pubblicazione di una serie di Memorie (1) che hanno condotto a risultati ben più interessanti. Raoult cominciò collo studiare le sostanze organiche in soluzione acquosa e trovò, per un numero abbastanza grande di combinazioni, che, senza eccezione alcuna, l'abbassamento molecolare era costante: oscillava cioè tra 16,6 e 19,9: due sole sostanze gli dettero numeri un poco differenti, il fenolo cioè il cui abbassamento è 15,5 e l'acido ossalico che ha l'abbassamento 22,9. L'importanza di questo fatto non sfuggì a Raoult, il quale nella sua prima Memoria si affrettò a mostrare come il punto di congelamento fornisse un mezzo prezioso per la determinazione del peso molecolare delle sostanze organiche: basta determinare il coefficiente di abbassamento di una sostanza in soluzione nell'acqua e dividere quella certa quantità costante (in media 18,5) per tale coefficiente di abbassamento: abbiamo infatti:

$$\text{coefficiente di abbassamento} \times \text{peso molecolare} = \text{prodotto costante}$$

$$\text{peso molecolare} = \frac{\text{prodotto costante}}{\text{coeff.}^{te}\text{ d'abbassamento}} = \frac{18{,}5}{\text{coeff.}^{te}\text{ d'abbassamento}}$$

Per quanto i numeri che in tal modo si ottengono differiscano in limiti piuttosto estesi dai veri pesi molecolari, pure, trattandosi di dovere scegliere, il dubbio non potrebbe mai sorgere e si avrebbe così un mezzo tanto esatto per tale determinazione quanto quello della densità di vapore. In altre Memorie Raoult studiò se questa legge, che si verificava per le soluzioni acquose, si verificasse anche per le soluzioni in altri solventi e trovò che sì dentro certi limiti: naturalmente quel prodotto costante è numericamente diverso, ma la costanza ad ogni modo si mantiene. Abbiamo detto dentro certi limiti ed infatti mentre tutte le sostanze organiche nell'acqua e anche nell'acido acetico e formico hanno lo stesso abbassamento molecolare, negli altri solventi adoprati da Raoult invece, cioè la benzina e la nitrobenzina non tutte hanno lo stesso abbassamento molecolare, ma si distinguono in due classi: sostanze non contenenti ossidrili le quali hanno tutte uno stesso abbassamento molecolare costante per ciascun solvente, e sostanze contenenti ossidrili (alcooli, fenoli e acidi) che hanno pure tutte un abbassamento molecolare costante per ciascun solvente, ma diverso da quello delle sostanze non ossidrilate: anzi in generale il primo abbassamento molecolare è, per ciascun solvente, doppio dell'altro. Unica eccezione a questa regola di Raoult sarebbero, fra le sostanze da lui esaminate, gli ammoni e i veri sali i quali in soluzione acquosa non si comportano come le altre sostanze organiche, ma sibbene come i composti inorganici: e anche nelle soluzioni acetiche e formiche i sali presentano un comportamento speciale.

Senza parlare delle altre esperienze di Raoult sulle combinazioni inorganiche e delle conseguenze che egli ne ha tratto riguardo agli equilibri chimici, noi ci fermeremo specialmente alle applicazioni che di queste sue leggi si possono fare alla chimica organica. È certo che quando queste leggi si verificassero generalmente, noi

(1) C. rend. XCIV, 1517; XCV, 188; XCV, 1030; XCVII, 941; XCIX.

avremmo un mezzo ben più pronto e forse anche più sicuro per la determinazione del peso molecolare che non quello della densità di vapore: poche, relativamente al numero grande di combinazioni organiche, sono quelle che possono ridursi allo stato di vapore, mentre sono rare quelle sostanze che non sieno solubili almeno in uno dei solventi che sopra abbiamo enumerato. E quando poi sono solubili, come è il caso frequente, in più di un solvente i diversi numeri vengono a controllarsi e avremmo così una certezza sempre maggiore nella scelta del peso molecolare; senza contare poi che il metodo è facilissimo a praticarsi e non esige nemmeno l'impiego di sostanze purissime. Nè meno interessante, ove venisse confermata, ci pare l'altra delle regole date da Raoult, cioè quella fondata sul diverso modo di comportarsi delle sostanze contenenti ossidrili e di quelle che non li contengono: avremmo qui un mezzo assai semplice e assai più sicuro che non quelli che la chimica suggerisce per stabilire la presenza dell'ossidrile.

Da questi brevi cenni chiaramente si scorge di quanta importanza sia l'argomento per il progresso della chimica e per la risoluzione di tanti problemi relativi alla costituzione delle sostanze organiche, e di quanta utilità potrebbero essere per le loro innumerevoli applicazioni le regole formulate da Raoult. È per questo che noi abbiamo voluto indagare se esse regole si mantengono sempre rigorosamente e a questo scopo noi le abbiamo sottoposte a due prove: prima, abbiamo cercato se esse si mantengono per sostanze polimere, non polimere perchè aventi soltanto formule l'una doppia dell'altra come l'aldeide e l'acido butirrico, composti già studiati da Raoult, ma polimere perchè derivanti realmente l'una dalla condensazione dell'altra, come l'aldeide e la paraldeide, l'acetonitrile e la cianometina, la cianamide e la diciandiamide: seconda, abbiamo voluto applicare la legge di Raoult alla risoluzione di alcuni problemi, abbiamo voluto vedere cioè se, per sostanze la cui grandezza molecolare era soltanto presupposta, l'applicazione di essa legge conduceva a risultati che stessero in armonia colle supposizioni che la natura chimica del composto e le sue trasformazioni avevano autorizzato a fare, o al contrario conduceva a conseguenze diverse e tali da non potersi affatto accettare tenendo conto dei dati chimici. Per quest'ultimo scopo abbiamo scelto delle sostanze che già formarono oggetto di studio di uno di noi e sopra alcune delle quali vi è stata anche una vivace discussione la quale non può affermarsi che abbia ancora portato ad una completa soluzione dei punti controversi.

Le sostanze alle quali alludiamo sono l'acido lapacico e il lapacone che uno di noi credette possibile fosse un polimero anzichè un semplice isomero del primo, e la picrotossina e l'idrato di picrotosside. Abbiamo inoltre studiato il comportamento di uno dei molti isomeri della santonina preparati dal prof. Cannizzaro, cioè della santonide che fonde a 127°: la quale sostanza poteva supporsi che fosse un polimero invece che un semplice isomero della santonina tanto più elevato essendo il suo potere rotatorio.

## Modo di operare.

Il metodo che abbiamo seguito nelle nostre ricerche non differisce da quello tenuto da Raoult e dagli altri esperimentatori. Le soluzioni di cui volevamo determinare il punto di congelamento si trovavano in un largo tubo da saggio del diametro

di 5 centimetri. Della soluzione prendevamo sempre un volume costante cioè a dire 120 c. c., precisamente come fa Raoult. Il tubo in cui si trova la soluzione è immerso in un bicchiere pieno di alcool che è circondato dalla mescolanza frigorifera. La soluzione, in mezzo alla quale sta immerso il bulbo del termometro che misura la temperatura di congelamento, viene continuamente agitata da un piccolo agitatore in platino mosso da una macchinetta elettromagnetica. Un altro termometro è immerso nell'alcool che viene pure spesso agitato: questo secondo termometro è necessario perchè si possa regolare la temperatura del miscuglio frigorifero in modo che non si abbia un abbassamento troppo distante dal punto di congelamento della soluzione. Le soluzioni erano assai diluite: ordinariamente fu determinata la loro composizione pesando direttamente sia la sostanza che il solvente per mezzo di bilance sensibili ai decimilligrammi. I termometri da noi adoperati furono costruiti da Golaz a Parigi: per le esperienze che abbiamo fatto sin qui ci siamo serviti di tre, uno segnato 975 che va da — 4,7° a + 9,3°, l'altro segnato 978 che va da — 4,5 a + 9,8° e finalmente un terzo, che adoperammo per le soluzioni nell'acido acetico, che va da + 8,8 a + 20,2 ed è segnato 979. Questi termometri furono da noi accuratamente verificati e controllati per mezzo di termometri campioni. Tutti e tre sono divisi in cinquantesimi di grado e si possono benissimo apprezzare i 0,002°. Le letture vennero fatte o per mezzo di un cannocchiale o anche direttamente giacchè abbiamo in questi due modi ottenuto sempre identici risultati. I solventi adoprati erano purissimi: quanto all'acido acetico conteneva un po' d'acqua la quale del resto non ha influenza sui resultati, come appare dai lavori di Raoult e come noi stessi ci siamo assicurati. Il punto di congelamento del solvente è stato per ogni serie di esperienze accuratamente verificato. Le sostanze da noi adoprate furono purificate con tutte le cure e non abbiamo esperimentato che su campioni purissimi. Quanto agli errori che si possono commettere in tal genere di esperienze noi crediamo, insieme con Raoult, che sieno trascurabili quelli dovuti al riscaldamento della colonna termometrica che sporge fuori della soluzione e per conseguenza la temperatura di congelamento, come nelle esperienze di Raoult, si può misurare con esattezza sino a 0,002° a 0,004°. L'influenza della temperatura ambiente è piccolissima: secondo Raoult una differenza di 20° nella temperatura ambiente non porta che una differenza di 0,01 nella temperatura che segna il termometro immerso nella soluzione: del rimanente da questo errore ci si può premunire determinando il punto di congelamento del solvente e quello della soluzione a piccola distanza l'uno dall'altro. Quanto all'errore nella determinazione della quantità di sostanza sciolta in 100 grammi di solvente certamente esso non può superare 0,02 e quindi i numeri che rappresentano i coefficienti di abbassamento può ritenersi che sieno esatti sino alla prima cifra decimale senza che le differenze oltrepassino una o due unità della seconda. Ogni volta che facevamo una esperienza si misuravano 120 c. c. della soluzione preparata di fresco e si versavano nel tubo, quando l'alcool che lo circondava era già raffreddato affine di non lasciare per molto tempo esposta la soluzione all'aria. Quindi si poneva in azione il piccolo motore avendo cura di agitare anche frequentemente l'alcool. In un tubo da saggio immerso nella mescolanza frigorifera si poneva poi un poco della soluzione la quale si congelava, e, quando la temperatura di essa nel tubo era scesa

presso a poco al punto di congelamento presunto, noi vi facevamo cadere per mezzo di un filo di platino un cristallino della soluzione già congelata: se la soluzione era stata raffreddata sotto il punto di congelamento subito essa cominciava a congelare e il termometro risaliva rapidamente e si manteneva costante per alcuni minuti, cioè sino a che tutta la soluzione non era congelata: in caso diverso la piccola quantità di soluzione cristallizzata aggiunta si scioglieva di nuovo. Condizione essenziale perchè le esperienze riescano bene è che la soluzione non sia raffreddata molto al disotto della temperatura di congelamento, altrimenti il termometro risale sì, ma si mantiene per pochissimo tempo fermo e subito discende. Come temperatura di congelamento noi abbiamo sempre presa quella segnata dal termometro quando esso, dopo avere risalito, si ferma per qualche minuto. Avendo le precauzioni che sopra abbiamo accennato le esperienze si fanno colla più grande facilità e noi ci siamo assicurati che realmente, per una stessa soluzione, non si hanno differenze che di 0,002°-0,004° nei punti di congelamento.

## Esperienze.

### *Aldeide acetica* $C_2 H_4 O$

L'aldeide fu preparata trattando con poche gocce di acido solforico della paraldeide purissima e quindi distillando. Essa bolliva a 20,8°. Le soluzioni furono fatte in due modi; o fu distillata direttamente dell'aldeide in una quantità d'acqua pesata e quindi fu pesato nuovamente per vedere quanta ne era stata assorbita, oppure fu pesata in tubo chiuso una quantità determinata di aldeide e quindi fu rotto il tubo dentro l'acqua già pesata. Facemmo esperienze con soluzioni di diversa concentrazione.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare p. $C_2 H_4 O$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 0,779 | — 0,32 | 0,4107 | 18,07 |
| II | 3,229 | — 1,38 | 0,4274 | 18,81 |
| III | 3,249 | — 1,39 | 0,4279 | 18,83 |
| IV | 9,887 | — 4,32 | 0,4369 | 19,22 |

### *Paraldeide* $(C_2 H_4 O)_3$

La paraldeide proveniva dalla fabbrica di Kahlbaum in Berlino. Fu purificata facendola cristallizzare ripetutamente e spremendo a freddo i cristalli. Bolliva a 124,5° (termometro nel vapore) alla pressione di 757$^{mm}$.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $(C_2 H_4 O)_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 2,469 | — 0,36 | 0,1458 | 19,24 |
| II | 4,957 | — 0,75 | 0,1513 | 19,97 |

### *Acetonitrile* $CH_3 . CN$

Esperimentammo sopra acetonitrile di due provenienze. Per le esperienze I e II ci servimmo di acetonitrile preparato da noi per l'azione del pentasolfuro di fosforo sull'acetamide; il prodotto greggio fu lavato con soluzione di soda, messo a digerire

con ossido di piombo seccato e distillato. Bolliva a 81,4°-81,6° alla pressione di 762$^{mm}$. Per la esperienza III ci servimmo di un prodotto di Kahlbaum che bolliva alla stessa temperatura.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.$^{te}$ d'abb.° | Abb.° molecolare per $CH_3 . CN$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 2,952 | — 1,28 | 0,4336 | 17,78 |
| II | 7,824 | — 3,30 | 0,4216 | 17,28 |
| III | 2,489 | — 1,13 | 0,4539 | 18,61 |

*Cianometina* $(CH_3 . CN)_3$

La cianometina fu preparata secondo le indicazioni di Keller ([1]).

In un apparecchio a reflusso, la cui parte superiore era chiusa da una colonna di mercurio alta 20 centimetri, furono posti 20 gr. di sodio sui quali facemmo agire 120 gr. di acetonitrile: scaldammo per diverse ore prima a bagno maria, poi a bagno d'olio, distillammo l'eccesso di acetonitrile e quindi cristallizzammo diverse volte la cianometina prima dall'acqua e poi dall'alcool assoluto.

Fondeva a 181,7°-182,4°.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.$^{te}$ d'abb.° | Abb.° molecolare per $(CH_3 . CN)_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 0,6553 | — 0,04 | 0,0610 | |
| II | 0,6651 | — 0,04 | 0,0601 | |
| III | 1,1095 | — 0,07 | 0,0631 | |
| IV | 1,6528 | — 0,13 | 0,0786 | 9,67 |
| V | 2,1684 | — 0,16 | 0,0738 | |
| VI | 3,7103 | — 0,26 | 0,0701 | |
| VII | 4,1646 | — 0,28 | 0,0672 | |
| VIII | 7,6970 | — 0,42 | 0,0546 | |
| IX | 13,8540 | — 0,64 | 0,0461 | 5,67 |

Come si vede i coefficienti d'abbassamento variano colla concentrazione delle soluzioni e le variazioni non sembra che seguano alcuna regola. Abbiamo fatto molti tentativi per vedere di dare ragione di queste anomalie, ma non ci siamo riusciti. L'abbassamento molecolare, prendendo anche il coefficiente più elevato, non condurrebbe alla formula $(CH_3 . CN)_3$ ma ad una formula doppia: negli altri casi poi a formule anche più complesse. Noi abbiamo voluto determinare la densità di vapore della cianometina, che sino a qui non era stata determinata, e siamo giunti alla conclusione che allo stato di vapore la cianometina ha realmente la formula $(CH_3 . CN)_3$.

Ecco i risultati della nostra determinazione:

| Sostanza gr. 0,048 | Densità di vapore | |
|---|---|---|
| Gas. c. c. 9,85 | trovata | calcolata per $(CH_3 . CN)_3$ |
| $T = 20°$ | 4,16 | 4,25 |
| $B = 756,5^{mm}$. | | |

([1]) Journ. f. prakt. Chemie [2], XXXI, 363. 1885.

Noi esperimentammo anche con una soluzione acetica di cianometina: ma anche per questa, tenuto conto che la cianometina si trasformava in acetato, ottenemmo numeri che non si accordano affatto colla formula $(CH_3 . CN)_3$.

Infatti:

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $(CH_3 . CN)_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1,342 | 0,26 | 0,1937 | 23,68 |

Ora l'abbassamento molecolare medio per le sostanze organiche in soluzione nell'acido acetico è 39.

### *Cianamide* $CN_2 H_2$

La cianamide fu preparata per l'azione dell'ossido di mercurio umido sulla soluzione acquosa di solfourea.

La soluzione di cianamide si svaporò rapidamente, si riprese con etere che lasciò indisciolta la diciandiamide, e quindi si fece cristallizzare.

Fondeva a 40°. La soluzione fu fatta pochi minuti avanti di fare la esperienza.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $CN_2 H_2$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 0,9803 | — 0,38 | 0,3876 | 16,28 |

### *Diciandiamide* $(CN_2 H)_2$

La diciandiamide proveniva dalla fabbrica di Schuchardt in Görlitz. Era bianchissima: fondeva a 204,5°-205,5°.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $(CN_2 H_2)_2$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1,570 | — 0,29 | 0,1850 | 15,54 |

Sebbene il numero trovato per l'abbassamento molecolare si discosti un poco dalla media, pure possiamo ritenere che anche esso rientri nella regola di Raoult: infatti egli ottenne il numero 15,5 pel fenolo e fece già notare anche come le sostanze azotate abbiano in generale un abbassamento molecolare più piccolo che non le altre sostanze organiche.

### *Acido lapacico* $C_{15} H_{14} O_3$

L'acido lapacico si estrae dal legno dell'albero Lapacho che cresce nell'America meridionale. Fu già studiato da uno di noi e fu trovato identico all'acido taiguico di Arnoudon (1). Per ottenerlo si tratta la segatura di legno Lapacho con carbonato sodico: la soluzione sodica si tratta con acido cloridrico che precipita l'acido lapacico, il quale si cristallizza poi dall'etere e dalla benzina: fonde a 138° e si presenta in bei cristalli gialli. La sua composizione è rappresentata dalla formula $C_{15} H_{14} O_3$. Le esperienze furono fatte sulla soluzione nel benzolo. I numeri da noi ottenuti confermano la formula già assegnata all'acido lapacico per quanto riguarda il peso molecolare: però la presenza di un ossidrile nell'acido lapacico non può essere chimicamente

(1) Gazzetta chimica. T. XII, pag. 3361. 2882.

messa in dubbio e in tal caso secondo la regola di Raoult l'abbassamento molecolare dovrebbe essere circa la metà di quello da noi trovato.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $C_{15}H_{14}O_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1,096 | — 0,21 | 0,1916 | 46,37 |

*Lapacone* $C_{15}H_{14}O_3$

Questo composto (1) si ottiene nel miglior modo per l'azione dell'acido solforico a freddo sull'acido lapacico: si tratta 1 p. d'acido lapacico con 4 p. di acido solforico agitando sino a completa soluzione: versando poscia in molta acqua si precipitano dei fiocchi abbondanti di color rosso arancio, che, cristallizzati dall'etere e dall'alcool, forniscono il lapacone puro in bellissimi aghi del colore sopra indicato, fusibili a 155°-156°. Per quanto riguarda la costituzione di questo composto l'ipotesi che è sembrata più probabile è che esso sia un polimero dell'acido lapacico, giacchè per le esperienze di Stenhouse e Groves sul $\beta$ naftochinone, per quelle di G. Spica sul toluochinone, per le più recenti di Liebermann sopra il benzo e l'$\alpha$ naftochinone e per altre ancora inedite di uno di noi, è reso molto probabile che tutti i chinoni per l'azione dell'acido solforico si trasformino in polimeri, e l'acido lapacico non è altro che un ossichinone. Pur tuttavia è da osservare che i polimeri dei chinoni finora studiati sono delle sostanze brune, poco solubili ed a punto di fusione molto più elevato dei corrispondenti chinoni, mentre fra l'acido lapacico e il lapacone non si osserva nei caratteri esteriori questo grande distacco. Anche per questa sostanza furono fatte esperienze in soluzione benzolica. I numeri da noi ottenuti conducono allo stesso peso molecolare che per l'acido lapacico.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $C_{15}H_{14}O_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 1,796 | — 0,32 | 0,1781 | 43,10 |

*Picrotossina* $C_{30}H_{34}O_{13}$?

La costituzione della picrotossina e la sua formula sono state in questi ultimi anni argomento di una viva polemica fra uno di noi e Oglialoro da una parte e Barth e Kretschy dall'altra. Rimandando il lettore ai lavori originali (2) per la conoscenza dei fatti e degli argomenti che sono stati prodotti, ci limiteremo a rammentare che la picrotossina, alla quale era stata attribuita la formula $C_{12}H_{14}O_5$ (Pelletier e Couerbe, Barth) fu in una prima pubblicazione da uno di noi ed Oglialoro rappresentata con l'altra $C_9H_{10}O_4$, ma in seguito avendo trovato che tutti i suoi derivati corrispondono a formule con $C_{15}$ l'abbiamo sostituita con l'altra $C_{30}H_{34}O_{13}$ che corrisponde ugualmente bene alla composizione elementare e che ha il vantaggio di spiegar facilmente la sua scissione in idrato di picrotosside e in picrotina:

$$C_{30}H_{34}O_{13} = C_{15}H_{18}O_7 + C_{15}H_{16}O_6$$

Barth e Kretschy invece hanno sostenuto che la picrotossina è un miscuglio di due sostanze $C_{15}H_{16}O_6$ l'una e $C_{25}H_{30}O_{12}$ l'altra.

(1) Gazzetta chimica. T. XII, pag. 370.

(2) Gazzetta chimica. T. VI, 531; VII, 193; IX, 57; XI, 36.

Per queste esperienze abbiamo adoperato picrotossina cristallizzata dall'acqua e disseccata a 100°-120° facendo uso di soluzioni nell'acido acetico. I risultati ottenuti non confermano la formula $C_{30}H_{34}O_{13}$, ma si avvicinano più a quella $C_{12}H_{14}O_5$ proposta dal Barth, se pure, ove si voglia ammettere come indiscutibile la legge di Raoult, non debbano considerarsi come un argomento in favore della ipotesi di Barth e Kretshcy che la così detta picrotossina sia un miscuglio.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $C_{30}H_{34}O_{13}$ | Abb.° molecolare per $C_{12}H_{14}O_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 0,9926 | — 0,18 | 0,1813 | 109,14 | 43,15 |
| II | 1,046 | — 0,19 | 0,1816 | 109,32 | 43,22 |

*Idrato di picrotosside* $C_{15}H_{18}O_7$

Anche per questa sostanza rimandiamo alle memorie originali sopra citate.

Esaminammo dell'idrato di picrotosside di due preparazioni diverse: cioè una porzione ($\alpha$) ottenuta per l'azione di HCl gassoso sopra una soluzione alcoolica di picrotossina, e una porzione ($\beta$) ottenuta per l'azione del bromo sulla picrotossina in sospensione nell'etere.

Le soluzioni furono fatte in acido acetico. I numeri da noi ottenuti confermano la formula $C_{15}H_{18}O_7$ proposta da Paternò e Oglialoro.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $C_{15}H_{18}O_7$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1,0339 | — 0,15 | 0,1451 | 44,98 |
| $\beta$ | 1,2106 | — 0 16 | 0,1322 | 40,98 |

*Santonide* $C_{15}H_{18}O_3$

La santonide è un isomero della santonina e si ottiene per azione dell'acido acetico glaciale sulla santonina. Il suo potere rotatorio fu già oggetto di studio del prof. Carnelutti e di uno di noi: essa è destrogira ed è, dopo la parasantonide, la sostanza organica dotata del maggiore potere rotatorio: infatti abbiamo per essa alla temperatura di 20° in soluzione cloroformica $[\alpha]D = +754$ per concentrazioni che variano da 3,101 a 30,520. Abbiamo esperimentato su questa sostanza per vedere se essa fosse un polimero della santonina, come il suo potere rotatorio tanto più elevato poteva far credere: invece l'abbassamento molecolare condurrebbe alla formula semplice $C_{15}H_{18}O_3$. Le soluzioni furono fatte nel benzolo.

| | Concentrazione | Abbassamento | Coeff.te d'abb.° | Abb.° molecolare per $C_{15}H_{18}O_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 2,182 | — 0,42 | 0,1925 | 47,36 |

## CONCLUSIONE

Dalle esperienze che abbiamo esposte ci sembra di poter concludere che in generale la legge di Raoult ha ricevuto una nuova ed importante conferma, sebbene non si mantenga in tutto il suo rigore e sola eccezione, fra le sostanze organiche, non sieno gli ammoni ed i veri sali. Ed invero, ed è questo il risultato più notevole da noi ottenuto, fra tre coppie di polimeri che abbiamo studiato, in due casi, aldeide

e paraldeide, cianamide e diciandiamide, abbiamo ottenuti resultati pienamente conformi alla legge. Per la cianometina invece l'abbassamento molecolare conduce a resultati che non sono punto d'accordo con quelli forniti dalla densità di vapore e dalle analogie chimiche. Si può, è vero, fare l' ipotesi che, in soluzione, la molecola della cianometina sia più complessa, ma in questo caso cesserebbe l'accordo tra i dati forniti da un metodo e quelli forniti dall'altro e la legge di Raoult non avrebbe più quell'importanza che l'autore le ha attribuito, giacchè non potrebbe servire nei casi dubbî a stabilire la vera grandezza molecolare. Ma anche questa ipotesi non sembra a noi troppo probabile; infatti i coefficienti d'abbassamento della cianometina variano colla concentrazione e presentano un massimo per una concentrazione di gr. 1,6—2 in 100 gr. d'acqua e poi diminuiscono progressivamente. Ora se realmente le anomalie fossero dovute all'essere, in soluzione, la molecola più complicata noi dovremmo avere il massimo di abbassamento per il massimo di diluizione; e questo non è. Resta però il fatto che se volessimo tener conto soltanto del punto di abbassamento noi dovremmo ammettere per la cianometina una formula o $(CH_3 . CN)_6$ o $(CH_3 . CN)_7$ o $(CH_3 . CN)_9$: formule queste diverse da quella che la densità di vapore e le analogie stabiliscono. Quanto ai problemi che abbiamo cercato di risolvere è a dirsi che i dati forniti dall'abbassamento del punto di congelazione per l'acido lapacico e il lapacone non possono considerarsi come una difficoltà alla legge di Raoult, giacchè l'ipotesi fatta da uno di noi, che il lapacone sia un polimero dell'acido lapacico, non è fondata sopra alcun fatto determinato e le stesse considerazioni di analogia coi polimeri dei chinoni non trovano preciso riscontro nei caratteri fisici del lapacone. Uno studio dal punto di vista chimico è necessario per chiarire questa questione. Per quanto poi concerne la picrotossina, sebbene le esperienze di Paternò e Oglialoro sieno state confermate da Schmidt e Löwenhardt [1], pure non può dirsi del tutto esclusa la possibilità che la picrotossina sia un miscuglio o almeno una combinazione tanto poco stabile da scindersi per il fatto solo della soluzione, tanto più che, ammettendo anche che sia un composto definito non può negarsi il fatto osservato da Barth e Kretschy, che essa si scompone per reiterate cristallizzazioni dall'acqua e dalla benzina. Nemmeno questi fatti adunque possono considerarsi come in opposizione alla legge di Raoult. E certo pertanto che in un numero grande di casi questa legge di Raoult, specialmente in quanto riguarda la determinazione dei pesi molecolari, si verifica con grande esattezza, tanto che non va confusa con molte altre delle così dette leggi di chimica fisica che spesso non sono che giuochi di numeri in cui ci si trova soltanto quello che vi si è messo: qualche volta questa legge è in difetto e per ora non possiamo stabilire a priori quando è che ciò si verifica.

Noi continueremo le nostre ricerche e ci occuperemo di risolvere, mediante queste indagini, dei problemi di chimica organica principalmente riguardanti sostanze che furono e sono oggetto di studio di ambedue noi e ci auguriamo che i nostri sforzi uniti a quelli di Raoult possano dare una stabilità sempre maggiore a questa legge che sembra destinata a rendere alla chimica organica importanti servigî.

[1] Berl. Ber. XIV, 817. 1881.

# RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni nella seduta del 7 febb. 1886, sulla Memoria del prof. A. Righi intitolata: *Ricerche sperimentali e teoriche intorno alla riflessione della luce polarizzata sul polo d'una calamita.*

« In questa seconda Memoria l'autore svolge viemaggiormente la teoria da lui esposta nella prima sull'interessante fenomeno scoperto da Kerr, e l'applica ad una serie di casi accessibili all'esperienza, per stabilirne il perfetto accordo. Costatato il fatto, che la luce riflessa del polo della calamita ha la polarizzazione elittica, egli applica la teoria in modo più speciale al caso, in cui la vibrazione riflessa è rettilinea, confrontando le formole relative coi dati sperimentali.

« Egli le applica indi al caso di riflessioni multiple ed al caso di riflessione su di un corpo trasparente messo sul polo della calamita. Egli perfeziona infine il metodo fin qui da lui usato nello studio sperimentale del fenomeno di Kerr, rendendolo più sensibile e più esatto, e studia l'effetto prodotto dalla diversa refrangibilità della luce incidente.

« I sottoscritti, vista la non comune perizia, con cui l'autore procede in queste difficili indagini tanto dal lato teorico quanto da quello sperimentale, e gli interessanti e nuovi risultati da lui ottenuti, propongono l'inserzione integrale di questa seconda Memoria negli Atti accademici ».

# Ricerche sperimentali e teoriche intorno alla riflessione della luce polarizzata sul polo d'una calamita.

## II. Memoria del prof. AUGUSTO RIGHI

(Con una tavola)

### Capitolo I.

### Riassunto della I$^a$. Memoria (1) e scopo della II$^a$.

#### 1. *Parte sperimentale della Memoria precedente.*

I fenomeni che si producono nella riflessione sul polo d'una calamita furono scoperti dal sig. Kerr (2), e studiati poscia dal sig. Gordon (3), dal sig. Fitzgerald (4), e dopo, quasi simultaneamente dal sig. Kundt (5) e da me. Secondo il Kerr ed il Gordon, all'incidenza normale le vibrazioni subirebbero una semplice rotazione, di senso opposto alla corrente magnetizzante, e secondo una teoria del Fitzgerald le vibrazioni stesse non farebbero che trasformarsi in elittiche, coll'asse maggiore nella direzione primitiva.

Dalle mie esperienze relative a questo caso risultò che si ha una vera rotazione, forse accompagnata da trasformazione della vibrazione rettilinea in elitttica, trasformazione che la mia teoria prevede. In altri termini, secondo tale teoria la vibrazione riflessa è elittica, coll'asse maggiore della elissi inclinato sulla direzione della vibrazione incidente.

Alle incidenze obblique la vibrazione riflessa è in generale elittica, anche quando la vibrazione incidente è o perpendicolare o parallela al piano d'incidenza, vale a dire anche allorquando resterebbe rettilinea se il ferro non fosse magnetico. Qui pure divergono alquanto fra loro i risultati sperimentali del Kerr e del Fitzgerald e solo in qualche particolarità coincidono fra loro e con quelli verificati da me. Nessuno poi prima di me s'accorse della necessità di operare con una superficie speculare di ferro magnetizzata in modo sensibilmente uniforme. Questa uniformità l'ottenni riducendo

(1) Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 4$^a$, vol. I, pag. 367. — Ann. de Chim. et Phys. 6$^{me}$ serie t. IV, 1885.

(2) Phil. Mag. may 1877 p. 321.

(3) Phil. Mag. august 1877 p. 104.

(4) Phil. Mag. supplement june 1877 p. 529.

(5) Wied. Ann. october 1884. — V. la nota in fine della mia I$^a$ Memoria.

la superficie riflettente ad una striscia strettissima collocata di fronte ad una faccetta rettangolare vicinissima di un pezzo di ferro, che forma il polo opposto della calamita (1). Con tal disposizione sperimentale mi fu dato scoprire una notevole differenza nei fenomeni ottenuti, secondo che le vibrazioni incidenti sono o nel piano d'incidenza o perpendicolari a questo piano.

In ogni caso la vibrazione riflessa è elittica (salvo un caso che sarà studiato più oltre), e l'asse maggiore dell'elisse è inclinato sulla direzione che avrebbe la vibrazione riflessa se il ferro non fosse magnetizzato. Per cui, se prima d'inviare la corrente magnetizzante il nicol analizzatore era stato girato sino all'estinzione, riapparè la luce nel momento in cui si chiude il circuito.

Girando o il polarizzatore o l'analizzatore in senso contrario della corrente, d'un conveniente angolo (2), l'intensità della luce che giunge all'occhio dell'osservatore si rende minima. Ma è appunto qui che si scorge la differenza fra i due casi, giacchè:

1° Quando le vibrazioni incidenti sono nel piano d'incidenza la rotazione dell'analizzatore occorrente ad ottenere il minimo, è notevolmente maggiore di quella del polarizzatore che dà lo stesso effetto, ed il minimo di luce ottenuto è più marcato.

2° Quando le vibrazioni incidenti sono perpendicolari al piano d'incidenza, è invece la rotazione del polarizzatore quella che è maggiore e che dà il minimo più marcato.

In una parola, polarizzatore ed analizzatore scambiano le parti, passando dall'uno all'altro caso.

Il minimo più marcato che si ottiene girando il polarizzatore, quando le vibrazioni incidenti sono perpendicolari al piano d'incidenza, o girando l'analizzatore quando le vibrazioni suddette sono in questo piano, è tale, che giunge all'occhio una luce appena più intensa (almeno alle incidenze medie), di quella che vi giungeva quando prima del passaggio della corrente i due nicol erano posti all'estinzione. Per cui si può dire che l'effetto della magnetizzazione può essere quasi perfettamente compensato, 1° con una adeguata rotazione dell'analizzatore, allorquando le vibrazioni incidenti sono nel piano d'incidenza, cosicchè in tal caso il fenomeno meno differisce da una semplice rotazione delle vibrazioni, 2° con un'adeguata rotazione del polarizzatore, quando le vibrazioni incidenti sono perpendicolari al piano d'incidenza.

Risultò inoltre dalle misure da me eseguite di quelle rotazioni che: a parità d'angolo d'incidenza, la rotazione dell'analizzatore nel primo caso è sensibilmente eguale a quella del polarizzatore nel secondo.

Oltre alle esperienze che dimostrano questi enunciati, ho nella mia I$^a$ Memoria narrate alcune altre esperienze fatte con riflessioni multiple ed incidenza quasi normale, aventi lo scopo di amplificare i fenomeni, e accennate altre poche rivolte a studiare

(1) V. I$^a$ Memoria, art. 10.

(2) Pel modo in cui le rotazioni si suppongono osservate veggasi la I$^a$ Memoria, art. 11.

come variano gli effetti al variare della qualità della luce adoperata. Con queste ultime mi convinsi quasi dell'esistenza d'una dispersione anomala, e cioè credetti d'accorgermi che gli effetti decrescono nel passare dai raggi rossi agli altri più rifrangibili dello spettro, il che è stato dimostrato vero dal Kundt, e da me con nuove esperienze.

## 2. *Parte teorica della precedente Memoria.*

La parte teorica della mia prima Memoria comprende una confutazione d'una teoria proposta da Fitzgerald, e l'esposizione d'una nuova teoria, la quale ha il pregio di render conto completo dei fenomeni da me dimostrati sperimentalmente, e che si fonda sulle seguenti considerazioni.

Nella riflessione metallica obbliqua di una vibrazione inclinata sul piano d'incidenza, le due componenti di essa, prese secondo questo piano e secondo la perpendicolare, subiscono una differente riduzione d'ampiezza e acquistano una differenza di fase. È la componente diretta nel piano d'incidenza che è in ritardo relativamente all'altra, e che perde più in ampiezza. Questa componente dunque, o penetra più profondamente dell'altra nel metallo, o se si vuole, le molecole superficiali di questo hanno una attitudine diversa a vibrare parallelamente alla superficie e nelle altre direzioni.

Se nel caso della riflessione normale sul polo decomponiamo la vibrazione incidente in due circolari inverse, è verosimile che una delle due si trovi in condizioni analoghe, e cioè o penetri di più nel ferro, o le molecole di questo abbiano diversa attitudine a vibrare circolarmente o in un senso o nell'altro. Una delle due componenti circolari deve dunque perdere più dell'altra in ampiezza e subire un ritardo relativo.

Basta supporre che la vibrazione circolare che si compie nel senso delle correnti d'Ampère sia quella cui accadano queste vicende, per ispiegare come la vibrazione riflessa sia elittica, e coll'asse maggiore spostato rispetto alla direzione della vibrazione incidente, in senso inverso della corrente magnetizzante, ossia per render conto del fenomeno di Kerr all'incidenza normale.

Alle incidenze obblique il fenomeno sarà più complicato, ma certo si è che per incidenze prossime a 90° deve il polo magnetico comportarsi sensibilmente come un metallo ordinario. La vibrazione incidente deve decomporsi dunque: 1° in due circolari inverse, quando l'incidenza è zero; 2° in due componenti rettilinee, l'una nel piano d'incidenza, l'altra perpendicolare a questo piano, quando l'incidenza è radente. Nei due casi poi imporre ad una delle componenti una minor ampiezza ed un ritardo.

Per le incidenze intermedie bisognava quindi trovare un modo di decomposizione che permettesse di collegare con continuità i casi estremi, precisamente come fece l'Airy per coordinare i fenomeni di polarizzazione rotatoria, ossia di doppia rifrazione circolare che presenta il quarzo nella direzione dell'asse, ai fenomeni di doppia rifrazione ordinaria che presenta nelle direzioni perpendicolari.

Ho fatto perciò l'ipotesi, che nel caso delle incidenze obbliche la vibrazione incidente debba decomporsi in due vibrazioni elittiche reciproche, aventi l'una l'asse maggiore nel piano d'incidenza e l'altra perpendicolare, che quella il cui asse maggiore è nel piano d'incidenza sia percorsa dalla particella vibrante nel senso della

corrente, e che subisca nella riflessione una maggior perdita d'ampiezza ed un ritardo. Nella formazione dei due raggi elittici reciproci entra un parametro $p$, che basta supporre eguale all'unità onde le elissi divengano circoli, cioè onde si abbia il caso dell'incidenza normale, ed eguale a zero, onde si abbia il caso dell'ordinaria riflessione metallica, che si deve verificare all'incidenza radente.

Con questi principî, e designando con

$$x_0 = \operatorname{sen} \theta$$

la vibrazione incidente, supposta diretta nel piano d'incidenza (come si vede, si prende per semplicità coll'ampiezza eguale ad uno), le componenti secondo due assi ortogonali diretti come nella fig. 12 della I$^a$ Memoria (quì riprodotta nella fig. 1) sono:

$$(7)\quad \begin{cases} X = \dfrac{k}{1+p^2} \operatorname{sen}(\theta - \varphi) + \dfrac{hp^2}{1+p^2} \operatorname{sen} \theta \\ Y = \dfrac{kp}{1+p^2} \cos(\theta - \varphi) - \dfrac{hp}{1+p^2} \cos \theta \quad (1) \end{cases}$$

in cui $k$ ed $h$ sono i coefficienti di riduzione delle ampiezze delle vibrazioni componenti, $\varphi$ la differenza di fase che contraggono nella riflessione.

Così pure, nel caso in cui la vibrazione incidente sia

$$y_0 = \operatorname{sen} \theta$$

cioè diretta perpendicolarmente al piano d'incidenza, le componenti della vibrazione riflessa sono:

$$(8)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{hp}{1+p^2} \cos \theta + \dfrac{kp}{1+p^2} \cos(\theta - \varphi) \\ Y = -\dfrac{h}{1+p^2} \operatorname{sen} \theta - \dfrac{kp^2}{1+p^2} \operatorname{sen}(\theta - \varphi)\,. \end{cases}$$

Finalmente, pel caso d'una vibrazione incidente che faccia coll'asse $O_0x_0$ un angolo $\omega$, le componenti della vibrazione riflessa sono:

$$(11)\quad \begin{cases} X = \dfrac{k}{1+p^2} \cos\omega \operatorname{sen}(\theta - \varphi) + \dfrac{hp^2}{1+p^2} \cos\omega \operatorname{sen}\theta - \dfrac{hp}{1+p} \operatorname{sen}\omega \cos\theta \\ \qquad\qquad + \dfrac{kp}{1+p^2} \operatorname{sen}\omega \cos(\theta - \varphi) \\ Y = \dfrac{kp}{1+p^2} \cos\omega \cos(\theta - \varphi) - \dfrac{hp}{1+p^2} \cos\omega \cos\theta - \dfrac{h}{1+p^2} \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\theta \\ \qquad\qquad - \dfrac{kp^2}{1+p^2} \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \end{cases}$$

Dopo avere nella mia I$^a$ Memoria con queste formole mostrato l'accordo della teoria coi risultati sperimentali che avevo in precedenza ottenuti, le ho applicate a studiare le proprietà della vibrazione riflessa in alcuni casi speciali, fra cui devo

(1) Per evitare equivoci scrivo a fianco delle formole riportate dalla I$^a$ Memoria, lo stesso numero d'ordine che hanno in quella. Dovendone poi numerare di nuove, continuerò la numerazione di quella della I$^a$ Memoria, dove si arriva fino al 35.

notare quello in cui la vibrazione riflessa ha uno degli assi nel piano d'incidenza, e quello in cui è rettilinea.

### 3. *Scopo del presente lavoro.*

Nella presente Memoria ho ripresa la teoria fermandomi a quest'ultimo caso, che tratto da capo in modo più completo, e che è particolarmente interessante per l'opportunità di verificazioni sperimentali che presenta.

Poi preparo le formole pel calcolo delle misure, ed applico la teoria al caso di riflessioni multiple ed al caso di riflessione su di un corpo trasparente messo sul polo.

Infine descrivo una nuova disposizione sperimentale più comoda e più perfetta di quelle fin qui adoperate per lo studio del fenomeno di Kerr, e riporto i risultati delle nuove esperienze da me eseguite, sia per verificare risultati teorici, sia per istudiare l'effetto della diversa rifrangibilità della luce incidente, sia per ottenere una qualche determinazione delle costanti che entrano nelle formole fornite dalla mia teoria.

---

## Capitolo II.

## Complemento alla parte teorica della I$^a$ Memoria.

### 4. *Reciprocità d'azione del polarizzatore e dell'analizzatore.*

Si è detto che polarizzatore ed analizzatore scambiano le parti nel passare dal caso delle vibrazioni incidenti perpendicolari al piano d'incidenza, al caso delle vibrazioni parallele al medesimo piano, per cui la rotazione misurata col polarizzatore nel primo caso è eguale a quella misurata coll'analizzatore nel secondo. Colla teoria adottata dimostrai che questa eguaglianza vale non solo per le rotazioni che rendono minima la luce, ma per rotazioni che diano luce eguale nei due casi (v. I$^a$ Memoria art. 26). Si può generalizzare anche di più questo teorema, e dimostrare che: se dopo avere disposto il polarizzatore in modo da fornire vibrazioni nel piano d'incidenza e l'analizzatore nella posizione che prima del passaggio della corrente dà l'estinzione, si fa girare il polarizzatore d'un angolo $\omega$ e l'analizzatore d'un angolo $\gamma$, si ottiene l'identico effetto come a far girare nello stesso senso il polarizzatore dell'angolo $\gamma$ e l'analizzatore dell'angolo $\omega$, partendo dalle posizioni dei nicol in cui le vibrazioni incidenti sono perpendicolari al piano d'incidenza, e l'analizzatore produce l'estinzione prima del passaggio della corrente.

Questa identità di effetti s'intenderà nel senso che la vibrazione emergente dall'analizzatore ha nei due casi egual ampiezza ed egual fase.

La dimostrazione di questa *legge di reciprocità* si ottiene agevolmente coll'uso delle formole (11). Supponiamo prima le vibrazioni incidenti dirette secondo l'asse $O_0 x_0$

della fig. 1 (vedi fig. 2) (1), cioè nel piano d'incidenza, e supponiamo l'analizzatore all'estinzione, disposto cioè in modo da non dar passaggio che a vibrazioni dirette secondo l'asse $Oy$. Facciamo girare da destra verso sinistra il polarizzatore dell'angolo $\omega$ e l'analizzatore dell'angolo $\gamma$. Quest'ultimo trasmetterà allora solo la componente $Y_1$ della vibrazione riflessa diretta secondo $Oy_1$.

Ma la vibrazione riflessa avrà per componenti secondo $Ox$, $Oy$ le X ed Y delle (11); per cui avremo:

$$Y_1 = Y\cos\gamma - X\operatorname{sen}\gamma$$

ossia:

$$\begin{aligned}(1+p^2)\,Y_1 = {} & kp\cos\gamma\cos\omega\cos(\theta-\varphi) - hp\cos\gamma\cos\omega\cos\theta - h\cos\gamma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta \\ & - kp^2\cos\gamma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(\theta-\varphi) - k\operatorname{sen}\gamma\cos\omega\operatorname{sen}(\theta-\varphi) - hp^2\operatorname{sen}\gamma\cos\omega\operatorname{sen}\theta \\ & + hp\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega\cos\theta - kp\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega\cos(\theta-\varphi)\end{aligned} \tag{36}$$

Supponiamo ora invece (fig. 3) la vibrazione incidente diretta secondo $O_0y_0$, e l'analizzatore all'estinzione, capace cioè di trasmettere vibrazioni dirette secondo $Ox$. Giriamo nel senso di prima il polarizzatore dell'angolo $\gamma$ e l'analizzatore dell'angolo $\omega$. Le componenti secondo $Ox$, $Oy$ della vibrazione riflessa saranno date dalle (11) in cui però si ponga $90^0+\gamma$ in luogo di $\omega$, e cioè

$$\begin{aligned}(1+p^2)\,X = {} & -k\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\theta-\varphi) - hp^2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta - hp\cos\gamma\cos\theta + kp\cos\gamma\cos(\theta-\varphi) \\ (1+p^2)\,Y = {} & -kp\operatorname{sen}\gamma\cos(\theta-\varphi) + hp\operatorname{sen}\gamma\cos\theta - h\cos\gamma\operatorname{sen}\theta - kp^2\cos\gamma\operatorname{sen}(\theta-\varphi)\end{aligned}$$

Per avere la vibrazione che emerge dall'analizzatore, bisognerà prendere la componente $X_1$ secondo $Ox_1$ e cioè

$$X_1 = X\cos\omega + Y\operatorname{sen}\omega\,.$$

Mettendo in posto di X, Y i precedenti valori, si trova per $X_1$ un'espressione identica a quella di $Y_1$ (36), il che dimostra l'enunciato teorema.

5. *Orientazioni del polarizzatore che danno raggi riflessi a vibrazioni rettilinee.*

Sia $O_0n_0$ (fig. 4) una vibrazione incidente inclinata sul piano d'incidenza dell'angolo $\omega$. La vibrazione riflessa avrà per componenti secondo $Ox$, $Oy$, le X ed Y delle (11). Troviamone le componenti secondo due nuovi assi $Ox_1$, $Oy_1$, di cui il primo fa l'angolo $\gamma$ con $Ox$, limitandoci a scrivere la $Y_1$. Avremo

$$Y_1 = Y\cos\gamma - X\operatorname{sen}\gamma\,.$$

Mettendo in luogo di X ed Y i loro valori (11), si ha precisamente la (36) scritta più sopra. Eguagliamo separatamente a zero i coefficienti di $\operatorname{sen}\theta$ e di $\cos\theta$ in questa formola, poniamo cioè:

$$\left\{\begin{aligned} & kp\cos\gamma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi - h\cos\gamma\operatorname{sen}\omega - kp^2\cos\gamma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi \\ & \qquad - k\operatorname{sen}\gamma\cos\omega\cos\varphi - hp^2\operatorname{sen}\gamma\cos\omega - kp\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi = 0 \\ & kp\cos\gamma\cos\omega\cos\varphi - hp\cos\gamma\cos\omega + kp^2\cos\gamma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi \\ & \qquad + k\operatorname{sen}\gamma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + hp\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega - kp\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi = 0;\end{aligned}\right. \tag{37}$$

(1) Nella figura 2, come pure nelle 3, 4, 5, 6, 7, 12, i due rettangoli $I_1\,I_2$, $R_1\,R_2$ presi nel piano di figura, sono i rettangoli indicati colle stesse lettere nella figura prospettica 1, visti dalla parte convenuta, cioè in modo da ricevere nell'occhio il raggio incidente ed il raggio riflesso.

la vibrazione riflessa si ridurrà alla sola componente diretta secondo $O x_1$, e si avranno così nelle (37) due equazioni che serviranno a determinare i valori di $\omega$ e $\gamma$ relativi al caso di vibrazioni riflesse rettilinee, $\omega$ essendo l'angolo che deve fare la vibrazione incidente onde la riflessa anzichè elittica sia rettilinea, e $\gamma$ quello di questa vibrazione col piano d'incidenza.

Dividendo le (37) per $\cos\omega\cos\gamma$, ciò che è lecito purchè nessuno dei due coseni sia zero, si hanno le equazioni:

$$(38)\quad \begin{cases} kp\,\mathrm{sen}\,\varphi - h\,\mathrm{tg}\,\omega - kp^2\,\mathrm{tg}\,\omega\cos\varphi - k\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos\varphi - hp^2\,\mathrm{tg}\,\gamma - kp\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \\ kp\cos\varphi - hp + kp^2\,\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi + k\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\varphi + hp\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega - kp\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\omega\cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Per risolvere queste equazioni, ricaviamo dalla prima il valore di $\mathrm{tg}\,\gamma$ e portiamolo nella seconda; si ottiene

$$\mathrm{V}\,\mathrm{tg}^2\omega - \mathrm{T}\,\mathrm{tg}\,\omega + \mathrm{U} = 0$$

in cui si è posto per brevità:

$$(39)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = hk(1-p^4)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{U} = p\left[k^2 - h^2p^2 - hk(1-p^2)\cos\varphi\right] = \frac{p}{2}(1-p^2)(h^2+k^2-2hk\cos\varphi) \\ \qquad\qquad -\frac{p}{2}(1+p^2)(h^2-k^2) \\ \mathrm{X} = p\left[k^2p^2 - h^2 + hk(1-p^2)\cos\varphi\right] = -\frac{p}{2}(1-p^2)(h^2+k^2-2hk\cos\varphi) \\ \qquad\qquad -\frac{p}{2}(1+p^2)(h^2-k^2). \end{cases}$$

Dalla pecedente equazione si ricava

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\mathrm{T} \pm \sqrt{\mathrm{T}^2 - 4\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}}}{2\mathrm{V}},$$

e dicendo $\omega'$, $\omega''$ i due valori che si hanno in causa del doppio segno:

$$(40)\qquad \mathrm{tg}\,\omega' = \frac{\mathrm{T} + \sqrt{\mathrm{T}^2 - 4\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}}}{2\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{tg}\,\omega'' = \frac{\mathrm{T} - \sqrt{\mathrm{T}^2 - 4\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}}}{2\mathrm{V}}.$$

Per determinare i valori $\gamma'$ e $\gamma''$ di $\gamma$ che corrispondono ad $\omega'$ ed $\omega''$, si potrebbero porre successivamente nel valore di $\mathrm{tg}\,\gamma$ ricavato da una delle due equazioni (38) i valori trovati di $\mathrm{tg}\,\omega'$ e di $\mathrm{tg}\,\omega''$ al posto di $\mathrm{tg}\,\omega$. Ma riesce più breve il calcolo ricavando il valore di $\mathrm{tg}\,\omega$ da una delle due equazioni e portandolo nell'altra, poichè si ottiene:

$$\mathrm{U}\,\mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{T}\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{V} = 0,$$

dalla quale si ricava:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{-\mathrm{T} \pm \sqrt{\mathrm{T}^2 - 4\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}}}{2\mathrm{U}}.$$

Se non chè, così facendo, non si vede a colpo d'occhio quale dei due valori di $\gamma$ corrisponde ad $\omega'$, e quindi debba designarsi con $\gamma'$, e quale corrisponda ad $\omega''$ e debba quindi ricevere la denominazione $\gamma''$. Ma scrivendo l'ultima formola così:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{-2\mathrm{V}}{\mathrm{T} \pm \sqrt{\mathrm{T}^2 - 4\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}}},$$

è facile verificare che onde le due equazioni (38) sieno soddisfatte, bisogna prendere nel valore di $\operatorname{tg}\gamma$ il segno inferiore, se si prende il superiore nel valore di $\operatorname{tg}\omega$, e viceversa. Avremo dunque

$$(41)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma' = \dfrac{-T-\sqrt{T^2-4UV}}{2U} = \dfrac{-2V}{T-\sqrt{T^2-4UV}} \\ \operatorname{tg}\gamma'' = \dfrac{-T+\sqrt{T^2-4UV}}{2U} = \dfrac{-2V}{T+\sqrt{T^2-4UV}} \end{cases}.$$

È necessario ora esaminare quali sieno i segni e le grandezze relative delle quattro tangenti di $\omega', \omega'', \gamma', \gamma''$, onde conoscere in quali quadranti sono comprese le vibrazioni di cui ci occupiamo. A ciò si richiede la conoscenza dei segni di T, U, V.

Ora, sapppiamo che $h$ e $k$ sono positivi essendo $h > k$, che $p$ è compreso fra 0 ed 1 od è eguale a questi limiti, e che $\varphi$ è compreso fra un piccolo valore $\varphi_0$ che ha all'incidenza normale ed il valore $\pi$ corrispondente all'incidenza di 90°. La quantità T è dunque evidentemente positiva e la V negativa.

Quanto alla U il suo segno dipende dall'incidenza. Infatti per l'incidenza normale alla quale $p=1$ essa è negativa, mentre che per le incidenze prossime alla radente, alle quali $p$ è quasi nullo e $\varphi$ raggiunge quasi il valore $\pi$, essa è positiva. È verosimile dunque che per le incidenze comprese fra 0° e 90° U sia dapprima negativa, poi si annulli, ed infine divenga positiva, ciò che del resto l'esperienza pienamente conferma, come si vedrà in seguito.

L'incidenza particolare alla quale $U=0$ la chiameremo *incidenza singolare*, e per studiare quali sono i segni degli angoli $\omega' \omega'' \gamma' \gamma''$, distinguiamo due casi, secondo che l'incidenza è minore o maggiore della singolare.

*Incidenze minori dell'incidenza singolare.* In tal caso T è positivo, U e V negativi. 4UV sarà positivo, ed il radicale che entra nelle (40) e (41) minore di T. Perciò i due numeratori delle (40) saranno positivi ed i valori di $\operatorname{tg}\omega'$, $\operatorname{tg}\omega''$ negativi, essendo poi il primo, in valore assoluto, maggiore del secondo. Le vibrazioni incidenti, che danno le riflesse rettilinee, saranno dunque situate come I', I'', nella figura 5.

Analogamente, $\operatorname{tg}\gamma'$ e $\operatorname{tg}\gamma''$ saranno positive, e la prima numericamente maggiore della seconda; le vibrazioni riflesse saranno dunque situate come le R' R'' della stessa figura.

I valori dei quattro angoli sono immaginari se $T^2 < 4UV$, cioè non si hanno in tali casi vibrazioni riflesse rettilinee. Ciò si verifica certamente all'incidenza normale, giacchè sappiamo che in tal caso la vibrazione riflessa è elittica. Le vibrazioni riflesse rettilinee si presenteranno solo a partire da un'incidenza, verosimilmente piccola, alla quale $T=4VU$. A questa incidenza si ha un sol valore per $\operatorname{tg}\omega$ e uno per $\operatorname{tg}\gamma$, il primo negativo, il secondo positivo, e cioè $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{T}{2V}$, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{-2V}{T}$. In tal caso le due vibrazioni I', I'' si riducono ad una sola, e così pure R', R'', ed i due angoli $\omega$ e $\gamma$ differisono di 90°.

*Incidenze maggiori dell'incidenza singolare.* In tal caso T ed U sono positivi e V negativo. Il prodotto 4UV è per sè stesso negativo, ed il radicale è maggiore

di T. Perciò $\operatorname{tg}\omega'$ sarà negativa come prima, ma $\operatorname{tg}\omega''$ sarà positiva, sempre però numericamente minore. Le vibrazioni I', I'', saranno dunque disposte come nella fig. 6.

Analogamente $\operatorname{tg}\gamma'$ sarà negativa e numericamente minore di $\operatorname{tg}\gamma''$ che sarà ancora positiva. Le vibrazioni riflesse R', R'' saranno dunque situate come mostra la fig. 6.

Per stabilire un confronto fra questi risultati teorici e le esperienze, torna comodo introdurre nuovi angoli al posto di $\omega', \omega'', \gamma', \gamma''$. Le direzioni delle vibrazioni I'' ed R'', che sono vicine al piano d'incidenza, le caratterizzeremo cogli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, che fanno con questo piano, convenendo di prendere questi angoli positivamente da destra a sinistra. Così nel caso della fig. 6 avremo $\alpha_0 = \omega''$, $\alpha = \gamma''$, mentre nel caso della fig. 5 avremo $-\alpha_0 + \omega'' = \pi$, $\alpha = \gamma''$.

Analogamente le vibrazioni I', R', attigue alla perpendicolare al piano d'incidenza, verranno individuate dagli angoli $\beta_0, \beta$, che esse fanno colla suddetta perpendicolare, contando anche qui gli angoli positivamente in senso levogiro. Nel caso della fig. 6 si avrà $\beta_0 = \omega' - \frac{\pi}{2}$, $\beta = \gamma' - \frac{\pi}{2}$, ed in quello della fig. 5, $\beta_0 = \omega' - \frac{\pi}{2}$, $-\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma'$.

Tanto pel caso della fig. 5 che per quello della fig. 6 si avrà dunque:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\omega'', \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma'', \quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{-1}{\operatorname{tg}\omega'}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{-1}{\operatorname{tg}\gamma'},$$

e quindi:

$$(42)\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{T - \sqrt{T^2 - 4UV}}{2V}, \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-T + \sqrt{T^2 - 4UV}}{2U}, \end{cases} \qquad (43)\begin{cases} \operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{-T + \sqrt{T^2 - 4UV}}{2U}, \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{T - \sqrt{T^2 - 4UV}}{2V}, \end{cases}$$

d'onde apparisce essere

$$\alpha_0 = \beta, \qquad \alpha = \beta_0,$$

ciò che non è che un caso particolare della legge generale di reciprocità (art. 4). Si vede pure che

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\beta_0} = \frac{-U}{V}$$

e cioè, per la forma che hanno le (39), $\alpha_0$ è sempre numericamente minore di $\beta_0$. Per $U = 0$ si ha pure $\alpha_0 = 0$.

I risultati che l'esperienza deve verificare sono in riassunto i seguenti: 1° Determinati con misure gli angoli $\alpha_0, \alpha, \beta_0, \beta$, deve risultare $\alpha_0 = \beta$, $\alpha = \beta_0$; 2° deve essere sempre $\alpha_0 < \alpha$; 3° $\alpha_0$ (e quindi $\beta$) deve essere negativo a partire dalle piccole incidenze fino ad una certa incidenza singolare, annullarsi a questa incidenza, e divenire positivo alle incidenze maggiori; 4° $\alpha$ (e quando $\beta_0$) deve essere sempre positivo.

### 6. *Proprietà dell'incidenza singolare.*

Per risolvere le equazioni (37), le abbiamo divise per $\cos\gamma \cos\omega$, ciò che non può farsi che quando i due coseni sono diversi da zero. Supponiamo ora invece che

uno sia nullo per una data incidenza, per esempio $\cos\omega = 0$, e quindi $\operatorname{sen}\omega = \pm 1$. Introducendo questi valori nelle (37) si ricava dalla prima di esse

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{h + kp^2 \cos\varphi}{kp \operatorname{sen}\varphi},$$

e dalla seconda

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{kp^2 \operatorname{sen}\varphi}{p(k\cos\varphi - h)},$$

ed eguagliando questi due valori si trova precisamente

$$V = 0, \quad \text{od anche} \quad p^2 = \frac{h^2 - hk\cos\varphi}{k^2 - hk\cos\varphi}.$$

Questo valore di $p^2$, che è evidentemente maggiore dell'unità, non può corrispondere a nessuna incidenza, giacchè $p$ varia da uno a zero. L'ipotesi $\cos\omega = 0$ non è dunque ammissibile, ed è lecito dividere le equazioni (37) per $\cos\omega$.

Supponiamo invece $\cos\gamma = 0$ e quindi $\operatorname{sen}\gamma = \pm 1$. Dalle (37) si deduce allora

$$U = 0, \quad \text{da cui} \quad p^2 = \frac{k^2 - hk\cos\varphi}{h^2 - kh\cos\varphi} \tag{44}$$

valore minore dell'unità, e quindi ammissibile per $p^2$. Il caso dell'incidenza singolare è dunque quello in cui uno dei valori di $\gamma$, che è poi $\gamma'$, è dato da $\cos\gamma' = 0$, e quindi $\gamma' = \pm\frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

Per la legge di reciprocità sarà pure $\alpha_0 = 0$.

Per avere gli altri due valori di $\omega$ e di $\gamma$, i cui coseni non sono nulli, basterà dividere le (37) per $\cos\gamma\cos\omega$, e risolverle rispetto a $\operatorname{tg}\gamma$ e $\operatorname{tg}\omega$, introducendovi la condizione $U = 0$. Il risultato cui si giunge è il medesimo, come facendo $U = 0$ nelle (42) e (43), e cioè

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{-V}{T}.$$

Le vibrazioni I′ ed I″ e le corrispondenti vibrazioni riflesse R′, R″, saranno dunque orientate come mostra la fig. 7.

L'incidenza singolare gode quindi della proprietà, che la vibrazione I″ diretta nel piano d'incidenza dà una vibrazione riflessa rettilinea R″, e cioè il fenomeno di Kerr è in quest'unico caso una semplice rotazione delle vibrazioni in senso inverso della corrente magnetizzante. È questa particolarità che caratterizza l'incidenza singolare, che potrebbesi perciò denominare *l'incidenza di semplice rotazione.*

Si può anche dire che all'incidenza singolare, e con vibrazioni incidenti giacenti nel piano d'incidenza, una rotazione $\alpha$ dell'analizzatore compensa esattamente l'azione del magnetismo, mentre per tutte le altre incidenze la compensazione non è mai completa, essendo il raggio riflesso a vibrazioni elittiche.

Similmente, alla vibrazione incidente I′ corrispondendo la R′ diretta secondo $Oy$, si può dire che all'incidenza singolare, e con vibrazioni incidenti originariamente perpendicolari al piano d'incidenza, una rotazione $\beta_0 = \alpha$ del polarizzatore compensa esattamente l'effetto della

magnetizzazione dello specchio, mentre per tutte le altre incidenze la compensazione non è che parziale.

La rotazione di compensazione completa $\alpha$, propria dell'incidenza singolare, deve essere eguale al valore che ha per questa incidenza l'angolo $\omega_1$, ed aumentata di $\frac{\pi}{2}$ deve essere eguale all'angolo $\varepsilon$; gli angoli $\omega_1$ ed $\varepsilon$ sono calcolati nella I$^a$ Memoria. Facendo vedere che ciò è difatti, otterremo una verificazione dei risultati preccedenti.

Abbiamo nella I$^a$ Memoria indicato con $\omega_1$ l'angolo di cui devesi girare l'analizzatore per rendere minima la luce trasmessa, e con $\omega_2$ l'angolo di cui deve invece girarsi il polarizzatore, se con questo vuol ottenersi il medesimo effetto, ammesso che le vibrazioni incidenti siano inizialmente nel piano d'incidenza, e l'analizzatore sia messo all'estinzione prima della magnetizzazione. I valori di $\omega_1$ ed $\omega_2$ sono dati dalle formole (17) e (19) che qui trascriviamo:

$$(17) \qquad \operatorname{tg} 2\omega_1 = \frac{2hkp(1+p^2)\operatorname{sen}\varphi}{(k^2-h^2p^2)(1-p^2)+4hkp^2\cos\varphi}.$$

$$(19) \qquad \operatorname{tg} 2\omega_2 = \frac{2hkp(1+p^2)\operatorname{sen}\varphi}{(h^2-k^2p^2)(1-p^2)+4hkp^2\cos\varphi}.$$

In virtù della legge di reciprocità se invece di partire da vibrazioni incidenti giacenti nel piano d'incidenza, si parte da vibrazioni perpendicolari a questo piano, e sempre coll'analizzatore inizialmente all'estinzione, le rotazioni che separatamente rendono minima la luce sono $\omega_2$ per l'analizzatore, ed $\omega_1$ per il polarizzatore.

Nel caso attuale dell'incidenza singolare le rotazioni $\alpha = \beta_0$ devono coincidere con $\omega_1$, giacchè se annullano la luce trasmessa, a maggior ragione la rendono minima. Si avrà dunque una prima verificazione coll'introdurre la condizione $U = 0$ nel valore di $\omega_1$, giacchè deve risultarne un valore eguale a quello che ha $\alpha$ per l'incidenza singolare.

Ora quest'ultimo valore è

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-V}{T},$$

e mettendo in V e T per $p$ il valore (44), che equivale ad $U = 0$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{k^2-hk\cos\varphi}\,\sqrt{h^2-hk\cos\varphi}}{hk\operatorname{sen}\varphi},$$

e quindi

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi\sqrt{k^2-hk\cos\varphi}\,\sqrt{h^2-hk\cos\varphi}}{h^2+k^2-2hk\cos\varphi}.$$

Si arriva subito ad un valore di $\operatorname{tg} 2\omega_1$ identico a questo, mettendo nella (17) per $p^2$ il valore (44).

Si può ottenere facilmente l'altra verificazione. Nella I$^a$ Memoria abbiamo determinato l'angolo $\varepsilon$ che una vibrazione incidente deve fare coll'asse $O_0x_0$, onde la vibrazione elittica riflessa abbia i suoi assi secondo $Ox$, $Oy$. La formola che dà $\varepsilon$ è la seguente:

$$(27) \qquad \operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2p}{1+p^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Ora, nel caso attuale, quando la vibrazione incidente è I′, la riflessa è R′, e questa essendo rettilinea e diretta secondo $Oy$, può essere considerata come una vibrazione elittica avente gli assi secondo $Ox$ ed $Oy$. Siccome la I′ fa con $O_0x_0$ un angolo $\frac{\pi}{2}+\beta_0=\frac{\pi}{2}+\alpha$, così ponendo $U=0$, ossia $p^2$ eguale al valore (44), devesi avere dalla (27) $\varepsilon=\frac{\pi}{2}+\alpha$, ossia $2\varepsilon=\pi+2\alpha$, od anche $\operatorname{tg}2\varepsilon=\operatorname{tg}2\alpha$. Eseguita la sostituzione si trova subito difatti una formola identica a quella scritta poc' anzi per $\operatorname{tg}2\alpha$.

Potrebbe nascere il dubbio che l'incidenza singolare non sia altro che l'incidenza principale, così continuando a chiamare quell'incidenza alla quale $\varphi=\frac{\pi}{2}$, incidenza che deve certo poco differire da 76°, valore dell'incidenza principale per l'acciaio non magnetizzato.

Ma è facile dissipare questo dubbio. Infatti, ammettiamo per un momento che all'incidenza singolare si abbia $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Allora $\operatorname{tg}\varphi=\infty$, $\alpha=45^0$ e quindi anche $\omega_1=45^0$. Ciò è affatto inverosimile, giacchè gli effetti della magnetizzazione sono sempre assai piccoli, tanto che di rado la rotazione $\omega_1$ supera il grado. Daltronde l'esperienza dà per l'incidenza singolare un valore notevolmente minore di quello della incidenza principale.

L'incidenza singolare è dunque una nuova incidenza dotata di proprietà speciali, che non ha riscontro nei fenomeni di ordinaria riflessione metallica, e che è caratterizzata dall'essere in questo solo caso il fenomeno di Kerr, per vibrazioni incidenti giacenti nel piano d' incidenza, una semplice rotazione delle vibrazioni stesse.

---

## Capitolo III.

## Formole per la determinazione delle costanti caratteristiche per ogni incidenza.

### 7. *Riflessione obbliqua. 1° Metodo.*

Le formole fornite dalla teoria contengono le quattro quantità $h, k, p, \varphi$, che caratterizzano le vibrazioni elittiche, nelle quali si scinde la vibrazione incidente nell'atto della riflessione, e che per ogni incidenza hanno un valore costante.

Su queste quantità non possediamo finora che pochi dati, e precisamente sappiamo solo che le due prime sono $\leqq 1$ e $>0$, che è sempre $k<h$ fuorchè all'incidenza di 90° ove entrambe divengono eguali all'unità, che $p$ varia da 1 a zero, quando l'incidenza varia da zero a 90°, e che la differenza di fase $\varphi$ ha un valore $\varphi_0$ all'incidenza normale, e cresce fino a $\pi$ quando l'incidenza cresce da zero a 90°.

Per avere una esatta nozione dei valori di quelle quattro quantità, sarebbe necessario studiare quantitativamente i caratteri del raggio riflesso nei vari casi. Ma si può giungere allo stesso risultato, semplicemente per mezzo di misure di rotazioni dell'analizzatore o del polarizzatore. Se infatti per ogni incidenza si misurano con precisione i quattro angoli $\omega_1, \omega_2, \alpha_0, \alpha$, le quattro equazioni (17), (19), (42) che legano questi angoli alle costanti $h, k, p, \varphi$, potranno servire a determinarle. Però, per la forma che hanno le equazioni suddette, non potrà determinarsi insieme a $p$ ed a $\varphi$, che il rapporto $\frac{k}{h}$, che d'ora in poi indicheremo con $\varrho$, mentre, volendo, resterebbe possibile lo stabilire coll'eliminazione delle tre incognite fra le quattro equazioni, una relazione fra i quattro angoli misurati. Di questa relazione non è utile occuparsi, perchè di forma assai complicata.

Pel calcolo delle quantità $p, \varphi, \varrho$, giova dedurre dalle equazioni (17), (19), (42), altre di forma più semplice ed appropriata allo scopo. Scriviamo perciò le (17) e (19) come segue:

$$(\varrho^2 - p^2)(1 - p^2)\operatorname{tg} 2\omega_1 + 4\varrho p^2 \cos\varphi \operatorname{tg} 2\omega_1 = 2\varrho p (1 + p^2)\operatorname{sen}\varphi ,$$
$$(1 - p^2\varrho^2)(1 - p^2)\operatorname{tg} 2\omega_2 + 4\varrho p^2 \cos\varphi \operatorname{tg} 2\omega_2 = 2\varrho p (1 + p^2)\operatorname{sen}\varphi ,$$

ed eliminiamo fra di esse $\cos\varphi$. Si avrà:

$$(1 + p^2)(1 - \varrho^2)(1 - p^2)\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2 = 2\varrho p (1 + p^2)\operatorname{sen}\varphi (\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2) ,$$

ossia

$$(45) \qquad \frac{\varrho \operatorname{sen}\varphi}{1 - \varrho^2} = \frac{1 - p^2}{2p} \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2} .$$

Eliminando invece $\operatorname{sen}\varphi$ si ha:

$$(\varrho^2 - p^2)(1 - p^2)\operatorname{tg} 2\omega_1 - (1 - \varrho^2 p^2)(1 - p^2)\operatorname{tg} 2\omega_2 + 4\varrho p^2 \cos\varphi (\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2) = 0$$

ossia

$$(46) \quad 4\varrho p^2 \cos\varphi (\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2) = (1 - p^2)(\operatorname{tg} 2\omega_2 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_1) - \varrho^2 (1 - p^2)(\operatorname{tg} 2\omega_1 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_2)$$

Scriviamo del pari le (42) come segue:

$$V \operatorname{tg}^2\alpha_0 - T \operatorname{tg}\alpha_0 + U = 0 , \qquad U \operatorname{tg}^2\alpha + T \operatorname{tg}\alpha + V = 0 ,$$

o mettendo per T, U, V i loro valori (39):

$$\frac{p}{2}(1 - p^2)(1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\varphi)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha_0) - \frac{p}{2}(1 + p^2)(1 - \varrho^2)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0)$$
$$- \varrho (1 - p^4)\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}\alpha_0 = 0 ,$$
$$\frac{p}{2}(1 - p^2)(1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\varphi)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) + \frac{p}{2}(1 + p^2)(1 - \varrho^2)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$
$$- \varrho (1 - p^4)\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}\alpha = 0 .$$

Eliminiamo fra queste equazioni $\cos\varphi$. Si avrà successivamente:

$$\frac{p}{2}(1 + p^2)(1 - \varrho^2)\left\{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha_0) + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\right\}$$
$$+ \varrho (1 - p^4)\operatorname{sen}\varphi \left\{\operatorname{tg}\alpha_0 (1 - \operatorname{tg}^2\alpha) - \operatorname{tg}\alpha (1 - \operatorname{tg}^2\alpha_0)\right\} = 0 ,$$

$$p(1 - \varrho^2)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha_0 \operatorname{tg}^2\alpha) + \varrho (1 - p^2)\operatorname{sen}\varphi (\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha) = 0$$

$$(47) \qquad \frac{\varrho \operatorname{sen}\varphi}{1 - \varrho^2} = \frac{p}{1 - p^2} \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0} .$$

Le tre equazioni (45), (46) e (47) sono distinte ed equivalgono alle (17), (19) e ad una delle (42). Esse si risolvono facilmente come segue.

Dalle (45) e (47) si ha tosto:

$$(1-p^2)^2 = 2p^2 \frac{1-\operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0} \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2},$$

ossia:

$$1-p^2 = 2p\,\mathrm{L},$$

ponendo:

$$\mathrm{L} = \sqrt{\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2)}{2(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0)\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2}}.$$

Se ne ricava per $p$ il valore:

$$p = \sqrt{\mathrm{L}^2+1} - \mathrm{L}. \tag{48}$$

Non si mette il doppio segno al radicale perchè $p$ deve essere positivo.

Determinato in tal modo $p$, ricaviamo dalla (45) il valore di sen $\varphi$, e quindi quello di cos $\varphi$, ed introduciamolo nella (46). Dopo molte riduzioni, che non presentano veruna difficoltà, si giunge all'equazione:

$$\mathrm{M}\varrho^4 - 2\mathrm{N}\varrho^2 + \mathrm{P} = 0,$$

in cui si è posto:

$$\mathrm{M} = (\operatorname{tg} 2\omega_1 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_2)^2 + 4p^2 \operatorname{tg}^2 2\omega_1 \operatorname{tg}^2 2\omega_2,$$

$$\mathrm{N} = (\operatorname{tg} 2\omega_1 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_2)(\operatorname{tg} 2\omega_2 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_1) + 8\frac{p^4}{(1-p^2)^2}(\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2)^2 + 4p^2 \operatorname{tg}^2 2\omega_1 \operatorname{tg}^2 2\omega_2,$$

$$\mathrm{P} = (\operatorname{tg} 2\omega_2 + p^2 \operatorname{tg} 2\omega_1)^2 + 4p^2 \operatorname{tg}^2 2\omega_1 \operatorname{tg}^2 2\omega_2.$$

Se ne ricava:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mathrm{N} \pm \sqrt{\mathrm{N}^2 - \mathrm{PM}}}{\mathrm{M}}}. \tag{49}$$

I segni si prenderanno in modo che $\varrho$ riesca positivo e minore dell'unità.

Finalmente dalla (45) si trae:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{(1-p^2)(1-\varrho^2)}{2p\varrho} \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2} = \mathrm{L}\frac{1-\varrho^2}{\varrho} \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2}. \tag{50}$$

Dopo avere calcolata la quantità L, la formola (48) servirà a determinare $p$. Poi si calcoleranno le quantità M, N, P, nelle quali entrano i quattro angoli misurati ed il valore già calcolato di $p$, ed allora colla (49) si avrà $\varrho$. Introdotti poi nella (50) i valori già determinati di $p$ e $\varrho$, se ne dedurrà il valore di $\varphi$.

I valori che effettivamente troveremo per $p$ nell'art. 20 sono assai piccoli. Si potranno dunque semplificare le formole (49) e (50) che servono a calcolare $\varrho$ e $\varphi$ dopo che si è già calcolato $p$, trascurando in esse le potenze di $p$ superiori alla prima.

I tre coefficienti M, N, P, che entrano nella equazione (49) divengono in tal ipotesi:

$$\mathrm{M} = \operatorname{tg}^2 2\omega_1, \qquad \mathrm{N} = \operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2, \qquad \mathrm{P} = \operatorname{tg}^2 2\omega_2,$$

e perciò $\mathrm{N}^2 = \mathrm{MP}$.

Allora la (49) si riduce a:

$$\varrho = \sqrt{\frac{N}{M}},$$

ossia:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1}}. \tag{49'}$$

Messo questo valore di $\varrho$ nella (50) si trova:

$$\operatorname{sen} \varphi = L \sqrt{\operatorname{tg} 2\omega_1} \sqrt{\operatorname{tg} 2\omega_2}. \tag{50'}$$

Queste due formole, abbastanza approssimate per le incidenze alle quali $p$ è assai piccolo, sono incomparabilmente più facili a calcolarsi, delle formole esatte (49) e (50).

La misura degli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, che, insieme a quella degli angoli $\omega_1$, $\omega_2$, serve di base ai calcoli destinati alla determinazione delle tre quantità caratteristiche, non è suscettibile di esattezza sufficiente, come vedremo più oltre, che per incidenze comprese fra circa 40° e 90°. Il metodo seguente è invece generale, quantunque offra maggiori difficoltà sperimentali.

8. 2° *Metodo.* Un'altra maniera per determinare i valori che hanno alle varie incidenze le costanti $\varrho$, $p$, $\varphi$, è la seguente.

Dopo aver misurate le rotazioni $\omega_1$, $\omega_2$, si misurino, per esempio col compensatore di Babinet, le differenze di fase delle componenti secondo gli assi $0x$, $0y$ della vibrazione riflessa, prima con vibrazioni incidenti perpendicolari al piano d'incidenza, poscia con vibrazioni parallele a questo piano. Si avranno allora insieme alle formole (17) e (19) due altre formole contenenti queste differenze di fase, che facilmente si trovano nel modo seguente.

Supponiamo in primo luogo che la vibrazione incidente sia $y_0 = \operatorname{sen} \theta$, cioè sia perpendicolare al piano d'incidenza. Le componenti della vibrazione riflessa saranno date dalle (9), che possono mettersi sotto la forma seguente:

$$X(1+p^2) = kp \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta - (hp - kp \cos \varphi) \cos \theta,$$
$$Y(1+p^2) = -(h + kp^2 \cos \varphi) \operatorname{sen} \theta + kp^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta;$$

od anche:

$$X = A_1 \operatorname{sen} (\theta - a_1), \qquad Y = B_1 \operatorname{sen} (\theta - b_1),$$

ove:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{h - k \cos \varphi}{k \operatorname{sen} \varphi}, \qquad \operatorname{tg} b_1 = \frac{kp^2 \operatorname{sen} \varphi}{h + kp^2 \cos \varphi}.$$

La differenza di fase $\psi_1 = a_1 - b_1$ fra le due componenti sarà data da:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{h^2 - k^2 p^2 - hk(1-p^2) \cos \varphi}{hk(1+p^2) \operatorname{sen} \varphi},$$

od anche:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{-V}{hkp(1+p^2) \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 - p^2 \varrho^2 - \varrho(1-p^2) \cos \varphi}{\varrho(1+p^2) \operatorname{sen} \varphi}. \tag{51}$$

Similmente, sia in secondo luogo, $x_0 = \operatorname{sen} \theta$ la vibrazione incidente. Si avrà per le componenti della vibrazione riflessa (7):

$$X(1+p^2) = (k \cos \varphi + hp^2) \operatorname{sen} \theta - k \operatorname{sen} \varphi \cos \theta,$$
$$Y(1+p^2) = kp \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta - (hp - kp \cos \varphi) \cos \theta,$$

od anche:

$$X = A_2 \operatorname{sen}(\theta - a_2), \qquad Y = B_2 \operatorname{sen}(\theta - b_2),$$

purchè si faccia:

$$\operatorname{tg} a_2 = \frac{k \operatorname{sen} \varphi}{k \cos \varphi + hp^2}, \qquad \operatorname{tg} b_2 = \frac{h - k \cos \varphi}{k \operatorname{sen} \varphi}.$$

La differenza di fase $\psi_2$ fra X ed Y è dunque data da:

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg}(a_2 - b_2) = \frac{k^2 - h^2 p^2 - hk(1 - p^2)\cos \varphi}{hk(1 + p^2) \operatorname{sen} \varphi},$$

ossia:

$$(52) \qquad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{U}{hkp(1 + p^2) \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\varrho^2 - p^2 - \varrho(1 - p^2)\cos \varphi}{\varrho(1 + p^2) \operatorname{sen} \varphi}.$$

Eliminando $\cos \varphi$ fra le (51) e (52) si ha:

$$(53) \qquad \operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{1 - \varrho^2}{\varrho \operatorname{sen} \varphi}.$$

Questa formula terrà luogo della (47) del metodo precedente, e cioè, unita alle (45) e (46) servirà a determinare $p$, $\varrho$ e $\varphi$. Infatti dalle (45) e (53) si ricava:

$$\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{2p}{1 - p^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2},$$

e ponendo:

$$L_1 = \frac{\operatorname{tg} 2\omega_1 - \operatorname{tg} 2\omega_2}{\operatorname{tg} 2\omega_1 \operatorname{tg} 2\omega_2 (\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \psi_2)},$$

si ottiene:

$$p = \sqrt{L_1^2 + 1} - L_1.$$

Trovato $p$, si troveranno $\varrho$ e $\varphi$ come nel metodo precedente.

Le differenze di fase $\psi_1$, $\psi_2$ hanno la seguente rimarchevole relazione culle rotazioni compensatrici $\alpha_0$, $\alpha$:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2} = \frac{-V}{U} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0}.$$

Essa si ricava dalle (51) e (52) e dalle (42). Rammentando quindi ciò che si è detto intorno ai segni di U e V, in virtù delle (51) e (52) si può annunciare che: 1.° la differenza di fase $\psi_1$ fra le componenti X ed Y della vibrazione riflessa, data da una incidente perpendicolare al piano d'incidenza è sempre positiva; 2° la differenza di fase $\psi_2$ fra le componenti X ed Y della vibrazione riflessa data da una incidente che giaccia nel piano d'incidenza, è negativa per le incidenze minori dell'incidenza singolare, nulla per questa particolare incidenza, e positiva per le incidenze maggiori; 3° in valore assoluto è sempre $\psi_2 < \psi_1$.

9. *Incidenza normale.* Il metodo ora spiegato può applicarsi anche al caso dell'incidenza normale. Si ha allora evidentemente $\omega_1 = \omega_2$, $\psi_1 = -\psi_2$, perchè qualunque

piano passante pel raggio incidente può considerarsi come piano d'incidenza. Siccome $p=1$ e $\varrho$ ha un valore $\varrho_0$, si ha dalle (17) e (19):

$$2\omega_1 = 2\omega_2 = \varphi_0 ,$$

e dalla (51):

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{1-\varrho_0^2}{2\varrho_0 \operatorname{sen} \varphi_0} ,$$

le quali due formole serviranno a calcolare $\varrho_0$ e $\varphi_0$.

Però non si possono far misure all'incidenza normale, senza impiegare una lastra di vetro a faccie parallele, che rifletta una volta la luce e che un'altra volta ne sia attraversata, e nella I$^a$ Memoria (pag. 373) feci osservare che sarebbe necessario correggere le misure, in causa dell'azione che la lastra di vetro esercita sulla luce. Questa correzione che si può calcolare colle formole di Fresnel, offre l'opportunità di fornire, non solo la differenza di fase $\varphi_0$ propria dell'incidenza normale, ma anche il rapporto $\varrho_0 = \frac{k_0}{h_0}$, eseguendo a questo scopo due misure di rotazione coll'analizzatore, l'una con vibrazioni incidenti perpendicolari, l'altra con vibrazioni incidenti parallele, al piano d'incidenza sulla lastra di vetro.

Questa lastra può essere disposta in due maniere, secondo che la riflessione della luce su di essa avviene o prima o dopo della riflessione sullo specchio d'acciaio che forma un polo dell'elettrocalamita. Perciò tratteremo due casi distinti.

1° *caso*. Supponiamo che la luce si rifletta prima sul vetro, poi sull'acciaio, come mostra prospetticamente la fig. 8.

Il raggio AB proveniente dal polarizzatore, giunge sul vetro colla incidenza $ABP = i$, che generalmente si fa di circa 45°, si riflette in B, e va a cadere in C normalmente sullo specchio d'acciaio $SS_1$. Riflesso da questo, riprende la via CB, si rifrange in B entrando nel vetro e formando un angolo di rifrazione $DBP_1 = r$, ed esce in DE parallelamente a CB, avviandosi all'analizzatore.

Riferiamo, come sempre, le vibrazioni a due assi ortogonali presi in un piano normale al raggio, e disposti in modo che ricevendo il raggio stesso nell'occhio, quello delle $x$ sia nel piano d'incidenza sul vetro (piano che supponiamo orizzontale), e diretto verso destra, e quello delle $y$ sia diretto dal basso all'alto. Gli assi pel raggio BC, che va a cadere sullo specchio $SS_1$ saranno $O_0x'_0$, $O_0y_0$, pel raggio CB riflesso dallo specchio saranno $O_0x_0$, $O_0y_0$, e finalmente pel raggio DE saranno $Ox$, $Oy$.

Quando lo specchio $SS_1$ non è magnetizzato, le vibrazioni non subiscono rotazione alcuna in causa del vetro, se lungo il raggio AB sono dirette o nel piano d'incidenza o perpendicolarmente a questo piano, e cioè sul raggio DE esse si trovano rispettivamente o dirette secondo $Ox$ o secondo $Oy$. Ma quando $SS_1$ è magnetizzato, sul raggio CB riflesso dallo specchio si hanno vibrazioni elittiche, che nel subire le due rifrazioni in B e D si modificano ulteriormente. Calcoliamo le componenti X, Y secondo $Ox$, $Oy$, delle vibrazioni che si compiono lungo il raggio DE, sia quando le vibrazioni lungo AB sono nel piano d'incidenza, sia quando sono perpendicolari a questo piano.

Supponiamole dapprima nel piano d'incidenza; esse restano in questo piano anche dopo la riflessione sul vetro, cioè sul raggio BC. Sia $\operatorname{sen} \theta$ la vibrazione lungo BC.

Dopo la riflessione sul polo la vibrazione lungo CB avrà le componenti date dalle formole (8) della I$^a$ Memoria, componenti che qui indicheremo con $X_0$, $Y_0$, e cioè:

$$X_0 = \frac{k_0}{2} \operatorname{sen}(\theta - \varphi_0) + \frac{h_0}{2} \operatorname{sen} \theta ,$$

$$Y_0 = \frac{k_0}{2} \cos(\theta - \varphi_0) - \frac{h_0}{2} \cos \theta .$$

Nella rifrazione che ha luogo in B, queste due componenti restano modificate nell'ampiezza, e devono moltiplicarsi rispettivamente per:

$$\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} r \cos r} , \qquad \frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen}(i + r)} ,$$

secondo le formole di Fresnel. Così pure, per la seconda rifrazione che ha luogo in D, devono moltiplicarsi per coefficienti analoghi, e siccome qui l'angolo d'incidenza è $r$ e quello di rifrazione è $i$, i due nuovi coefficienti saranno rispettivamente:

$$\frac{2 \operatorname{sen} i \cos r}{\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} r \cos r} , \qquad \frac{2 \operatorname{sen} i \cos r}{\operatorname{sen}(i + r)} .$$

Per avere dunque le componenti X, Y della vibrazione lungo il raggio DE, dovranno moltiplicarsi $X_0$, $Y_0$ rispettivamente per:

$$\frac{4 \operatorname{sen} i \cos i \operatorname{sen} r \cos r}{(\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} r \cos r)^2} , \qquad \frac{4 \operatorname{sen} i \cos i \operatorname{sen} r \cos r}{\operatorname{sen}^2 (i + r)} ,$$

ossia ponendo:

$$u = \frac{4 \operatorname{sen} i \cos i \operatorname{sen} r \cos r}{\operatorname{sen}^2 (i + r)}$$

ed osservando che:

$$\operatorname{sen} i \cos i + \operatorname{sen} r \cos r = \operatorname{sen}(i + r) \cos(i - r)$$

dovranno moltiplicarsi $X_0$, $Y_0$ per:

$$\frac{u}{\cos^2 (i - r)} , \qquad " .$$

Avremo quindi:

$$X = \frac{u}{\cos^2 (i - r)} X_0 = \frac{u}{\cos^2 (i - r)} \frac{k_0}{2} \operatorname{sen}(\theta - \varphi_0) + \frac{u}{\cos^2 (i - r)} \frac{h_0}{2} \operatorname{sen} \theta$$

$$Y = u Y_0 = u \frac{k_0}{2} \cos(\theta - \varphi_0) - u \frac{h_0}{2} \cos \theta .$$

Ciò fatto, calcoliamo la rotazione dell'analizzatore colla quale si rende minima la luce ch'esso trasmette. Consideriamo perciò che prima della magnetizzazione dello specchio, l'analizzatore posto sul cammino del raggio DE dava l'estinzione, quando la sua sezione principale era diretta secondo $Oy$. Ora invece conviene girarlo da destra a sinistra (se la corrente magnetizzante ha la direzione delle freccie) d'un certo angolo per rendere minima la luce che esso trasmette. Per calcolare quest'angolo prendiamo due nuovi assi $Ox_1$, $Oy_1$, rispettivamente inclinati di $\xi$ sugli assi $Ox$, $Oy$, calcoliamo la componente $Y_1$, e troviamo il valore di $\xi$ che la rende minima.

Si avrà:

$$Y_1 = \cos\xi - X \operatorname{sen}\xi$$

e quindi:

$$Y_1 = \frac{u}{2\cos^2(i-r)} \operatorname{sen}\theta \left\{ k_0 \cos\xi \cos^2(i-r) \operatorname{sen}\varphi_0 - k_0 \operatorname{sen}\xi \cos\varphi_0 - h_0 \operatorname{sen}\xi \right\}$$
$$- \frac{u}{2\cos^2(i-r)} \cos\theta \left\{ h_0 \cos\xi \cos^2(i-r) - k_0 \cos\xi \cos^2(i-r) \cos\varphi_0 - k_0 \operatorname{sen}\xi \operatorname{sen}\varphi_0 \right\}.$$

Questa sarà la vibrazione trasmessa dall'analizzatore, girato che sia dell'angolo $\xi$ verso sinistra.

L'intensità della vibrazione è proporzionale, per la solita regola, alla somma dei quadrati dei coefficienti di $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$; potremo scrivere quindi:

$$I = (h_0^2 + k_0^2 - 2h_0 k_0 \cos\varphi_0) \cos^4(i-r) \cos^2\xi + (h_0^2 + k_0^2 + 2h_0 k_0 \cos\varphi_0) \operatorname{sen}^2\xi$$
$$- 4h_0 k_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \operatorname{sen}\xi \cos\xi \cos^2(i-r).$$

Derivando rispetto a $\xi$ ed eguagliando a zero, si avrà il valore cercato di $\xi$, e cioè

$$\operatorname{tg} 2\xi = \frac{4h_0 k_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \cos^2(i-r)}{(h_0^2 + k_0^2 + 2h_0 k_0 \cos\varphi_0) - (h_0^2 + k_0^2 - 2h_0 k_0 \cos\varphi_0) \cos^4(i-r)}.$$

Poniamo per brevità

$$S = \frac{h_0^2 + k_0^2 - 2h_0 k_0 \cos\varphi_0}{h_0^2 + k_0^2 + 2h_0 k_0 \cos\varphi_0} \tag{54}$$

ed avremo

$$\operatorname{tg} 2\xi = \operatorname{tg}\varphi_0 \frac{(1-S)\cos^2(i-r)}{1 - S\cos^4(i-r)}. \tag{55}$$

Supponiamo invece che la vibrazione lungo A B sia perpendicolare al piano A B C. Sarà pure diretta secondo $O_0 y_0$ la vibrazione che si propaga da B a C.

Sia $\operatorname{sen}\theta$ la vibrazione lungo BC; quella riflessa dallo specchio magnetizzato avrà per componenti $X_0 Y_0$ quelle date dalle formole (10) della I$^a$ Memoria, e cioè

$$X_0 = -\frac{h_0}{2}\cos\theta + \frac{k_0}{2}\cos(\theta - \varphi_0)$$
$$Y_0 = -\frac{h_0}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{k_0}{2}\operatorname{sen}(\theta - \varphi_0).$$

Le componenti X, Y della vibrazione lungo D E si otterranno moltiplicando $X_0 Y_0$ pei coefficienti $\frac{u}{\cos^2(i-r)}$, $u$, e l'analizzatore, che prima della magnetizzazione dello specchio dava l'estinzione posto colla sezione principale lungo $Ox$, dovrà ora essere girato verso sinistra d'un certo angolo per rendere minima la luce trasmessa. Per calcolare questo angolo si prenderanno due nuovi assi $Ox_1$, $Oy_1$ inclinati di $\zeta$ su $Ox$, $Oy$, si scriverà la componente X, che è data da

$$X_1 = X\cos\zeta + Y\operatorname{sen}\zeta$$

e si troverà il valore di $\zeta$ che ne rende minima l'intensità. In una parola, si opererà in tutto come per trovare $\xi$. Così facendo si arriverà facilmente alla formola:

$$\operatorname{tg} 2\zeta = \operatorname{tg}\varphi_0 \frac{(1-S)\cos^2(i-r)}{\cos^4(i-r) - S}. \tag{56}$$

Eseguendo queste due misure di $\xi$ e di $\zeta$, cioè misurando le rotazioni dell'analizzatore capaci di rendere minima la luce, prima con vibrazioni incidenti parallele, poi con vibrazioni perpendicolari al piano d'incidenza, si ha dunque modo di calcolare $\varphi_0$ e $\varrho_0 = \frac{k_0}{h_0}$ per mezzo delle (54), (55), e (56). Infatti eliminando S fra le (55) e (56) si ha

$$\text{(57)} \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\xi \operatorname{tg} 2\zeta}{\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\zeta} \cdot \frac{1 + \cos^4(i-r)}{\cos^2(i-r)},$$

ed eliminando $\varphi_0$:

$$\text{(58)} \qquad S = \frac{\operatorname{tg} 2\zeta \cos^4(i-r) - \operatorname{tg} 2\xi}{\operatorname{tg} 2\zeta - \operatorname{tg} 2\xi \cos^4(i-r)}.$$

Ecco dunque che la formola (57) dà il valore di $\varphi_0$, la (58) fa conoscere la quantità ausiliaria S, e infine la (54), nella quale si pongano i valori trovati di S e $\varphi$, serve a determinare il rapporto $\varrho_0 = \frac{k_0}{h_0}$.

Se interessa avere solo una determinazione approssimata di $\varphi_0$, siccome $k_0$ ed $h_0$ sono poco differenti, e $\varphi_0$ è assai piccolo, S sarà pure piccolissimo. Si avrà dunque approssimativamente:

$$\text{(59)} \qquad \operatorname{tg} 2\xi = \operatorname{tg}\varphi_0 \cos^2(i-r), \qquad \operatorname{tg} 2\zeta = \operatorname{tg}\varphi_0 \frac{1}{\cos^2(i-r)},$$

e quindi

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{\operatorname{tg} 2\xi \operatorname{tg} 2\zeta} \ (1).$$

Con questo grado di approssimazione è risparmiata la misura dell'incidenza $i$ della luce sul vetro, e dell'indice di rifrazione di questo, e siccome $2\xi$, $2\zeta$ sono precisamente le doppie rotazioni quali ottengonsi colla inversione della corrente, così si vede che la tangente di $\varphi_0$ è sensibilmente eguale alla media geometrica delle tangenti di queste due doppie rotazioni.

In generale, come si è avvertito, $\varphi_0$, $\xi$, $\zeta$ sono sempre assai piccoli, e si potrà alle tangenti sostituire gli archi, e dire che la differenza di fase $\varphi_0$ è la media geometrica delle due doppie rotazioni misurate $2\xi$ e $2\zeta$.

2° *caso.* Supponiamo ora il vetro a faccie parallele disposto in modo, che la luce lo attraversi prima d'arrivare allo specchio d'acciaio, e vi si rifletta dopo. Il raggio AB (fig. 9) proveniente dal polarizzatore, cade in B sul vetro sotto un angolo d'incidenza $i$, si rifrange in BC formando un angolo di rifrazione $r$, poi esce in CD parallelamente ad AB, cioè formando un angolo di rifrazione DCP $= i$. In D incontra normalmente lo specchio $SS_1$, retrocede in DC e si riflette in CE sotto l'angolo d'incidenza $i$ avviandosi poi all'analizzatore.

Adottando le solite convenzioni, gli assi di riferimento saranno disposti come nella fig. 9, e cioè saranno $O_0x'_0$ ed $O_0y_0$ pel raggio CD, $O_0x_0$, $O_0y_0$ pel raggio DC, ed $Ox$, $Oy$ pel raggio CE.

(1) Si può dimostrare che queste ultime formole rimangono valide anche se il polarizzatore non dà esattamente vibrazioni o nel piano d'incidenza o perpendicolari a questo piano, purchè l'errore commesso nel mettere a posto la prima volta il polarizzatore sia dell'ordine di grandezza di $\varphi_0$, e purchè dalla prima alla seconda misura esso venga spostato esattamente di 90°.

Rappresentiamo con $\operatorname{sen}\theta$ una vibrazione diretta nel piano DCE e che si propaga da C in D. Dopo la riflessione sullo specchio magnetizzato, la vibrazione avrà per componenti $X_0$, $Y_0$, le espressioni (8) della I$^a$ Memoria, che più sopra abbiamo trascritte, e per avere le componenti X, Y della vibrazione lungo CE converrà moltiplicare $X_0$, $Y_0$, rispettivamente per $\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}$, $-\frac{\operatorname{sen}(i-r)}{\operatorname{sen}(i+r)}$ [1], od anche, ponendo

$$v = \frac{\operatorname{sen}(i-r)}{\operatorname{sen}(i+r)},$$

per

$$v\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} \text{ e } -v.$$

Si avrà dunque

$$X = v\frac{k_0}{2}\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\operatorname{sen}(\theta-\varphi_0) + v\frac{h_0}{2}\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\operatorname{sen}\theta$$

$$Y = -v\frac{k_0}{2}\cos(\theta-\varphi_0) + v\frac{h_0}{2}\cos\theta.$$

Prima che lo specchio fosse magnetizzato l'analizzatore collocato colla sezione principale in $Oy$, dava l'estinzione. Ora invece conviene girarlo d'un certo angolo per render minima la luce, angolo che si tratta di determinare. Perciò prendiamo due nuovi assi $Ox_1$, $Oy_1$, inclinati di $\xi_1$ su $Ox$, $Oy$, calcoliamo la componente $Y_1$, e determiniamo $\xi_1$ in modo da rendere minima l'intensità.

Sarà

$$Y_1 = Y\cos\xi_1 - X\operatorname{sen}\xi_1$$

ossia

$$Y_1 = -\frac{v}{2\cos(i-r)}\operatorname{sen}\theta\left\{k_0\cos\xi_1\cos(i-r)\operatorname{sen}\varphi_0 + k_0\operatorname{sen}\xi_1\cos(i+r)\cos\varphi_0 + h_0\operatorname{sen}\xi_1\cos(i+r)\right\}$$
$$+\frac{v}{2\cos(i-r)}\cos\theta\left\{h_0\cos\xi_1\cos(i-r) - k_0\cos\xi_1\cos(i-r)\cos\varphi_0 + k_0\operatorname{sen}\xi_1\cos(i+r)\operatorname{sen}\varphi_0\right\}.$$

L'intensità di questa vibrazione sarà proporzionale ad

$$I = (h_0^2 + k_0^2 - 2h_0k_0\cos\varphi_0)\cos^2\xi_1\cos^2(i-r) + (h_0^2 + k_0^2 + 2h_0k_0\cos\varphi_0)\operatorname{sen}^2\xi_1\cos^2(i+r)$$
$$+ 4h_0k_0\operatorname{sen}\xi_1\cos\xi_1\cos(i-r)\cos(i+r)\operatorname{sen}\varphi_0.$$

Derivando rispetto a $\xi_1$ ed eguagliando a zero la derivata, si ha

$$\operatorname{tg}2\xi_1 = -\frac{4h_0k_0\cos(i-r)\cos(i+r)\operatorname{sen}\varphi_0}{(h_0^2+k_0^2+2h_0k_0\cos\varphi_0)\cos^2(i+r) - (h_0^2+k_0^2-2h_0k_0\cos\varphi_0)\cos^2(i-r)}$$

od anche per la (54):

$$\operatorname{tg}2\xi_1 = -\operatorname{tg}\tau_0\frac{(1-S)\cos(i-r)\cos(i+r)}{\cos^2(i+r) - S\cos^2(i-r)}. \tag{60}$$

Analogamente, se la vibrazione che si propaga lungo AB è perpendicolare al

[1] Per la disposizione data agli assi, deve prendersi negativo il coefficiente di X; ma siccome nella riflessione su ogni corpo più rifrangente del mezzo di partenza si ha un ritardo di mezz'onda, così devesi prenderlo positivo, e negativo quello di Y.

piano d'incidenza, essa si trasformerà sullo specchio nelle componenti (10) della I$^a$ Memoria, e queste componenti prenderanno i coefficienti $\frac{v\cos(i+r)}{\cos(i-r)}$ e $-v$ riflettendosi sul vetro in C. Calcolando anche quì la rotazione $\zeta_1$ dell'analizzatore necessaria a rendere minima la luce, si trova facilmente

$$(61) \qquad \operatorname{tg} 2\zeta_1 = -\operatorname{tg}\varphi_0 \frac{(1-S)\cos(i-r)\cos(i+r)}{\cos^2(i-r) - S\cos^2(i+r)}.$$

Eliminando ora successivamente S e $\varphi_0$ fra le ultime due equazioni si trova

$$(62) \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\operatorname{tg} 2\xi_1 \operatorname{tg} 2\zeta_1}{\operatorname{tg} 2\xi_1 + \operatorname{tg} 2\zeta_1} \cdot \frac{\cos^2(i-r) + \cos^2(i+r)}{\cos(i-r)\cos(i+r)}$$

$$(63) \qquad S = \frac{\operatorname{tg} 2\zeta_1 \cos^2(i-r) - \operatorname{tg} 2\xi_1 \cos^2(i+r)}{\operatorname{tg} 2\zeta_1 \cos^2(i+r) - \operatorname{tg} 2\xi_1 \cos^2(i-r)}.$$

Fatte le due misure $\xi_1$, $\zeta_1$, colla (62) si calcolerà $\varphi_0$, poi colla (63) S, e quindi $\varrho_0 = \frac{k_0}{h_0}$ colla (54).

Le equazioni (60) e (61) mostrano che le rotazioni dell'analizzatore devono farsi in senso destrogiro, quando $i$ è minore dell'angolo di polarizzazione sul vetro, e da destra verso sinistra quando è maggiore. Infatti nel primo caso $\cos(i+r)$ è positivo e nel secondo negativo. Ma il valore di $\operatorname{tg}\varphi$ è sempre positivo, giacchè $\operatorname{tg} 2\xi_1 + \operatorname{tg} 2\zeta_1$ e $\cos(i+r)$ sono sempre di segni contrari.

Anche nel caso attuale, considerando che $k_0$ poco diversifica da $h_0$ e che $\varphi_0$ è sempre piccolo, si può scrivere approssimativamente:

$$(64) \qquad \operatorname{tg} 2\xi_1 = -\operatorname{tg}\varphi_0 \frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)}, \qquad \operatorname{tg} 2\zeta_1 = -\operatorname{tg}\varphi_0 \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)},$$

d'onde

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{\operatorname{tg} 2\xi_1 \operatorname{tg} 2\zeta_1}, \quad \text{o semplicemente} \quad \varphi_0 = \sqrt{2\xi_1\, 2\zeta_1}.$$

Cioè quì pure $\varphi_0$ è la media geometrica delle due doppie rotazioni misurate invertendo la corrente, almeno finchè esse sono abbastanza piccole.

### 10. *Confronto fra le due disposizioni sperimentali che possono adottarsi per l'incidenza normale.*

Le formole stabilite nel precedente articolo ci offrono l'opportunità di un confronto fra le due maniere di disporre la lastra di vetro a faccie parallele, rappresentate nelle figure 8 e 9.

Adottando la prima disposizione, come si è fatto finora dagli sperimentatori che si sono occupati del fenomeno di Kerr, le doppie rotazioni $2\xi$, $2\zeta$ sono sempre dell'ordine di grandezza di $\varphi_0$.

Prendiamo difatti le formole semplificate (59). L'angolo $i-r$ varia colle incidenze da zero sino ad un massimo che avrebbe luogo per $i = 90^0$, e che è complemento

dell'angolo limite del vetro. Dunque $\cos(i-r)$ varia da 1 ad $\frac{1}{n}$, essendo $n$ l'indice di rifrazione, e $\cos^2(i-r)$ varia da 1 ad $\frac{1}{n^2}$. Prendendo $n=1{,}5=\frac{3}{2}$, si vede che $\cos^2(i-r)$ varia da 1 a $\frac{4}{9}$ e quindi $\frac{1}{\cos^2(i-r)}$ da 1 a $\frac{9}{4}$.

Mentre dunque le formole (59) mostrano che la rotazione $2\xi$ (relativa a vibrazioni giacenti nel piano d'incidenza) è minore di $\varphi_0$, e che $2\zeta$ è maggiore, esse indicano che tutt'al più $\operatorname{tg} 2\xi$ può scendere sino ad essere i $\frac{4}{9}$ di $\operatorname{tg}\varphi_0$, e $\operatorname{tg} 2\zeta$ salire tutt'al più fino ad essere i $\frac{9}{4}$ di $\operatorname{tg}\varphi_0$.

In generale $2\xi$ e $2\zeta$ poco differiscono da $\varphi_0$, cosicchè per esempio supposto $i=45°$, si ha $\operatorname{tg} 2\xi = 0{,}916 \operatorname{tg}\varphi_0$, $\operatorname{tg} 2\zeta = 1{,}92 \operatorname{tg}\varphi_0$. La disposizione della fig. 8, specialmente rendendo assai acuto l'angolo $i$, modifica ben di poco le rotazioni che si misurerebbero se fosse possibile far a meno della lastra di vetro.

Le (64) relative alla disposizione della fig. 9, mostrano che è sempre $\operatorname{tg} 2\xi$, maggiore numericamente di $\operatorname{tg}\varphi_0$ e $\operatorname{tg} 2\zeta$, minore, cioè in tal caso è colle vibrazioni giacenti nel piano d'incidenza che la rotazione è amplificata. Ma il rapporto fra $\operatorname{tg} 2\xi$, e $\operatorname{tg}\varphi_0$, che è $-\frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)}$ cresce rapidamente in valore assoluto al crescere dell'incidenza $i$. Se nelle (60) e (61) facciamo $i+r=90°$, si ottiene $\operatorname{tg} 2\xi_1 = 0$, $\operatorname{tg} 2\zeta_1 = 0$. I veri valori di $\xi_1$ e $\zeta_1$ in questo caso sono 90° e 0°, giacchè infatti quando l'angolo $i$ è quello di polarizzazione, il vetro non riflette che vibrazioni perpendicolari al piano d'incidenza.

La disposizione sperimentale della fig. 9 fornisce dunque misure assai diverse da quelle che si otterrebbero se si potesse operare senza del vetro, e cioè la rotazione è ridotta assai nel caso in cui le vibrazioni incidenti sieno perpendicolari al piano d'incidenza, ed amplificata assai se sono parallele a quel piano. Colle formole date si può però sempre avere il valore esatto di $\varphi_0$.

Si potrebbe forse ricorrere alla disposizione della fig. 9, facendo $i$ poco diverso dall'angolo di polarizzazione, e adoperando una forte luce polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza sul vetro, per mettere in evidenza il fenomeno di Kerr in corpi che lo producano solo in grado assai debole, o in generale si potrebbe forse ricorrere alla riflessione sopra una lastra di vetro, per mettere in evidenza una piccolissima rotazione elettromagnetica delle vibrazioni. Misurando con esattezza l'angolo $i$ si potrebbe sempre calcolare il valore esatto della piccola rotazione.

Ma all'infuori di ciò è preferibile per lo studio del fenomeno di Kerr all'incidenza normale la disposizione della fig. 8, specialmente dando ad $i$ un piccolo valore. Anzi se $i$ è piccolissimo, ciascuna delle due doppie rotazioni $2\xi$ e $2\zeta$, può ritenersi eguale a $\varphi_0$, senz'altra correzione.

## Capitolo IV.

## Teoria delle riflessioni multiple su poli opposti e paralleli.

### 11. *Formole relative alle riflessioni multiple.*

Per completare la nostra teoria restano a stabilirsi le formole relative ad un raggio polarizzato che si rifletta ripetutamente fra due specchi d'acciaio paralleli, i quali costituiscano i poli opposti d'una elettrocalamita, come accade colla disposizione sperimentale descritta nell'articolo 14 della I$^a$ Memoria.

Come al solito, le componenti della vibrazione incidente e di quella riflessa, dopo ogni riflessione, si prenderanno secondo due assi tracciati in un piano perpendicolare al raggio, diretti in maniera che ricevendo il raggio che si considera nell'occhio, l'asse delle $x$ sia nel piano d'incidenza e diretto verso destra, e l'asse delle $y$ sia diretto dal basso all'alto, appunto come indica la fig. 10 pel caso di due riflessioni. In questa stessa figura le freccie indicano la direzione della corrente magnetizzante, che è la solita per lo specchio $S_1$, AB è il raggio incidente, BC il raggio dopo una prima riflessione, CD dopo due.

Le componenti della vibrazione lungo il raggio BC sono date o dalle formole (7), o dalle (9), o dalle (11), secondo che la vibrazione incidente $\operatorname{sen}\theta$ è diretta o secondo $O_0x_0$, o secondo $O_0y_0$, o secondo una direzione intermedia. Si tratta dunque di trovare le componenti secondo $O_2x_2$, $O_2y_2$ della vibrazione che si propaga lungo CD, ed a questo intento è necessario generalizzare le formole (7) e (9).

Le formole (7) sono relative ad una vibrazione incidente $x_0 = \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T} = \operatorname{sen}\theta$. Se invece la vibrazione incidente è

$$x_0 = A \operatorname{sen}(\theta - \alpha),$$

operando in modo simile a quello seguìto nella I$^a$ Memoria per trovare le formole (7), si trovano le seguenti espressioni per le componenti X, Y della vibrazione riflessa:

$$\begin{aligned} X(1+p^2) &= Ak \operatorname{sen}(\theta - \alpha - \varphi) + Ahp^2 \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \\ Y(1+p^2) &= Akp \cos(\theta - \alpha - \varphi) - Ahp \cos(\theta - \alpha). \end{aligned} \tag{65}$$

Se poi la vibrazione incidente è

$$x_0 = A \cos(\theta - \alpha),$$

basta cangiare $\alpha$ in $\alpha - \frac{\pi}{2}$ nelle precedenti formole, e si trova:

$$\begin{aligned} X(1+p^2) &= Ak \cos(\theta - \alpha - \varphi) + Ahp^2 \cos(\theta - \alpha) \\ Y(1+p^2) &= -Akp \operatorname{sen}(\theta - \alpha - \varphi) + Ahp \operatorname{sen}(\theta - \alpha). \end{aligned} \tag{66}$$

Analogamente, per una vibrazione incidente

$$y_0 = B \operatorname{sen}(\theta - \beta),$$

le componenti della vibrazione riflessa sono:

$$\begin{aligned} X(1+p^2) &= -Bhp\cos(\theta-\beta)+Bkp\cos(\theta-\beta-\varphi) \\ Y(1+p^2) &= -Bh\ \operatorname{sen}(\theta-\beta)-Bkp^2\operatorname{sen}(\theta-\beta-\varphi), \end{aligned} \tag{67}$$

e se la vibrazione incidente è

$$y_0 = B\cos(\theta-\beta)$$

si trova

$$\begin{aligned} X(1+p^2) &= Bhp\operatorname{sen}(\theta-\beta)-Bkp\operatorname{sen}(\theta-\beta-\varphi) \\ Y(1+p^2) &= -Bh\cos(\theta-\beta)-Bkp^2\cos(\theta-\beta-\varphi). \end{aligned} \tag{68}$$

Ciò premesso, supponiamo che la vibrazione lungo il raggio incidente AB sia espressa da

$$x_0 = \operatorname{sen}\theta.$$

Le componenti $X_1$ $Y_1$ della vibrazione lungo BC, saranno date dalle (7), e cioè si avrà

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{k}{1+p^2}\operatorname{sen}(\theta-\varphi)+\frac{hp^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta \\ Y_1 &= \frac{kp}{1+p^2}\cos(\theta-\varphi)-\frac{hp}{1+p^2}\cos\theta. \end{aligned}$$

Queste due componenti le potremo considerare come quattro vibrazioni incidenti in C sullo specchio $S_2$, e cioè due vibrazioni dirette secondo l'asse $O_1x_1$ e rappresentate dai due termini del valore di $X_1$, e due dirette secondo $O_1y_1$, e rappresentate dai due termini di $Y_1$. A ciascuna di queste vibrazioni si potranno applicare le formole precedenti, e precisamente 1° alla prima di quelle che compongono $X_1$ le (65) col porre $\frac{k}{1+p^2}$ in luogo di A e $\varphi$ in luogo di $\alpha$; 2° alla seconda di quelle che sono dirette secondo $O_1x_1$ le stesse (65), col porvi $\frac{hp^2}{1+p^2}$ in luogo di A, e zero in luogo di $\alpha$; 3° alla prima di quelle dirette secondo $O_1y_1$ le (68), ponendovi $\frac{kp}{1+p^2}$ in luogo di B e $\varphi$ in luogo di $\beta$; 4° alla seconda di quelle dirette secondo $O_1y_1$ le stesse (68), ponendo $\frac{-hp}{1+p^2}$ in luogo di B, e zero in luogo di $\beta$. Converrà poi cangiare il segno di $p$ tanto nelle (65) che nelle (68) prima di adoperarle, perchè il polo $S_2$ è di nome contrario a quello di $S_1$.

Si avranno così otto termini nel valore di $X_2$ ed otto in quello di $Y_2$, ma tanto in $X_2$ che in $Y_2$ quattro si elidono ed i quattro rimanenti si riducono a due. Il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{k^2}{1+p^2}\operatorname{sen}(\theta-2\varphi)+\frac{h^2p^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta \\ Y_2 &= -\frac{k^2p}{1+p^2}\cos(\theta-2\varphi)+\frac{h^2p}{1+p^2}\cos\theta. \end{aligned}$$

Analogamente, se il raggio CD incontrasse di nuovo lo specchio $S_1$ sufficientemente esteso, e vi subisse una terza riflessione, si otterrebbero pel raggio riflesso le formole:

$$X_3 = \frac{k^3}{1+p^2}\operatorname{sen}(\theta - 3\varphi) + \frac{h^3 p^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta$$
$$Y_3 = \frac{k^3 p}{1+p^2}\cos(\theta - 3\varphi) - \frac{h^3 p}{1+p^2}\cos\theta .$$

e così di seguito.

È chiara la legge di formazione successiva dei valori di $X_1$, $X_2$, $X_3$.... e di $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$.... Cosicchè dopo $m$ riflessioni, le componenti della vibrazione riflessa proveniente da una incidente $x_0 = \operatorname{sen}\theta$ diretta nel piano d'incidenza, sono:

$$(69)\quad \begin{cases} X_m = \dfrac{k^m}{1+p^2}\operatorname{sen}(\theta - m\varphi) + \dfrac{h^m p^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta \\ Y_m = \left\{ -\dfrac{k^m p}{1+p^2}\cos(\theta - m\varphi) + \dfrac{h^m p}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta \right\}(-1)^m . \end{cases}$$

Operando in modo del tutto simile colle (66) e (67) pel caso d'una vibrazione incidente perpendicolare al piano d'incidenza, e rappresentata da $y_0 = \operatorname{sen}\theta$, si trova per le componenti della vibrazione dopo $m$ riflessioni:

$$(70)\quad \begin{cases} X_m = -\dfrac{h^m p}{1+p^2}\cos\theta + \dfrac{k^m p}{1+p^2}\cos(\theta - m\varphi) \\ Y_m = \left\{ \dfrac{h^m}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{k^m p}{1+p^2}\operatorname{sen}(\theta - m\varphi) \right\}(-1)^m . \end{cases}$$

Così pure per una vibrazione incidente $\operatorname{sen}\theta$ inclinata su $O_0 x_0$ dell'angolo $\omega$ si ha:

$$(71)\quad \begin{cases} X_m = \dfrac{k^m}{1+p^2}\cos\omega\operatorname{sen}(\theta - m\varphi) + \dfrac{h^m p^2}{1+p^2}\cos\omega\operatorname{sen}\theta - \dfrac{h^m p}{1+p^2}\operatorname{sen}\omega\cos\theta \\ \qquad\qquad + \dfrac{k^m p}{1+p^2}\operatorname{sen}\omega\cos(\theta - m\varphi) \\ Y_m = \left\{ -\dfrac{k^m p}{1+p^2}\cos\omega\cos(\theta - m\varphi) + \dfrac{h^m p}{1+p^2}\cos\omega\cos\theta + \dfrac{h^m}{1+p^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{k^m p^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(\theta - m\varphi) \right\}(-1)^m . \end{cases}$$

Le formole (69), (70) e 71 sostituiscono le (7), (9) e (11) quando hanno luogo $m$ riflessioni su poli opposti, in luogo d'una riflessione sola.

## 12. *Proprietà dell'ultimo raggio riflesso.*

Stabilite così le formole generali, esaminiamo rapidamente le proprietà principali dell'ultimo raggio riflesso.

È facile prevedere che le stesse proprietà che abbiamo dimostrate per una sola riflessione hanno luogo anche per $m$ riflessioni, giacchè si passa dal primo al secondo caso col cambiare $h$, $k$ e $\varphi$ in $h^m$, $k^m$, $m\varphi$, e col cambiare di segno alla componente normale al piano d'incidenza quando $m$ è pari. Consideriamo dapprima le riflessioni all'incidenza normale.

Se nelle (69) poniamo $p=1$, $\varphi_0$ in luogo di $\varphi$, ed $h_0$, $k_0$ in luogo di $h$, $k$, otterremo le formole relative alla riflessione normale, e cioè:

$$X_{m_0} = \frac{k_0^m}{2} \operatorname{sen}(\theta - m\varphi_0) + \frac{h_0^m}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$Y_{m_0} = \left\{ -\frac{k_0^m}{2} \cos(\theta - m\varphi_0) + \frac{h_0^m}{2} \cos\theta \right\} (-1)^m .$$

Per vedere come è situata la vibrazione elittica rappresentata da queste componenti, supponiamo dapprima $m$ dispari, e, precisamente come si fece nella I$^a$ Memoria per una sola riflessione, troviamo le componenti secondo nuovi assi inclinati sui primitivi d'un angolo $\frac{m\varphi_0}{2}$. Sieno (fig. 11) $O_m x_m$, $O_m y_m$ gli assi primitivi in un piano perpendicolare al raggio riflesso, visto questo piano in modo da ricevere il raggio nell'occhio, secondo le solite convenzioni, e preso per piano di figura. Sieno $O_m x'$, $O_m y'$ i nuovi assi. Le componenti $X'$, $Y'$ secondo i nuovi assi saranno

$$X' = X_{m_0} \cos\frac{m\varphi_0}{2} + Y_{m_0} \operatorname{sen}\frac{m\varphi_0}{2}$$

$$Y' = Y_{m_0} \cos\frac{m\varphi_0}{2} - X_{m_0} \operatorname{sen}\frac{m\varphi_0}{2}.$$

Mettendo per $X_{m_0}$, $Y_{m_0}$ i valori precedenti, a riduzioni fatte si trova:

$$X' = \frac{h_0^m + k_0^m}{2} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{m\varphi_0}{2}\right)$$

$$Y' = -\frac{h_0^m - k_0^m}{2} \cos\left(\theta - \frac{m\varphi_0}{2}\right).$$

Queste sono evidentemente le componenti d'una vibrazione elittica prese secondo gli assi dell'elisse.

Se $m$ è pari, bisogna prendere i nuovi assi cangiando segno all'angolo $\frac{m\varphi_0}{2}$, il che riesce ben naturale se si osserva la fig. 10. Allora si trova

$$X' = \frac{h_0^m + k_0^m}{2} \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{m\varphi_0}{2}\right)$$

$$Y' = \frac{h_0^m - k_0^m}{2} \cos\left(\theta - \frac{m\varphi_0}{2}\right).$$

che non differiscono dalle precedenti formole che nel segno di $Y'$. In entrambi i casi dunque: dopo $m$ riflessioni all'incidenza normale su poli opposti, la vibrazione riflessa è elittica, ed il suo asse maggiore fa un angolo $\frac{m\varphi_0}{2}$ colla direzione della vibrazione incidente, in senso contrario della direzione della corrente magnetizzante.

Si vede dunque che la rotazione dell'analizzatore fatta per compensare l'azione magnetica è $m\varphi_0$ invertendo la corrente, e cresce in proporzione del numero delle riflessioni.

È facile vedere inoltre che il senso in cui l'elisse è percorsa, è inverso al senso delle correnti di Ampère del polo su cui è avvenuta

l'ultima riflessione, ossia è inverso al senso della corrente magnetizzante considerato nello spazio.

Il rapporto degli assi dell'elisse è in valore assoluto

$$\frac{h_0^m - k_0^m}{h_0^m + k_0^m}$$

e ponendo $\frac{k_0}{h^0} = \varrho_0$ :

$$\frac{1 - \varrho_0^m}{1 + \varrho_0^m}.$$

Questo rapporto cresce con $m$ giacchè essendo $\varrho_0 < 1$, $\varrho_0^m$ diminuisce al crescere di $m$. Dunque aumentando il numero delle riflessioni, la vibrazione elittica riflessa si apre di più in più, e tende a divenire circolare. Ma perchè divenisse effettivamente tale occorrerebbe un numero infinito di riflessioni.

È del pari facile estendere al caso delle riflessioni multiple quanto si espose nell'art. 30 della I$^a$ Memoria, circa la riflessione di un raggio elittico. In particolare, se il raggio incidente è elittico, dopo $m$ riflessioni all'incidenza normale il raggio riflesso è pure generalmente elittico, e l'asse maggiore della elissi riflessa fa un angolo $\frac{m\varphi_0}{2}$ colla direzione dell'asse maggiore della elisse incidente, preso quest'angolo in senso contrario della corrente magnetizzante. Così pure: se il raggio elittico incidente è di egual senso della corrente magnetizzante [1], ed il rapporto degli assi è $\frac{1-\varrho_0^m}{1+\varrho_0^m}$, dopo $m$ riflessioni il raggio riflesso è a vibrazioni rettilinee.

Passiamo ora alle riflessioni multiple ad incidenza obliqua, che sole possono facilmente realizzarsi.

La legge generale di reciprocità dimostrata nell'art. 4 della presente Memoria, sussiste, salvo un cambiamento di segno, per un numero qualunque $m$ di riflessioni. La dimostrazione si fa esattamente nella stessa maniera, coll'avvertenza che se $m$ è pari, l'angolo $\gamma$ della fig. 2 va preso alla destra dell'asse $Oy$, e l'angolo $\omega$ della fig. 3 va preso al disotto di $Ox$. In questo caso di $m$ pari si trovano, coi due spostamenti reciproci dei nicol, non due identiche vibrazioni, ma due eguali e di segno contrario. L'enunciato che esprime la legge di reciprocità per $m$ riflessioni è quindi il seguente.

Se dopo aver disposto il polarizzatore in modo da fornire vibrazioni nel piano d'incidenza, e l'analizzatore nella posizione che prima del passaggio della corrente dà l'estinzione, si fa girare il polarizzatore d'un angolo $\omega$ e l'analizzatore d'un angolo $\gamma$, si ha l'identico effetto (salvo cambiamento di segno della vibrazione emergente quando $m$ è pari) come a far girare il polarizzatore

[1] Egual senso nello spazio, cosicchè se la corrente è destrogira come nel primo polo S della fig. 10, il raggio incidente, visto in modo da riceverlo nell'occhio, deve essere levogiro.

dell'angolo $\pm\gamma$ e l'analizzatore dell'angolo $\pm\omega$, partendo da posizioni dei due nicol ortogonali a quelle di prima. Il segno + va preso per $m$ dispari, ed il segno — quando $m$ è pari.

Se dopo aver orientato il polarizzatore in modo da dare vibrazioni dirette in uno dei due azimut principali e l'analizzatore all'estinzione, si lancia la corrente, si potrà compensare parzialmente l'azione del magnetismo con una rotazione del polarizzatore o con una dell'analizzatore, e cioè girando l'uno o l'altro dei due nicol, si potrà diminuire il più possibile la luce apparsa nell'atto della magnetizzazione.

Chiamando anche quì $\omega_1$ la rotazione dell'analizzatore, ed $\omega_2$ quella del polarizzatore, quando le vibrazioni incidenti sono nel piano d'incidenza (rotazioni che, per la legge di reciprocità, sono eguali rispettivamente in valore assoluto a quelle del polarizzatore o dell'analizzatore partendo da vibrazioni perpendicolari a quel piano), si hanno le formole seguenti, analoghe alle (17) e (19) e che si trovano nella stessa maniera.

$$(72)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\omega_1 = \dfrac{2(-1)^{m+1} h^m k^m p (1+p^2) \operatorname{sen} m\varphi}{(k^{2m} - h^{2m} p^2)(1-p^2) + 4h^m k^m p^2 \cos m\varphi} \\ \operatorname{tg} 2\omega_2 = \dfrac{2h^m k^m p (1+p^2) \operatorname{sen} m\varphi}{(h^{2m} - k^{2m} p^2)(1-p^2) + 4h^m k^m p^2 \cos m\varphi} \end{cases} \text{ (1).}$$

Se il numero delle siflessioni $m$ è non troppo grande, nè tanto grande l'incidenza, in modo che $m\varphi$ sia minore di $\frac{\pi}{2}$, le due rotazioni $\omega_1$ ed $\omega_2$ non si annullano nè cambiano di segno. In ogni caso $\omega_2 < \omega_1$ in valore assoluto, e l'intensità minima ottenuta con $\omega_2$ è maggiore di quella ottenuta con $\omega_1$, precisamente come nel caso di una sola riflessione.

Passiamo ora alle formole relative al caso delle vibrazioni riflesse rettilinee. Chiamiamo ancora $\alpha_0$, $\beta_0$ gli angoli che fanno rispettivamente coi due assi quelle vibrazioni incidenti che producono vibrazioni riflesse rettilinee, ed $\alpha$, $\beta$, gli angoli di queste coi rispettivi assi. Chiamiamo pure $T_m$, $U_m$, $V_m$, ciò che divengono T, U, V, delle (39) quando si cambia $h$ in $h^m$, $k$ in $k^m$ e $\varphi$ in $m\varphi$. Seguendo la stessa via colla quale si è giunti alle formole (42) e (43) si trovano le analoghe formole (astrazione fatta dai segni):

$$(73)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{T_m - \sqrt{T^2_m - 4U_m V_m}}{2V_m} \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{-T_m + \sqrt{T^2_m - 4U_m V_m}}{2U_m} \end{cases}.$$

(1) Se partendo da vibrazioni perpendicolari al piano d'incidenza, diciamo $\omega'_1$ la rotazione del polarizzatore ed $\omega'_2$ quella dell'analizzatore, capaci separatamente di rendere minima la luce che appare al chiudersi della corrente, si avrà:

$$\operatorname{tg} 2\omega'_1 = \frac{2h^m k^m p (1+p^2) \operatorname{sen} m\varphi}{(k^{2m} - h^{2m} p^2)(1-p^2) + 4h^m k^m p^2 \cos m\varphi}, \quad \operatorname{tg} 2\omega'_2 = \frac{2(-1)^{m+1} h^m k^m p (1+p^2) \operatorname{sen} m\varphi}{(h^{2m} - k^{2m} p^2)(1-p^2) + 4h^m k^m p^2 \cos m\varphi}.$$

Se $m$ è pari si ha:

$$\omega'_1 = -\omega_1, \quad \omega'_2 = -\omega_2, \quad \text{e se } m \text{ è dispari,} \quad \omega'_1 = \omega_1, \quad \omega'_2 = \omega_2.$$

Operando sulle formole (72) e (73) come si è fatto nell'art. 7 sulle analoghe formole relative al caso d una sola riflessione, si giunge ad esprimere le tre caratteristiche $p$, $\varphi$ e $\varrho = \frac{k}{h}$ in funzione di $\alpha_0$, $\alpha$, $\omega_1$, $\omega_2$; si ha così un mezzo per determinare $p$, $\varphi$ e $\varrho$ con semplici misure di rotazioni. Però a seconda del numero $m$ di riflessioni e del valore dell'angolo d'incidenza, il radicale, delle (73) sarà o no reale, e quindi saranno o no possibili delle vibrazioni riflesse rettilinee.

Il metodo dell'art. 8 resta valido anche nel caso attuale.

Se per dati valori di $m$ e dell'incidenza, si ha $U_m = 0$, allora esisterà un'incidenza *singolare*, analoga per le proprietà a quella che si è indicata collo stesso nome nel caso di una sola riflessione.

Da quanto si è esposto in questo articolo risulta dunque, che si potrà sperimentare con riflessioni multiple sul fenomeno di Kerr, e le misure fatte, mentre risulteranno in generale più facili perchè amplificate, potranno in molti casi essere considerate e trattate come quelle ottenute dopo una riflessione sola. Ciò permetterà forse in avvenire lo studio completo del fenomeno di Kerr in corpi che lo producano solo con debolissima intensità.

## Capitolo V.

## Applicazione della teoria al caso di un corpo trasparente.

### 13. *Differenze fra la riflessione ordinaria sui corpi trasparenti e la riflessione sui metalli.*

Le due vibrazioni componenti l'una parallela, l'altra perpendicolare al piano d'incidenza, nelle quali la vibrazione incidente che cade obbliquamente sul corpo trasparente può decomporsi, diminuiscono d'ampiezza in grado diverso come nella riflessione sui metalli; ma i corpi trasparenti diversificano dai metalli in questo, che la differenza di fase fra le due componenti, anzichè variare lentamente da zero a $\pi$ quando l'incidenza varia da $0^0$ a $90^0$, conserva un valore sensibilmente nullo dalla incidenza normale sin quasi alla incidenza di polarizzazione, varia rapidamente da zero a $\pi$ in prossimità di questa incidenza, prendendo il valore $\frac{\pi}{2}$ all'incidenza di polarizzazione, e poi conserva sensibilmente il valore $\pi$ fino all'incidenza di $90^0$.

Oltre a ciò, la diminuzione di ampiezza della componente diretta nel piano d'incidenza , è assai più forte pei corpi trasparenti, pei quali, secondo la teoria di Fresnel la componente stessa si annulla all'incidenza di polarizzazione, che pei metalli. I corpi trasparenti si comportano dunque come i metalli per incidenze vicinissime a quelle di polarizzazione, ed in questo breve intervallo danno alla guisa dei metalli la polarizzazione elittica, come del resto fu dimostrato sperimentalmente dal Jamin, mentre per le altre incidenze si può ammettere che la riflessione su questi corpi non produca che una rotazione della vibrazione incidente, dovuta all'essere diversa la diminuzione d'ampiezza delle componenti dirette secondo i due azimut principali.

Per analogia potremo dunque supporre, che quando la luce polarizzata si riflette sopra una lastra trasparente collocata sul polo d'una calamita, la differenza di fase fra i due raggi elittici reciproci nei quali si decompone la vibrazione incidente, sia nulla sin quasi ad una incidenza pochissimo differente da quella di polarizzazione, e sia eguale a $\pi$ a partire da poco oltre questa incidenza sino a quella di 90°.

Le formole stabilite per la riflessione sul polo metallico, varranno dunque tal quali pel caso in cui il corpo riflettente sia trasparente, e per incidenze vicinissime a quella di polarizzazione, continuando a dare questo nome a quella incidenza cui corrisponde la differenza di fase $\frac{\pi}{2}$. Ma per le incidenze minori converrà porre nelle formole $\varphi = 0$, e per quelle maggiori porre $\varphi = \pi$. Vediamo dunque come si modificano nei due casi le formole, e quali proprietà ne conseguono.

### 14. *Incidenze minori di quella di polarizzazione.*

Le formole (7) e (9) che danno le componenti della vibrazione riflessa quando l'incidente fa un angolo o zero o eguale a $\frac{\pi}{2}$ col piano d'incidenza, si trasformano nelle seguenti, che distingueremo cogli stessi numeri affetti dall'indice uno:

$$(7_1)\quad \begin{cases} X = \dfrac{k + hp^2}{1 + p^2} \operatorname{sen} \theta\,, \\ Y = -p \dfrac{h - k}{1 + p^2} \cos \theta\,, \end{cases} \qquad (9_1)\quad \begin{cases} X = -p \dfrac{h - k}{1 + p^2} \cos \theta\,, \\ Y = -\dfrac{h + kp^2}{1 + p^2} \operatorname{sen} \theta\,. \end{cases}$$

Queste formole mostrano subito che quando la vibrazione incidente è orientata in uno dei due azimut principali, cioè o è diretta nel piano d'incidenza ($7_1$), o perpendicolare a questo piano ($9_1$), il raggio riflesso è elittico, ma cogli assi nelle due direzioni principali, cioè con uno degli assi nel piano d'incidenza. La magnetizzazione non ha dunque altro effetto che di rendere elittico il raggio riflesso e non produce rotazione, vale a dire che se il raggio riflesso si riceve in un nicol analizzatore e questo si mette all'estinzione prima del passaggio della corrente, dopo che questa agisce compare luce nel campo visuale, ma ogni rotazione dell'analizzatore non fa che accrescerne l'intensità. Lo stesso si dica se si gira il polarizzatore. Ciò d'altronde risulta anche dal fatto che le rotazioni $\omega_1$, $\omega_2$ dei due nicol capaci di render minima la luce, e date dalle formole (17) e (19) (vedi art. 6), divengono nulle nel caso attuale in cui $\varphi = 0$.

Questo che accade a tutte le incidenze da zero fin quasi a quella di polarizzazione (ed anche fino a 90° come si vedrà nel seguente articolo), è appunto ciò che, contrariamente ai risultati delle esperienze, dovrebbe avvenire nella riflessione normale sul polo di ferro secondo la teoria di Fitzgerald.

La legge di reciprocità resta naturalmente valida, e si potrebbe dimostrare ripetendo il ragionamento fatto nell'art. 4.

Esaminiamo ora se è possibile orientare la vibrazione incidente in modo che la vibrazione riflessa sia rettilinea anzichè elittica.

Per $\varphi = 0$ le (39) divengono:

$$(39_1)\quad \begin{cases} T = 0 \\ U = -p\,(h-k)\,(k+hp^2) \\ V = -p\,(h-k)\,(h+kp^2)\,. \end{cases}$$

Le quantità U e V sono dunque qui entrambe negative, in causa dell'essere $k < h$, $p \leqq 1$ e $> 0$.

Ne consegue che le formole (42) e (43) le quali danno gli angoli $\alpha_0$, $\beta_0$ che una vibrazione incidente deve fare coll'asse $O_0 x_0$, o coll'asse $O_0 y_0$ perchè la riflessa sia rettilinea, e gli angoli $\alpha$, $\beta$ che quest'ultima fa con $Ox$, $Oy$, e che divengono pel caso attuale:

$$(42_1)\quad \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{-\sqrt{-4UV}}{2V}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{-4UV}}{2U}\,.$$

$$(43_1)\quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\sqrt{-4UV}}{2U}\,, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{-\sqrt{-4UV}}{2V}\,,$$

danno per le quattro tangenti espressioni immaginarie, il che mostra non esistere orientazioni della vibrazione incidente che forniscano vibrazioni riflesse rettilinee.

Nel caso attuale essendo $\omega_1$ ed $\omega_2$ nulli, $\alpha_0$ ed $\alpha$ immaginari, i metodi dati negli art. 7 ed 8 per calcolare $p$ e $\varrho = \frac{k}{h}$ non sono applicabili.

Per derterminare $p$ e $\varrho$ ad una incidenza qualunque, bisognerebbe invece misurare il rapporto $R_1$ fra l'asse minore e l'asse maggiore dall'elisse riflessa quando la vibrazione incidente è nel piano d'incidenza, ed il rapporto analogo $R_2$ quando la vibrazione incidente è perpendicolare a quel piano. Si avrebbero allora le due equazioni:

$$-\frac{p\,(h-k)}{k+hp^2} = R_1\,, \qquad \frac{p\,(h-k)}{h+kp^2} = R_2\,,$$

colle quali si calcolerebbero $p$ e $\varrho$.

Anche le formole date nel capitolo precedente sono applicabili, e fanno conoscere gli effetti che si ottengono ponendo due lastre della sostanza trasparente che si considera sui poli opposti paralleli d'una elettrocalamita, e facendo riflettere il raggio polarizzato $m$ volte alternativamente sulle due lastre. L'elitticità del raggio riflesso diviene di più in più grande al crescere del numero delle riflessioni.

Infatti, sia per esempio $x_0 = \operatorname{sen}\theta$ la vibrazione incidente. Dopo $m$ riflessioni si ha dalle (69) per le componenti della vibrazione riflessa:

$$(69_1)\quad \begin{cases} X_m = \dfrac{h^m + h^m p^2}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta \\ Y_m = (-1)^m p\,\dfrac{h^m - k^m}{1+p^2}\cos\theta\,. \end{cases}$$

Il rapporto fra l'asse minore ed il maggiore dell'elisse è:

$$\frac{(-1)^m p\,(h^m - k^m)}{k^m + h^m p^2}\,,$$

ossia:

$$\frac{(-1)^m p\,(1-\varrho^m)}{p^2+\varrho^m}\,.$$

Ora essendo $\varrho < 1$, si avrà pure successivamemte:

$$\varrho^m < \varrho\,, \quad p^2 + \varrho^m < p^2 + \varrho\,, \quad 1 - \varrho^m > 1 - \varrho\,,$$
$$\frac{1-\varrho^m}{p^2+\varrho^m} > \frac{1-\varrho}{p^2+\varrho}\,.$$

Dunque, astrazione fatta dal segno del detto rapporto, esso è maggiore che per una sola riflessione. Anzi se $\varrho$ è poco diverso dall'unità, come avviene alle più piccole incidenze, il rapporto degli assi dell'elisse dopo $m$ riflessioni, è sensibilmente $m$ volte quello dopo una riflessione sola.

Come si vede i fenomeni sono molto più semplici quando il polo riflettente è un corpo trasparente anzichè un metallo. La semplicità è un po' minore per le incidenze maggiori di quella di polarizzazione, come si vedrà nel seguente articolo.

### 15. *Incidenze maggiori di quella di polarizzazione.*

Bisogna ora porre $\varphi = \pi$ nelle formole (7) e (9). Esse diverranno, distinguendole coll'indice 2:

$$(7_2)\quad \begin{cases} X = \dfrac{hp^2 - k}{1+p^2} \operatorname{sen}\theta\,, \\ Y = -p\dfrac{h+k}{1+p^2}\cos\theta\,, \end{cases} \qquad (9_2)\quad \begin{cases} X = -p\dfrac{h+k}{1+p^2}\cos\theta\,, \\ Y = \dfrac{kp^2 - h}{1+p^2}\operatorname{sen}\theta\,. \end{cases}$$

Da queste formole apparisce che anche per le incidenze che superano quella di polarizzazione, l'elisse riflessa ha uno degli assi nel piano d'incidenza, quando la vibrazione incidente è parallela o perpendicolare a questo piano. Qui pure dunque $\omega_1$ ed $\omega_2$ sono sempre zero. Qui pure infine si verifica la reciprocità d'effetti delle rotazioni del polarizzatore e dell'analizzatore dimostrata nell'art. 4.

Ciò che fà differire questo caso dal precedente, è che quando l'incidenza è maggiore d'un certo valore, esistono orientazioni della vibrazione incidente capaci di dare vibrazioni riflesse rettilinee.

Le (39) divengono infatti nel caso attuale:

$$(39_2)\quad \begin{cases} T = 0 \\ U = p\,(h+k)\,(k - hp^2) \\ V = p\,(h+k)\,(kp^2 - h)\,. \end{cases}$$

Essendo $k < h$, $p < 1$, V è evidentemente negativo. Il segno di U potrà verosimilmente essere positivo o negativo secondo che $hp^2$ è maggiore o minore di $k$. Ora la quantità U è negativa fino all'incidenza di polarizzazione, ed è positiva per le incidenze prossime a quella di 90°, giacchè $p$ allora è piccolissimo. Vi sarà dunque un'incidenza, che chiameremo ancora incidenza *singolare*, alla quale $U = 0$, ossia $p^2 = \dfrac{k}{h}$, e fra l'incidenza singolare e quella di 90° U sarà positivo.

Ciò premesso le (42) e (43) divengono nel caso di $\varphi = \pi$ le stesse $(42_1)$, $(43_1)$ scritte più sopra, ed i valori di $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$ sono reali nell'intervallo in cui U è

positivo. Anzi, tenuto conto che V è quantità negativa, e ponendo provvisoriamente $V' = -V$, si ha:

$$(42_2)\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{4UV'}}{2V'} = \dfrac{\sqrt{U}}{\sqrt{V'}} = \dfrac{\sqrt{U}}{\sqrt{-V}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{4UV'}}{2U} = \dfrac{\sqrt{V'}}{\sqrt{U}} = \dfrac{\sqrt{-V}}{\sqrt{U}} \end{cases} \qquad (43_2)\begin{cases} \operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{\sqrt{-V}}{\sqrt{U}} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{U}}{\sqrt{-V}} \end{cases}$$

Gli angoli $\alpha_0 = \beta$ ed $\alpha = \beta_0$ sono dunque complementari, e siccome $U < -V$, giacchè U e $-V$ possono scriversi così:

$$U = \frac{p}{2}(1-p^2)(h+k)^2 - \frac{p}{2}(1+p^2)(h^2-k^2)$$

$$-V = \frac{p}{2}(1-p^2)(h+k)^2 + \frac{p}{2}(1+p^2)(h^2-k^2),$$

sarà pure $\operatorname{tg}\alpha_0 < \operatorname{tg}\alpha$.

Le orientazioni I′, I″ della vibrazione incidente, per le quali la vibrazione riflessa è rettilinea, e le orientazioni corrispondenti R′, R″, di questa vibrazione riflessa, sono dunque disposte rispetto agli assi come mostra la fig. 12, nella quale gli angoli di I′ ed I″ col piano d'incidenza e quelli di R′ ed R″ colla perpendicolare a questo piano, sono tutti eguali.

Per l'incidenza singolare $U = 0$, I′ ed I″ coincidono insieme e colla direzione dell'asse $O_0 x_0$, mentre R′ ed R″ si sovrappongono all'asse $Oy$. All'incidenza singolare dunque, una vibrazione incidente diretta nel piano d'incidenza, ne dà una riflessa rettilinea e diretta perpendicolarmente a questo piano. È dunque una rotazione di 90° che si compie, ciò che non reca meraviglia qualora si consideri che i corpi trasparenti non magnetizzati, in prossimità dell'angolo di polarizzazione, danno per semplice riflessione delle rotazioni che possono arrivare appunto a 90°, e ciò in causa del divenire piccolissimo il rapporto di $k$ ad $h$. Per esempio, una vibrazione incidente che faccia un angolo $\omega$ col piano d'incidenza, e che si rifletta sotto l'angolo di polarizzazione su un corpo trasparente nelle condizioni ordinarie, dà una vibrazione riflessa perpendicolare al piano d'incidenza, qualunque sia $\omega$, anche se è piccolissimo.

Anche per le incidenze maggiori di quella di polarizzazione, si potrebbero determinare $\varrho$ e $p$ dietro misure del rapporto degli assi delle vibrazioni riflesse date da incidente dirette nei due azimut principali. Quì pure infine, senza che occorra ripetere quanto si disse alla fine dell'art. precedente, le riflessioni multiple hanno per risultato d'amplificare gli effetti ottenuti, cangiando $k$ ed $h$, in $k^m$ ed $h^m$. In particolare si riconoscerà facilmente che se $m$ è pari $U_m$ è sempre negativo, e per conseguenza non si hanno mai vibrazioni riflesse rettilinee.

Le formole date in questo capitolo sono basate sopra una analogia, e perciò avrebbero bisogno della sanzione dell'esperienza. Però esse non si potranno verificare che quando si scopra un corpo trasparente dotato d'un potere rotatorio magnetico di grandezza comparabile a quello del ferro, oppure quando si possegga un mezzo di rivelare rotazioni di piccole frazioni di minuto.

I corpi conosciuti non darebbero, coi mezzi attuali di ricerca, che effetti tanto

piccoli da sfuggire all'osservazione, almeno ammettendo frà i coefficienti $k_0$ ed $h_0$ relativi all'incidenza normale, e gl'indici di rifrazione dei raggi circolari entro il corpo considerato, la relazione data dalla teoria di Fresnel. Torneremo su ciò alla fine della Memoria.

## Capitolo VI.

## Nuove esperienze intorno alla riflessione normale.

### 16. *Disposizione adottata per l'incidenza normale.*

Avendo a mia disposizione la nota elettrocalamita di Ruhmkorff destinata alle esperienze di rotazione elettromagnetica, l'adoperai nelle nuove esperienze tanto per la riflessione normale che per la obbliqua, in luogo di quella a rocchetti verticali descritta nell'art. 5 della prima Memoria. L'elettrocalamita di Ruhmkorff mi diede effetti un po' superiori in intensità; ma non si potrebbe adoperarne che una disposta come quella descritta nel suddetto art. 5, quando si avesse a sperimentare sulle riflessioni multiple.

Al pezzo tronco-conico forato di ferro che forma il polo d'uno dei rocchetti $R_1$ (fig. 13), è congiunto il tronco di cono AB, che forma come un prolungamento del primo. Il foro conico che lo attraversa ha all'estremità B un diametro di circa $3^{mm}$. Su questa estremità si può fissare ad attrito una specie di corperchio in ottone P, col fondo formato da una laminetta piana sottilissima forata nel centro.

Questa laminetta è quella che, in luogo del cartoncino adoperato nelle mie prime esperienze, determina la distanza fra il polo conico AB e lo specchietto d'acciaio.

Sul fondo interno del piccolo coperchio vengono poi collocati dei dischetti di lamina d'ottone sottilissima, forati nel centro, ed in numero più o meno grande, con chè la detta distanza si rende più o meno grande essa pure. Se ne mette un numero diverso finchè si trovi a tentativi quella grossezza complessiva che dà al fenomeno di Kerr la massima intensità, grossezza che nel caso mio fu di poco più di mezzo millimetro.

Al polo tronco-conico C dell'altro rocchetto $R_2$, viene applicata, prima di essere avvitato sul rocchetto, una lastra quadrata di ferro DE, la quale ha un foro circolare nel centro per lasciare passare la vite del pezzo C. Ai quattro angoli di questa lastra sono fissate quattro viti d'ottone, delle quali due DF, EG sono visibili nella figura. Le due viti superiori passano nei due fori d'una lastrina rettangolare d'ottone H, e le due inferiori in quelli d'una seconda lastrina L. Queste due lastrine si appoggiano sui lati superiori ed inferiore dello specchio d'acciaio S, che ha forma quadrata, e per mezzo di quattro dadi applicati alle viti, possono essere strette fortemente contro lo specchio, fissandolo così saldamente sul polo.

Siccome il coperchio P passa liberamente fra le due lastrine H ed L, accostando i due rocchetti si può farlo appoggiare sullo specchio S. Quest'ultimo resta dunque invariabilmente fissato sul polo del rocchetto $R_2$, ad una distanza dal polo opposto AB regolata dal piccolo coperchio P.

Lo specchio d'acciaio S ha circa 16$^{mm}$ di lato, ed è perfettamente piano e levigato. Di tali specchi me ne furono forniti di ottimi dal Duboscq di Parigi.

La parte ottica dell'apparecchio è quella già descritta nella I$^a$ Memoria, e cioè i raggi solari resi orizzontali, e polarizzati da un nicol $N_1$ (fig. 14) in modo che le vibrazioni sieno o verticali od orizzontali, cadono sopra un vetro V a faccie parallele, vi si riflettono, ed attraversando il foro del rocchetto $R_1$ cadono normalmente sullo specchio S fissato sul polo di $R_2$. Riflessi da questo attraversano il vetro, e poi l'analizzatore, che è un nicol $N_2$ mobile al centro d'un circolo graduato G insieme ad un nonnio, e munito d'un piccolo cannocchiale G con cui si guarda la piccola apertura d'un diaframma M posto dopo il polarizzatore.

Alcuni altri pezzi vennero aggiunti pei vari bisogni delle esperienze, come si dirà più avanti.

Infine, la corrente di 10 o 12 coppie Bunsen rende attiva la elettrocalamita, e può essere a piacere interrotta od invertita per mezzo d'un inversore a portata di mano. L'adoperare un numero anche molto maggiore di coppie, non aumenta che pochissimo gli effetti, il che dipende forse dall'acquistare la superficie dello specchio, anche con poche coppie, lo stato di saturazione.

### 17. *Nuove esperienze sulla riflessione normale.*

Queste esperienze furono istituite principalmente allo scopo di verificare l'ellitticità del raggio riflesso, che la mia teoria fa prevedere. Descriverò il modo in cui fu preparata e condotta una di tali esperienze.

La luce adoperata era resa sensibilmente omogenea coll'interposizione di un vetro giallo, ed una lamina di mica di $\frac{1}{4}$ d'onda $m$ (fig. 14) poteva essere collocata, quando occorreva, davanti l'analizzatore. A quest'ultimo poteva giungere a volontà, interponendo all'uopo o allontanando dei diaframmi, ora la luce solare riflessa dallo specchio d'acciaio, ora la luce d'un' intensa fiamma a gas polarizzata da un nicol $N_3$, e riflessa dalla seconda faccia del vetro V, come indica la fig. 14.

Disposto il polarizzatore $N_1$ in modo da dare vibrazioni verticali (e cioè col piano delle piccole diagonali delle faccie estreme disposto verticalmente), e l'analizzatore all'estinzione, colle norme altra volta spiegate, fu chiusa la corrente in un dato senso, per esempio in modo che osservata nel filo dei rocchetti stando presso all'analizzatore, aveva la direzione destrogira, ossia quella secondo la quale gl'indici percorrono il quadrante dell'orologio. Nell'istante medesimo apparve luce nel campo dell'istrumento, ma girando verso sinistra l'analizzatore, si giunse a rendere minima l'intensità della luce da esso trasmessa.

Ciò fatto venne esclusa per un momento la luce solare, e si ricevette quella del nicol $N_3$, che venne girato, senza toccare menomamente il nicol $N_2$, fino ad aversi l'estinzione perfetta. Messa allora a posto la mica d'$\frac{1}{4}$ d'onda $m$, riapparve luce; ma girata nel proprio piano opportunamente si giunse di nuovo all'estinzione. In tal modo essa venne collocata esattamente in maniera che il suo asse fosse o parallelo

o perpendicolare alla sezione principale dell'analizzatore $N_2$. Lasciato di nuovo libero il cammino alla luce solare riflessa dal polo, si potè constatare che, girando qualche poco l'analizzatore, era possibile scemare ancor di più la luce da esso trasmessa.

Questo risultato, che fu da me ottenuto moltissime volte e in modo ben distinto, dimostra che la vibrazione riflessa dallo specchio magnetizzato è elittica.

Infatti, col rendere dapprima minima la luce trasmessa dall'analizzatore, non si fa altro che disporre la sezione principale di quest'ultimo nella direzione dell'asse minore dell'elisse. Collocata poi la mica d'$\frac{1}{4}$ d'onda nel modo descritto, e cioè col suo asse parallelo o perpendicolare alla sezione principale dell'analizzatore, l'asse di essa risultò diretto secondo uno degli assi dell'elisse, e perciò la vibrazione elittica attraversandola divenne rettilinea ed inclinata d'un certo angolo sulla direzione che prima aveva l'asse maggiore dell'elisse. Divenne così possibile ottenere un'ulteriore diminuzione di luce, girando l'analizzatore finchè la sua sezione principale divenisse perpendicolare alla vibrazione. Se la vibrazione riflessa dallo specchio magnetizzato fosse stata rettilinea, dopo aver messo a posto la mica d'$\frac{1}{4}$ d'onda, essa non avrebbe subìto modificazioni.

Si può in un modo più semplice rendere sensibile l'elitticità, operando come segue. Chiuso il circuito e messo l'analizzatore al minimo, s'interpone la mica $m$, senza far uso del nicol ausiliario $N_3$, ma continuando a ricevere la luce riflessa dal polo. Si gira allora la mica finchè si giunga a rendere di nuovo minima la luce che arriva all'occhio. Se la luce riflessa dal polo fosse a vibrazioni rettilinee, la mica risulterebbe collocata in modo da avere il suo asse o nella direzione delle vibrazioni o perpendicolarmente, per cui le vibrazioni stesse non subirebbero cambiamento per opera della mica. Invece si riconosce che è possibile diminuire ancor più la luce trasmessa dall'analizzatore, girandolo alcun poco in un dato senso (1).

Mentre dunque nella mia I$^a$ Memoria dimostrai consistere il fenomeno di Kerr all'incidenza normale principalmente in una rotazione delle vibrazioni, resta dimostrato colle nuove esperienze che questa rotazione è accompagnata da trasformazione in vibrazione elittica, cosichè anche sotto questo rapporto la teoria è confermata completamente.

Alla stessa conclusione conduce un'esperienza fatta col compensatore di Babinet collocato davanti all'analizzatore. Nell'atto di chiudere od invertire la corrente, si ha un distinto spostamento della frangia centrale.

Risulta poi da queste esperienze che il rapporto degli assi della vibrazione elittica riflessa, è piccolissimo.

Altre esperienze sulla riflessione normale sono state da me fatte, cambiando la rifrangibilità della luce incidente. Tanto adoperando i raggi isolati da uno spettro reale,

(1) Si può facilmente dimostrare che quando, come è appunto il caso, il rapporto dell'asse minore al maggiore dell'elisse è assai piccolo, la tangente dell'angolo del quale viene girato l'analizzatore è sensibilmente eguale alla metà di questo rapporto. Invece, operando come si è spiegato prima, la detta tangente è eguale al rapporto intero.

quanto interponendo mezzi colorati, ho sempre verificato che al diminuire della lunghezza d'onda, diminuisce pure la differenza di fase $\varphi_0$, ossia diminuisce la rotazione dell'analizzatore che rende minima la luce. Così per esempio in una serie di misure ottenni:

| Qualità della luce | Doppia rotazione |
|---|---|
| Luce trasmessa da un vetro rosso . . . . . | 33′ |
| » » da una soluzione d'eosina gialla . . . . | 30 |
| » » » » » di solf.° di rame amm.° | 24 |

La dispersione è dunque veramente anomala, come credei d'osservare all'epoca delle mie prime esperienze, e come verificò il sig. Kundt.

## Capitolo VII.

## Nuove esperienze intorno alla riflessione obbliqua.

### 18. *Nuove disposizioni per le esperienze sulla riflessione obbliqua.*

Anche per le misure relative alla riflessione obbliqua ho reso più stabile e comodo l'apparecchio, che non era all'epoca delle prime esperienze. Lo specchio d'acciaio è fissato sopra uno dei poli dell'elettrocalamita di Ruhmkorff, come è indicato nella fig. 13, se non chè lo specchio è quì coperto da una lastrina d'ottone, avente un'apertura rettangolare, la quale serve a stabilire la distanza fra lo specchio medesimo ed il polo opposto dell'elettrocalamita. La superficie speculare è annerita col nero fumo, come si disse nella I$^a$ Memoria, all'infuori d'una strettissima striscia verticale che corrisponde alla faccetta terminale del prisma di ferro descritto nella I$^a$ Memoria, il quale viene fissato sul polo opposto dell'elettrocalamita, in luogo del cono tronco della fig. 13.

Per facilitare poi la misura degli angoli d'incidenza, l'elettrocalamita venne collocata sopra una robustissima tavoletta di legno che poteva girare orizzontalmente sopra un alto piede che riposava sul suolo per mezzo di tre grosse viti da livello. Per mezzo di queste si rendeva verticale l'asse di rotazione, sul prolungamento del quale si trovava la striscia riflettente dello specchio, e per mezzo di piccole zeppe di legno poste sulla tavoletta sotto i piedi dell'elettrocalamita, si rendeva verticale la superficie dello specchio. Quando queste condizioni erano soddisfatte, un raggio solare orizzontale riflettendosi sullo specchio, percorreva sulle pareti della camera, quando l'apparecchio veniva fatto ruotare, una linea orizzontale alta dal suolo come l'apertura da cui entrava la luce.

La misura degli angoli d'incidenza l'ottenni, misurando con un nastro metrico i tre lati di un triangolo, del quale un angolo era doppio dell'incidenza cercata, ed i

lati del quale erano 1° la distanza dell'apertura da cui entrava la luce dallo specchio; 2° la distanza da questo al punto della parete illuminata dal raggio riflesso; 3° la distanza da questo punto della parete, all'apertura da cui entrava la luce.

In seguito trovai più comodo fare sulle pareti della camera, col medesimo metodo trigonometrico, una specie di graduazione, che faceva conoscere la posizione che doveva essere colpita dal raggio riflesso, onde l'angolo d'incidenza avesse un determinato valore.

Collocata a dovere l'elettrocalamita, veniva messo sul cammino del raggio incidente un nicol polarizzatore mobile al centro d'un circolo graduato con nonnio, e sostenuto da un piede ben stabile, e subito dopo di esso quel diaframma con piccola apertura l'immagine della quale si osserva poi col cannocchiale annesso all'analizzatore. Ma è necessario che l'asse di rotazione del nicol sia orizzontale e sul prolungamento del raggio solare.

Per assicurarmene applicai provvisoriamente con un po' di cera alla faccia del nicol per cui entrava la luce, uno specchietto di vetro argentato, in posizione un po' inclinata. La luce solare da esso riflessa colpiva l'imposta della finestra da cui entrava la luce, formandovi un cerchietto luminoso. Facendo ruotare il nicol, questo cerchietto doveva percorrere sull'imposta una circonferenza avente per centro l'apertura da cui entrava la luce, acciocchè l'asse di rotazione si trovasse sul prolungamento del raggio solare.

Infine, sul cammino del raggio riflesso veniva collocato l'analizzatore, portato da altro sostegno ben stabile, girevole esso pure al centro d'un altro circolo graduato munito di nonnio, e portante il solito piccolo cannocchiale. Anche l'asse dell'analizzatore veniva collocato sul prolungamento del raggio che lo attraversava, in modo simile a quello adoperato pel polarizzatore.

Dopo avere fatte diverse esperienze con tale apparecchio, ideai una nuova disposizione dello specchio e dei pezzi polari.

La disposizione ora descritta non permette di operare che con angoli d'incidenza piuttosto grandi, giacchè per angoli minori il prisma di ferro accostato allo specchio, e che serve a renderne intensa la magnetizzazione, fa da schermo. Nella nuova disposizione, che non ha questo inconveniente, la striscia rettangolare dello specchio che riflette la luce è orizzontale anzichè verticale, ed è completamente libera, giacchè il pezzo di ferro destinato a renderne fortissima la calamitazione, è in due parti, poste l'una al di sopra, l'altra al di sotto della striscia.

Queste due masse di ferro sono rappresentate prospetticamente in ABCDL ed EFGHI dalla fig. 15. Esse sono eguali e di forma prismatica, e le basi ABCD, EFGH dei due prismi sono trapezi aventi in A, B, G, H, degli angoli retti. Le faccie sono tutte ben piane, segnatamente poi le faccie BCL, FGI, e le due faccie inclinate che terminano negli spigoli CD, EF; anzi queste quattro faccie sono levigate quasi a specchio, di modo che i due spigoli orizzontali vicinissimi che fanno capo ai punti C ed F sono perfettamente rettilinei e taglienti.

Due piastre d'ottone ben piane e robuste MN, PQ, servono a collegare i due prismi di ferro, mediante quattro viti d'ottone $m, n, p, q$. Due di queste, $n, q$, passano per fori circolari delle piastre, le altre due $m, p$, traversano invece due finestre

rettangolari, rimanendo così facile variare a piacere il piccolo intervallo che resta fra i due spigoli orizzontali C ed F dei prismi.

Lo specchio d'acciaio S è appoggiato colla sua faccia riflettente contro le faccie piane BCL, FGI dei prismi di ferro, ma sono interposte due laminette d'ottone, l'una in corrispondenza del prisma superiore l'altra dell'inferiore, che servono a stabilire la distanza invariabile fra lo specchio ed i prismi, i quali, come si vedrà, costituiranno il polo dell'elettrocalamita opposto allo specchio. Di quest'ultimo resta scoperta fra i prismi una strettissima striscia orizzontale, la quale potrà liberamente riflettere la luce che giunga orizzontalmente su di essa, passando fra le faccie inclinate dei prismi, le quali devono essere di un nero opaco, onde non riflettano della luce estranea verso l'analizzatore (1).

Le dimensioni dei prismi di ferro, sono in millimetri le seguenti:

$$AB=42\,,\ BC=26\,,\ AD=22\,.\ BL=55\,.$$

Lo specchio S è poi mantenuto saldamente al suo posto da una piastra di ferro a faccie piane RT, stretta sui prismi da due viti d'ottone $r$, $t$, la prima delle quali passa per un'apertura allungata verticalmente.

Il sistema formato nel modo descritto è collocato contro uno dei poli tronco-conici dell'elettrocalamita di Ruhmkorff, dalla quale si è tolto uno dei rocchetti, come mostra la fig. 16, in modo cioè che la piastra RT della fig. 15, sia appoggiata contro la faccia verticale del polo. Il sistema AG è poi sorretto da un parallelepipedo di ferro dolce UV di conveniente altezza, appoggiato sul banco di ferro che sostiene l'elettrocalamita. Quando questa sia attivata, lo specchio costituirà una delle faccie polari, ed i prismi costituiranno l'altro polo, e così renderanno assai intensa la magnetizzazione dello specchio.

Questa disposizione somiglia dunque a quella usata per la riflessione all'incidenza normale, il taglio prismatico DCFE della fig. 15 tenendo luogo del foro conico praticato pel pezzo AB della fig. 13; essa però ha pregi notevoli, fra i quali quello di evitare l'affumicamento dello specchio, necessario per lo studio delle incidenze obblique coll'altra disposizione, che in breve ne guasta la superficie, e sopratutto quello di poter servire per istudiare il fenomeno di Kerr a tutte quante le incidenze, compresa la stessa incidenza normale. Perciò la disposizione sperimentale descritta sarà d'ora in poi, io credo, sempre preferita alle altre fin qui usate.

Collocato a posto l'apparecchio elettromagnetico ed i nicol nel modo indicato più sopra, restano a determinarsi le orientazioni principali del polarizzatore, e cioè quelle che forniscono le vibrazioni incidenti o esattamente nel piano d'incidenza, o perpendicolari a questo piano, e le orientazioni principali dell'analizzatore, cioè quelle in cui è perpendicolare o parallela al medesimo piano, la sua sezione principale.

Il metodo da me altra volta descritto (v. I$^a$ Memoria) non può servire che per incidenze piuttosto grandi, ma in questo caso può essere perfezionato. Quel metodo consiste nel fare la seguente serie di operazioni, mentre non passa corrente nel filo

(1) Si anneriscono benissimo i pezzi di ferro stendendovi sopra, dopo averli ben riscaldati, e con un pennello dolce, dell'alcool in cui si è stemprato un po' di nero fumo. Anche le due faccie verticali AD, EH, come pure le faccie trapezoidali che sono dalla parte dell'analizzatore, devono essere annerite con cura nello stesso modo.

dell'elettrocalamita. Si pone da prima il polarizzatore in modo da dare approssimativamente le vibrazioni colla orientazione voluta, cioè press'a poco verticali od orizzontali, poi si gira l'analizzatore fino a render minima la luce che trasmette. Allora si fa girare lentamente in un senso o nell'altro il polarizzatore. Se per caso ad ogni minimo spostamento la luce che riceve l'occhio applicato all'analizzatore cresce, vuol dire che il polarizzatore era già nella posizione desiderata, ammesso che lo specchio non abbia traccie di magnetismo. Nel caso contrario lo si gira fino alla posizione che rende minima la luce, poi si gira l'analizzatore fino a rendere ancor minima possibile l'intensità della luce trasmessa, e così si continua molte volte finchè si giunga a condizioni tali, che al più piccolo spostamento o dell'analizzatore o del polarizzatore la luce si accresca.

Se lo specchio non è per nulla magnetizzato, lo scopo è raggiunto, ma non così se, come del resto accade, lo specchio ha conservato un certo grado di magnetizzione dopo l'ultima corrente. In tal caso bisogna tener conto delle posizioni trovate dopo la descritta serie di operazioni, mandare per un istante la corrente in senso contrario in modo da invertire la magnetizzazione dello specchio, e poi ripetere la stessa serie di operazioni coi due nicol. Si troveranno così due nuove posizioni, in generale pochissimo differenti dalle prime. Bisognerà allora mettere il polarizzatore a metà delle due posizioni trovate colle due serie di operazioni, onde le vibrazioni incidenti abbiano l'orientazione desiderata, e così pure mettere l'analizzatore nella posizione media fra quelle trovate, se si vuol conoscere l'orientazione che avrebbe, posto all'estinzione, collo specchio privo di magnetismo.

Le formole trovate nell'art. 5 di questa Memoria giustificano il metodo spiegato, ed anzi mostrano che le due serie di operazioni si possono eseguire, non col magnetismo rimanente dello specchio, ma mentre passa la corrente nella elettrocalamita, prima in un senso poi nell'altro.

Infatti, colla prima serie di operazioni fatta mentre nella elettrocalamita passa la corrente in un dato senso, non si fa altro che trovare una posizione del polarizzatore che dà vibrazioni riflesse non elittiche, ma rettilinee. Se per esempio al principio delle operazioni si pose il polarizzatore in modo da dare vibrazioni pressochè orizzontali, alla fine della prima serie di spostamenti dei nicol, l'orientazione trovata pel polarizzatore farà l'angolo $\alpha_0$ con quella che darebbe vibrazioni esattamente orizzontali, e l'orientazione trovata per l'analizzatore farà un angolo $\alpha$ con quella che con vibrazioni incidenti orizzontali e specchio non magnetico produrrebbe l'estinzione. Invertendo la corrente i valori di $\alpha_0$ ed $\alpha$ cambiano segno, giacchè, come si è avvertito altrove, per passare dalle formole stabilite pel caso di corrente destrogira intorno al polo, al caso di corrente levogira, devesi cambiare nelle formole stesse $p$ in $-p$. Dunque alla fine della seconda serie di operazioni fatta colla corrente invertita, i due nicol si troveranno spostati rispetto alle orientazioni cercate, d'altrettanto ed in senso contrario che dopo la prima. Perciò mettendo ciascuno di essi a metà delle due posizioni ottenute, si raggiunge l'intento.

Analogamente si dica se le due serie di operazioni si fanno a partire da vibrazioni incidenti presso a poco verticali.

Con quattro serie d'operazioni si determinano dunque le orientazioni principali dei due nicol, e in pari tempo gli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$.

Il metodo descritto non può evidentemente servire per le incidenze piccolissime,

giacchè sappiamo che raggi riflessi a vibrazioni rettilinee non si producono che oltre una certa incidenza, ed anche oltre questa incidenza, che è certo assai piccola, fino a circa 40°, le successive rotazioni dei nicol danno dei minimi poco marcati, e perciò la determinazione degli angoli $\alpha_0$ , $\alpha$ , $\beta_0$ , $\beta$ , e quindi quella delle orientazioni principali dei due nicol riescono assai incerte.

Bisogna dunque, per le incidenze inferiori a circa 40°, ricorrere ad altri metodi per determinare le orientazioni principali dei due nicol. Per esempio, si riceve il raggio che esce dal polarizzatore sopra una lastra di vetro, resa verticale osservandone l'immagine riflessa da un sottoposto bagno di mercurio, ed in modo che l'incidenza sul vetro sia quella di polarizzazione. Girato il polarizzatore finchè la luce riflessa dal vetro sia estinta, esso darà certo vibrazioni orizzontali. Girato poi di 90° a partire da questa orientazione, esso darà vibrazioni verticali.

Si troveranno dopo le orientazioni principali nell'analizzatore, traendo partito dal fatto che gli angoli $\omega_1$ , $\omega_2$ delle formole (17) e (19) (vedi art. 6) cambiano segno essi pure invertendo la corrente. Messo dunque il polarizzatore in modo da dare per esempio vibrazioni orizzontali e mandata la corente nell'elettrocalamita, si farà ruotare l'analizzatore fino a render minima la luce trasmessa. Poi si ripeterà la stessa operazione dopo aver invertita la corrente. L'orientazione media fra le due trovate in tal modo per l'analizzatore, sarà quella per la quale esso estinguerebbe la luce se lo specchio non fosse magnetizzato.

Naturalmente questo modo di trovare le orientazioni principali dei due nicol, potrebbe essere adoperato anche per le grandi incidenze. Ma siccome nelle esperienze da me eseguite mi occorreva sempre la determinazione degli angoli $\alpha_0$ , $\alpha$ , $\beta_0$ , $\beta$ , la quale, come si è visto conduce subito a determinare le orientazioni principali dei nicol in modo assai esatto, così preferii sempre di seguire il primo metodo per le incidenze superiori a 40°.

Anche nelle esperienze sulla riflessione obbliqua non si ha gran vantaggio nell'adoperare una corrente molto intensa. Occorre poi al solito di avere a portata di mano un inversore ed interruttore della corrente, come pure è necessario che i due nicol e l'elettrocalamita siano abbastanza vicini fra loro onde si possa, mentre si osserva all'analizzatore, non solo far ruotare quest'ultimo, ma anche, quando occorre, il polarizzatore.

Davanti a questo misi poi quasi sempre o un vetro rosso o un vetro giallo per rendere sensibilmente omogenea la luce adoperata, o successivamente diversi altri mezzi colorati, quando volli variare la lunghezza d'onda della luce adoperata, per lo studio della dispersione. In una serie di esperienze diretta a quest'ultimo scopo feci uso anche dei raggi d'uno spettro reale, isolati con un opportuno diaframma avente una fenditura, come avevo fatto appunto anche nel caso dell'incidenza normale.

### 19. *Nuove esperienze sulla riflessione obbliqua.*

Ho eseguite moltissime esperienze a molte diverse incidenze, per vedere se i risultati della teoria erano verificati, segnatamente per ciò che riguarda i raggi riflessi a vibrazioni rettilinee.

Per ogni incidenza le misure erano condotte nel modo seguente.

Disposta l'elettrocalamita in modo da aversi l'incidenza voluta, ed orientato il polarizzatore in modo da fornire, per esempio, vibrazioni orizzontali, chiudevo la corrente in un dato senso, e facevo ruotare lentamente l'analizzatore sino a rendere minima la luce trasmessa. Invertivo la corrente, e trovavo la nuova posizione dell'analizzatore. La differenza fra le due letture era l'angolo $2\omega_1$; ma per averlo con precisione, continuavo ad invertire più volte la corrente e prendevo la media dei risultati. Ciò fatto fissavo l'analizzatore nella media delle posizioni trovate durante l'azione della corrente nelle due direzioni, e con corrente alternativamente nell'un senso o nell'altro rendevo minima la luce girando il polarizzatore. La differenza fra la media delle letture fatte colla corrente in un senso, e quella delle letture fatte con corrente in senso contrario, dava tosto l'angolo $2\omega_2$.

Rifacendo la stessa serie di misure a partire da vibrazioni verticali, ottenevo colla rotazione dell'analizzatore un angolo, che per la legge di reciprocità doveva essere $2\omega_2$ e col polarizzatore l'angolo $2\omega_1$. Già feci notare nella mia 1ª Memoria che l'eguaglianza fra questi ultimi due angoli ed i due primi è sempre verificata, e questa verificazione l'ottenni più volte nel corso delle mie nuove esperienze, per cui in ultimo tralasciai di fare le due misure con vibrazioni incidenti verticali, se le facevo con vibrazioni orizzontali, o viceversa.

Se l'angolo d'incidenza al quale operavo era grande, per esempio oltre i 40°, le misure potevano considerarsi finite, giacchè prima anche delle misure di $2\omega_1$ e $2\omega_2$ avevo già determinati gli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$, nell'atto di determinare le orientazioni principali dei nicol, come si è spiegato nell'articolo precedente. Invece per incidenze inferiori le misure degli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$, restava a farsi, e per quanto era possibile veniva fatta col metodo già indicato.

In tal modo, per le incidenze grandi ottenevo la misura di sei angoli $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$, $\omega_1$, $\omega_2$, e per le piccole incidenze quella dei due ultimi soltanto.

Ecco i risultati avuti in una serie di misure eseguite colla corrente di 12 coppie Bunsen:

| Incidenza | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\beta_0$ | $2\beta$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6° | — | — | — | — | 33′ | 33′ |
| 15 30′ | — | — | — | — | 33 | 32, 4 |
| 22 10 | — | — | — | — | 33, 5 | 31, 2 |
| 36 26 | — | — | — | — | 36 | 30 |
| 44 18 | — 19′,8 | 57′,2 | 56′,8 | — 19′,8 | 45 | 28, 8 |
| 56 56 | — 10, 4 | 57, 1 | 56, 9 | — 10 | 52, 8 | 24, 6 |
| 68 6 | + 3, 1 | 44, 8 | 45, 2 | + 2, 9 | 51 | 19, 2 |
| 76 34 | + 7, 1 | 36 | 36 | + 7, 3 | 45 | 12 |
| 84 50 | + 13, 4 | 20 | 19, 6 | + 13 | 15 | 6 |
| 87 10 | — | — | — | — | 6 | 1, 5 |

Esaminando questa tabella si vede dapprima che per l'incidenza di 6°, la minima possibile senza che il cerchio graduato dell'analizzatore, o la testa dell'osservatore, intercetti i raggi incidenti, le due rotazioni $\omega_1$ ed $\omega_2$ sono sensibilmente eguali. Per un'incidenza che non superi i sei gradi le rotazioni $\omega_1$, $\omega_2$, sono dunque verosimilmente press'a poco le stesse che si produrebbero con incidenza normale. Si vede di più che la rotazione $\omega_1$, per le incidenze maggiori, è sempre maggiore di $\omega_2$, come prevede la teoria (I$^a$ Memoria art. 27). La rotazione $\omega_2$ decresce in modo continuo al crescere dell'incidenza. La $\omega_1$ invece cresce dapprima, raggiunge un massimo fra 44° e 68°, poi diminuisce (1). Nella mia I$^a$ Memoria annunciai che la rotazione $\omega_1$ diminuisce al crescere dell'incidenza, e ciò in causa dell'avere allora sperimentato sempre ad incidenze maggiori di quella per la quale $\omega_1$ ha il suo massimo valore.

Questo modo di variazione di $\omega_1$ al crescere dell'incidenza non poteva essere preveduto colla formola (17), giacchè sarebbe stato necessario esprimere $h$, $k$, $p$, $\varphi$ in funzione dell'incidenza.

Alle incidenze grandissime $\omega_1$ ed $\omega_2$ sono assai piccoli, ma in seguito a replicate prove mi sono assicurato che non si annullano nè cambiano segno. Se dunque il sig. Kundt credè di osservare un cambiamento di segno, ciò si deve certo alla mancanza di precisione nel determinare le orientazioni principali dei due nicol, e sopra tutto alla circostanza del non avere il fisico tedesco resa uniforme la magnetizzazione dello specchio, per cui posso ora asserire con sicurezza questa interpretazione di quel risultato, che esposi già come semplice congettura nella Nota alla mia I$^a$ Memoria.

Le misure all'incidenza di 87°10′ non furono possibili che mettendomi nelle migliori condizioni, impiegando la più grande attenzione e la più scrupolosa esattezza nell'orientare e nello spostare i due nicol, ed approffittando della luce solare vivissima nelle ore meridiane d'una giornata nella quale l'atmosfera era di eccezionale limpidezza.

Esaminiamo ora i valori trovati per gli angoli $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$.

I valori trovati di $\alpha$ e di $\beta_0$ si trovarono sempre col medesimo segno, e cioè quando la corrente magnetizzante era destrogira, i nicol erano spostati verso sinistra, cioè nel senso che si prende positivo nella misura degli angoli. Invece, gli angoli $\alpha_0$ e $\beta$, mentre riuscirono pure positivi per le incidenze da 68°6′6 in su, risultarono negativi per le incidenze di 44°18′ e 56°56′. In altre parole, per queste due incidenze i nicol erano spostati in senso destrogiro quando era destrogira la corrente. Ciò è indicato col segno — nella tabella. Ecco dunque che la teoria è verificata in quanto ai segni delle rotazioni $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$ (art. 5).

Le eguaglianze $\alpha_0 = \beta$, $\alpha = \beta_0$, risultano abbastanza confermate esse pure, specialmente se si riflette alla difficoltà grandissima che presenta tal genere di misure. Infine, è sempre $\alpha > \alpha_0$, come vuole la teoria.

Il cambiamento di segno di $\alpha_0$ e di $\beta$ avviene ad un'incidenza compresa fra 56°56′ e 68°6′. L'incidenza *singolare* è dunque compresa fra questi due limiti.

(1) Pare che l'incidenza del massimo di $\omega_1$ sia l'incidenza singolare.

Senza riportare tutte le misure da me eseguite, il che sarebbe inutile giacchè le conseguenze cui conducono sono sempre le stesse, riprodurrò solo due altre tabelle, in una delle quali è indicata l'incidenza singolare, raggiunta a tentativi, variando l'incidenza lentamente sino ad avere $\alpha_0 = 0$, e facendo uso della corrente di 20 coppie Bunsen.

| Incidenza | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\beta_0$ | $2\beta$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 54° 55′ | — 0° 7′,5 | 1° 18′ | 1° 20′ | — 0° 7′,5 | 1° 6′ | 0° 28′ |
| 63 | 0 0 | 1 6,1 | 1 5,8 | 0 0 | 1 6 | 0 27,5 |
| 67 50 | + 0 7,3 | 0 57 | 0 57 | + 0 7 | 1 6 | 0 27 |
| 72 46 | + 0 18,9 | 0 49,1 | 0 48,9 | + 0 19,1 | 1 | 0 18 |
| 77 37 | + 0 19,6 | 0 43,3 | 0 43,5 | + 0 19,4 | 0 51 | 0 16 |
| 82 35 | + 0 23,9 | 0 33 | 0 33 | + 0 24,1 | 0 18 | 0 8 |

| Incidenza | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 40° 56′ | — 0° 46′,8 | 1° 54′,6 | 0° 59′ 9 | 0° 38′ |
| 47 56 | — 0 29,4 | 1 35,2 | 1 0,2 | 0 34 |
| 54 55 | — 0 16 | 1 20 | 1 1,2 | 0 29,6 |
| 63 | — 0 1,2 | 1 1,9 | 1 0,9 | 0 24,1 |
| 67 50 | + 0 5,8 | 0 54,8 | 0 59,2 | 0 20,5 |
| 72 46 | + 0 11,2 | 0 47,4 | 0 51,6 | 0 16,3 |
| 76 34 | + 0 13,4 | 0 39,4 | 0 38 | 0 11,9 |
| 82 35 | + 0 17,6 | 0 29,2 | 0 12 | 0 5,2 |

Nella prima di queste due serie di misure l'incidenza singolare risultò di circa 63°. In altre serie, che qui non ho riportate, essa variò fra 62° e 63°. Può ritenersi dunque che nelle mie condizioni sperimentali l'incidenza particolare che gode la proprietà di dar origine ad una semplice rotazione delle vibrazioni incidenti dirette nel piano d'incidenza, sia di circa 62 gradi e mezzo.

Come si vede, la prima di queste due tabelle offre essa pure la conferma delle relazioni $\alpha_0 = \beta$, $\alpha = \beta_0$, come pure mostra essere $\alpha = \omega_1$, per l'incidenza singolare.

I risultati teorici ricevano dunque una sufficiente conferma, perchè si possa considerare come verificata la teoria che abbiamo sviluppata.

Ho fatto alcune serie di esperienze, variando o l'intensità della corrente magnetizzante, o la qualità della luce adoperata, e mantenendo costante l'angolo d'incidenza. La corrente era misurata da un galvanometro a specchio messo in derivazione

e collocato a grandissima distanza dall'elettrocalamita. Ecco come esempio i risultati di tre serie di esperienze:

| Intensità della corrente | Incidenza = 47° 56′ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
| 215 | — 0° 36′ | 1° 40′,8 | 1° 6′ | 0° 38′,4 |
| 130 | — 0 24 | 1 12 | 1 | 0 30 |
| 45 | — 0 14,4 | 1 7,2 | 0 48 | 0 24 |

| Intensità della corrente | Incidenza = 62° 14′ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
| 213 | 0° | 1° 2′,4 | 1 ° ′ | 0° 30′ |
| 155 | 0 | 1 6 | 1 6 | 0 28 |
| 64 | + 0 8′,4 | 0 54 | 0 54 | 0 27 |
| 45 | + 0 6 | 0 42 | 0 48 | 0 18 |

| Qualità della luce | Incidenza = 50° 29′ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\omega_1$ | $2\omega_2$ |
| Rosso medio dello spettro. . . . . | — 0° 33′,6 | 1° 37′,2 | 1° 12′ | 0° 35′ |
| Verde » » » . . . . . | — 0 20 4 | 1 22 | 1 | 0 31,8 |
| Azzurro » » » . . . . . | — 0 15,6 | 1 9,6 | 0 36 | 0 21 |
| Luce trasmessa da una soluzione rossa d'eosina. . . . . | — 0 30 | 1 30 | 1 12 | 0 36 |
| » » » » » di solf.° di rame amm.e | — 0 26 | 1 24 | 0 48 | 0 27 |

Da queste misure risulta che le rotazioni $\alpha_0$, $\alpha$, $\omega_1$, $\omega_2$, diminuiscono, sia aumentando la rifrangibilità della luce adoperata, sia diminuendo la magnetizzazione dello specchio. Quanto all'influenza della qualità della luce si vede dunque che, come nel caso della riflessione normale, si produce una dispersione anomala assai notevole.

La differenza dei risultati che si ottengono con l'uso dei liquidi diversamente colorati è meno marcata che coll'uso dei raggi semplici dello spettro di egual colore; ma ciò è naturale, in causa del non essere omogenea la luce trasmessa da quelli.

La seconda delle ultime tre tabelle si riferisce ad esperienze fatte con un'incidenza press'a poco eguale all'incidenza singolare. Sembra da essa risultare che questa

incidenza singolare debba diventare minore al diminuire della magnetizzazione dello specchio.

Sarebbe desiderabile che nuove esperienze venissero eseguite in condizioni tali che permettessero di misurare l'intensità della magnetizzazione della superficie polare riflettente, onde scoprire la relazione che ha questa intensità, alle varie incidenze, colla grandezza dei fenomeni prodotti.

20. *Determinazione approssimativa di* p , $\varphi$ *e* $\varrho$ *fra le incidenze 40° e 90°.*

Nel cap. III sono stati indicati i metodi di calcolo che possono servire a determinare gli elementi dei raggi elittici nei quali si decompone il raggio incidente, e cioè $p$ , $\varrho$ e $\varphi$. Le misure che servono di base a questi calcoli sono quelle delle rotazioni $\omega_1$ , $\omega_2$, insieme a quelle delle differenze di fase $\psi_1$ , $\psi_2$ (art. 8), oppure insieme a quelle delle rotazioni $\alpha_0$ , $\dot{\alpha}$ (art. 7). Siccome però gli apparecchi dei quali ho potuto far uso sono bensì abbastanza perfetti per fornire un'idea chiara dell'andamento generale dei fenomeni, e per mostrare in modo abbastanza evidente l'accordo dei risultati delle esperienze con quelli della teoria, ma forse non sono abbastanza precisi per fornire i valori definitivi delle suddette tre quantità, così non ho affrontati i lunghi calcoli delle formole del cap. III che per poche misure. Mi limiterò quindi a riferire nel quadro seguente i risultati dei calcoli fatti prendendo a base le misure trascritte nella terza delle tabelle numeriche del precedente articolo.

| Incidenze | $p$ | $\varrho = \frac{k}{h}$ | $\varphi$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | in gradi | in mezze onde |
| 40° 56′ | 0,0188 | 0,7958 | 21° 40′ | 0,120 |
| 47 56 | 0143 | 7501 | 27 25 | 152 |
| 54 55 | 0108 | 6960 | 35 | 194 |
| 63 | 0073 | 6291 | 49 43 | 276 |
| 67 50 | 0057 | 5887 | 62 46 | 349 |
| 72 46 | 0043 | 5619 | 79 | 439 |
| 76 34 | 0031 | 5594 | 94 16 | 524 |
| 82 35 | 0015 | 6567 | 130 | 722 |

I valori di $p$ furono calcolati pei primi coll'uso della formola (48). È notevole quanto sia già piccolo $p$ anche a 41° circa. Dunque l'eccentricità delle due vibrazioni elittiche nelle quali si decompone la vibrazione incidente, e fra le quali si stabilisce la differenza di fase $\varphi$, è di già assai grande a 40°.

Questo fatto si può mettere in rapporto coll'altro già noto, che nella doppia rifrazione elittica che ha luogo nel quarzo secondo le direzioni obbliche all'asse, l'eccentricità delle elissi nelle quali si decompone il raggio incidente diviene rapidamente assai grande al crescere dell'angolo che la direzione della luce fa coll'asse del cristallo.

Si vede poi che $p$ continua a decrescere fino a zero al crescere dell' incidenza, come doveva essere difatti.

L'essere piccolo $p$ fra 40° e 90° d' incidenza, cioè precisamente nei limiti entro i quali sono possibili le misure di $\alpha_0$ ed $\alpha$, permette di adoperare sempre le formole approssimative (49′) e (50′) in luogo delle (49) e (50), onde determinare $\varrho$ e $\varphi$.

I numeri della terza colonna, calcolati appunto colla (49′), mostrano che il rapporto $\frac{k}{h}$, che sappiamo essere all'incidenza normale poco minore dell'unità, decresce fino ad una certa incidenza prossima a 76°, per aumentare in seguito. È probabile che il minimo di $\varrho$ abbia luogo all'incidenza *principale,* cioè a quell'incidenza, prossima appunto a 76°, per la quale la differenza di fase $\varphi$ fra i due raggi elittici riflessi è d'un quarto d'onda.

È istruttivo un confronto fra i valori trovati di $\varrho = \frac{k}{h}$, e quelli del rapporto delle analoghe quantità determinate da Jamin per la riflessione ordinaria sull'acciaio. Supponiamo perciò che si costruisca una curva, prendendo per ascisse gli angoli di incidenza e per ordinate i valori corrispondenti del rapporto $\varrho$. Si ottiene una curva che presenta all'asse delle ascisse una convessità, ed ha un'ordinata minima corrispondente a circa 76°. Se, ciò fatto, si descrive una simile curva coi valori desunti dalle misure del Jamin, si trova che questa curva ha lo stesso andamento di quella prima costruita, ma con tutte le ordinate più grandi. La magnetizzazione diminuisce dunque il rapporto $\frac{k}{h}$, non solo all'incidenza normale, ma anche alle altre incidenze. Le due curve però si accostano alle incidenze prossime a 90° e mostrano che per questa incidenza tendono ad incontrarsi.

Dall'ultima colonna del quadro precedente risulta, che la differenza di fase $\varphi$ cresce coll'incidenza, passando pel valore d'un quarto d'onda ad una incidenza inferiore a 76°. All'incidenza di 40°, $\varphi$ è ancora piccola, non essendo che circa $^1/_{17}$ d'onda.

Supponiamo che si costruiscano due curve, prendendo per ascisse gli angoli d'incidenza e per ordinate dell'una i valori di $\varphi$ dati nel precedente quadro, e per ordinate dell'altra le differenze di fase, misurate dal Jamin, fra i raggi polarizzati nei due azimut principali, riflessi dal ferro naturale. Si riconosce tosto che la seconda curva ha lo stesso andamento della prima, ma ha tutte le ordinate minori. Sapevamo già che all'incidenza zero $\varphi$, invece d'essere zero come per i metalli ordinari, ha un valore $\varphi_0$. Anche alle altre incidenze la differenza di fase $\varphi$ fra i raggi elittici reciproci riflessi dal polo magnetico, supera dunque la differenza di fase data dal ferro allo stato naturale. Le due curve però si accostano poco a poco, e mostrano di terminare ad una stessa ordinata per $i = 90°$, ordinata che è la mezza onda.

In conclusione, l'effetto della magnetizzazione si può descrivere dicendo: 1° che il raggio che si riflette, invece di decomporsi in due raggi a vibrazioni rettilinee orientate nelle due direzioni principali, come accadrebbe se il ferro non fosse magnetico, si scinde in due raggi elittici reciproci nel modo più volte indicato; 2° che l'eccentricità delle due elissi, che è nulla per $i = 0$, cresce rapidamente al crescere di $i$, ossia, mentre per $i = 0$ le elissi divengono circoli, esse si schiacciano rapidamente al crescere dell'incidenza, divenendo ben presto appena diverse da rette; 3° che la differenza di fase $\varphi$ fra i due raggi elittici è, a parità di angolo d'incidenza, maggiore di quella fra i raggi a

vibrazioni rettilinee della riflessione metallica ordinaria, o in altri termini, la magnetizzazione aumenta la differenza di fase $\varphi$; 4° che il rapporto $\frac{k}{h}$ è invece diminuito dalla magnetizzazione; ed infine 5° che la diminuzione di $\frac{k}{h}$ e l'aumento di $\varphi$ si fanno via via minori sino a zero, al crescere dell'incidenza fino a 90°.

È naturale quindi, che a parità d'angolo d'incidenza, al diminuire dell'intensità della magnetizzazione, debba diminuire la differenza fra i valori di $\varrho$ e $\varphi$ e quelli delle medesime quantità relativi alla riflessione metallica ordinaria, e per conseguenza che al diminuire della magnetizzazione $\varrho$ aumenti e $\varphi$ diminuisca. Così pure, decrescendo gli effetti al crescere della rifrangibilità della luce adoperata, è naturale che $\varrho$ cresca e $\varphi$ diminuisca. Nei due casi poi $p$ deve diminuire tendendo a zero. Ciò infatti risulta dal quadro seguente, calcolato colle misure dell'ultima tabella dell'art. precedente.

| Luce adoperata | $p$ | $\varrho$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| Rosso medio spettrale . . . . . | 0,0137 | 0,6972 | 0,179 |
| Verde » » . . . . . | 0122 | 7284 | 176 |
| Azzurro » » . . . . . | 0095 | 7638 | 138 |
| Luce trasmessa dall'eosina rossa . . . . | 0141 | 7071 | 175 |
| » » dal solf.° di rame amm.° | 0119 | 7500 | 144 |

Come ho avvertito al principio di questo articolo, le misure eseguite ed i calcoli fatti con esse, non possono essere considerati come abbastanza precisi onde fornire gli esatti valori delle tre quantità caratteristiche per le varie incidenze, o per le varie qualità di luce adoperata. Il numero delle misure inoltre è troppo scarso, essendomi mancato il modo di far le misure per le incidenze minori di 40°. Tuttavia quanto ho esposto è più che sufficiente per render conto dell'andamento delle tre quantità suddette alle varie incidenze, e sopratutto per spianare la via a chi, possedendone i mezzi, volesse fare un quadro completo di determinazioni.

## 21. *Considerazioni finali.*

Le nuove verificazioni della teoria trovate colle esperienze narrate negli art. 17 e 19, aggiunte a quelle ottenute dalle esperienze della I$^a$ Memoria, porgono una conferma sperimentale assai notevole della teoria medesima, per cui parmi si possa ritenere come dimostrato, che nella riflessione sul polo d'una calamita, il raggio incidente si decompone in due raggi elittici reciproci, nel modo voluto dalla mia teoria. Si può dunque estendere la teoria medesima anche ai corpi trasparenti dotati di potere rotatorio magnetico, come si è fatto nel Cap. V. Per questi corpi si può inoltre far vedere che gli effetti prodotti per trasparenza devono essere di senso opposto a quelli

per riflessione, cosichè per esempio, una lastra di vetro, che fa girare nel senso della corrente magnetizzante il piano di polarizzazione della luce che la attraversa, deve agire nella riflessione nello stesso senso del ferro, cioè il coefficiente $k$ deve spettare a quella delle due vibrazioni elittiche in cui si suppone decomposta la vibrazione incidente, che è percorsa dalla particella vibrante nel senso della corrente.

Dimostriamo la proposizione all'inverso, e cioè consideriamo un raggio polarizzato che si rifletta normalmente sopra una lastra trasparente collocata sopra il polo, ammettendo che una tal lastra agisca nel senso del ferro. Il raggio incidente si decomporrà in due raggi circolari opposti, e giacchè il corpo si comporta nello stesso senso del polo di ferro, il raggio circolare sul quale il movimento giratorio, considerato nello spazio, si fa nello stesso senso della corrente, prenderà nella riflessione il coefficiente minore $k_0$, e l'altro il coefficiente maggiore $h_0$.

Indichiamo con $v_1$ la velocità di propagazione entro il corpo trasparente del primo raggio circolare, e con $v_2$ quella del secondo, e chiamiamo V la velocità della luce nell'aria, $n_1$ l'indice del primo raggio circolare, ed $n_2$ quello del secondo. Sarà

$$n_1 = \frac{V}{v_1}, \quad n_2 = \frac{V}{v_2}.$$

In virtù della formola di Fresnel per la riflessione normale, che verosimilmente è applicabile in ogni caso di riflessione normale (come in particolare viene applicata nella riflessione su corpi cristallizzati), dovrà aversi

$$k_0 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}, \quad h_0 = \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}.$$

Ma essendo $k_0 < h_0$ sarà pure

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} < \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}$$

ossia

$$\left(1 - \frac{1}{n_1}\right)\left(1 + \frac{1}{n_2}\right) < \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)\left(1 + \frac{1}{n_1}\right).$$

od anche

$$-\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} < -\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}$$

$$\frac{2}{n_2} < \frac{2}{n_1}$$

$$\frac{2v_2}{V} < \frac{2v_1}{V}$$

$$v_2 < v_1.$$

Dunque la velocità di propagazione del raggio le cui vibrazioni circolari si compiono nel senso della corrente, è maggiore di quella dell'altro raggio circolare, ed il corpo considerato deve per trasmissione far girare il piano di polarizzazione nel senso della corrente magnetizzante.

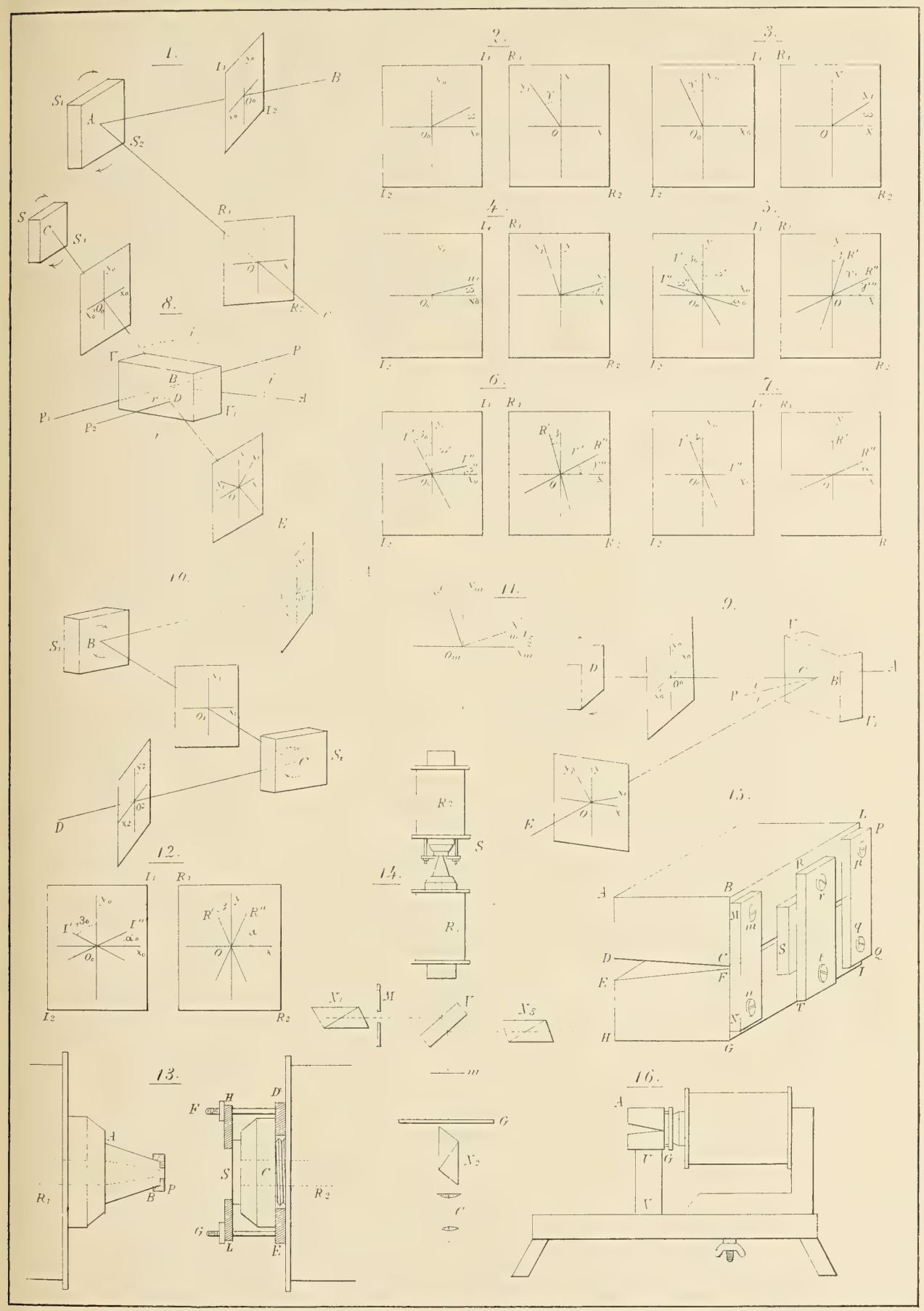
Se il corpo invece di essere trasparente è metallico, il raggio circolare di senso eguale a quello della corrente magnetizzante, oltre che prendere il coefficiente $k_0$,

ritarda di $\varphi_0$ sull'altro raggio circolare, e la vibrazione riflessa, oltre che divenire leggermente elittica, è girata in senso contrario della corrente. Il ferro produce dunque il fenomeno di Kerr nello stesso modo che un corpo il quale faccia girare per trasmissione il piano di polarizzazione nel senso della corrente.

Questa conseguenza sembrerebbe inverosimile, giacchè è noto che in generale i corpi magnetici fanno girare le vibrazioni in senso opposto, e i diamagnetici in senso eguale, della corrente magnetizzante, se il sig. Kundt colle belle esperienze descritte nella sua Memoria citata non avesse appunto dimostrato, che il ferro, il nichel, ed il cobalto, in istrati sottilissimi trasparenti, fanno girare il piano di polarizzazione nel senso della corrente magnetizzante. Ecco dunque che il risultato avuto dal sig. Kundt è d'accordo colla mia teoria.

Anche l'enorme potere rotatorio del ferro trasparente, quale risulta dalle misure del Kundt, è quale poteva prevederlo la teoria (1). Infatti, se si calcolano i due indici $n_1$, $n_2$ per un corpo trasparente dotato di potere rotatorio, e quindi si calcolano $k_0$ ed $h_0$, si riconosce, che qualunque sia il corpo considerato, queste due quantità hanno valori così poco diversi l'uno dall'altro, da rimanere convinti essere impossibile il verificare sperimentalmente l'elitticità della vibrazione riflessa normalmente, quand'anche, per ampliare gli effetti, si potesse far riflettere ripetutamente il raggio fra lastre parallele collocate sui due poli opposti d'una elettrocalamita. Se dunque il ferro dà un'elitticità ben manifesta anche con una sola riflessione, bisogna concluderne che esso sia dotato d'un potere rotatorio incomparabilmente più grande di quello dei corpi trasparenti conosciuti.

(1) Ho io pure verificato quanto sia grande, relativamente alla grossezza, la rotazione per trasparenza di lamine sottilissime di ferro. Ottenni queste lamine di ferro, deponendo il metallo colla elettrolisi di una soluzione di solfato di ferro ammoniacale, sopra lastre di vetro argentate debolmente col metodo di Martin. La grossezza e la bontà dello strato dipendono dalla grossezza dello strato d'argento, dal titolo della soluzione e dalla intensità della corrente adoperata per promuovere l'elettrolisi. Sarebbe troppo lungo l'indicare quali sono le migliori condizioni da adottare; ma dopo alcuni tentativi ognuno riuscirà certo nell'intento.




Lit. Martelli. Roma

## RELAZIONE

letta dal Socio BLASERNA, relatore, a nome anche del Socio MORIGGIA, nella seduta del 6 dicembre 1885, sulla Memoria dei dottori G. COLASANTI e G. MENGARINI, intitolata: *Il fenomeno spettrale fisiologico.*

« I dottori G. Colasanti e G. Mengarini hanno presentato all'Accademia un lavoro sperimentale intitolato: *Il fenomeno spettrale fisiologico.*

« Essi hanno continuato un lavoro, la cui origine sale al compianto nostro collega prof. Boll, il quale studiando l'azione della luce monocromatica sulla porpora retinica scoprì un brillante fenomeno, dirigendo direttamente l'occhio verso il prisma destinato a fornire lo spettro.

« Gli autori hanno ripresa la bella osservazione del prof. Boll, ne studiarono le modalità in una prima Nota inserita nei Transunti di questa Accademia per l'anno 1878. Da quell'epoca in poi essi hanno a varie riprese continuato questo loro studio e ne presentano ora i risultati ottenuti.

« I fatti principali da essi osservati sono i seguenti:

1. « Il disco luminoso, monocromatico, che appare all'osservatore, muta di diametro apparente col colore dello spettro; esso è massimo per la tinta giallo-verde compresa fra le linee D ed E di Fraunhofer.

2. « Il diametro apparente varia nelle diverse ore del giorno e più ancora fra giorno e giorno. Esso pare essere in rapporto stretto colla trasparenza dell'atmosfera e colla posizione del sole, talchè si può sperare di avere in ciò una misura molto sensibile per la proporzione nella composizione variabile dei varî colori dello spettro.

3. « Il diametro è indipendente dalle condizioni, in cui l'occhio dell'osservatore può trovarsi.

« Vista l'importanza del fenomeno, l'esattezza con cui è stato esaminato, e il metodo rigoroso d'indagine impiegato dagli autori, la Commissione propone l'inserzione integrale dell'interessante Memoria negli Atti accademici ».

# Il fenomeno spettrale fisiologico.

Memoria dei dottori G. COLASANTI e G. MENGARINI

(Con una tavola)

## I.

### Descrizione del fenomeno spettrale fisiologico.

Nella seduta della reale Accademia dei Lincei del 2 giugno 1878 (1) presentammo una breve descrizione di alcune misure da noi eseguite sul fenomeno spettrale fisiologico. Queste misure, incominciate nell'antico laboratorio d'anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Roma, si dovettero interrompere all'epoca della ricostruzione del laboratorio stesso e non furono riprese che nell'estate del 1881 nei locali e cogli istrumenti dell'Istituto fisico, gentilmente concessi dal direttore professor Blaserna. La nota sopra citata contiene il riassunto delle antiche misure da noi fatte; nella presente diamo la descrizione del metodo seguìto ed i risultati delle misure, più precise, fatte nell'Istituto fisico.

Il compianto professore Boll, volendo sperimentare l'azione della luce monocromatica sulla porpora retinica, s'avvidde che ricevendo nell'occhio i colori di uno spettro, il più possibilmente puro ed intenso, situandosi a 4 o 5 metri dal prisma, accomodando la visione a distanza infinita e dirigendo l'asse visivo sul prolungamento del raggio osservato si percepiva un brillantissimo fenomeno cui egli diede il nome di fenomeno spettrale fisiologico (2).

Questo fenomeno rientra nella categoria dei fenomeni soggettivi della visione provenienti dalla *macula lutea* e noi ci dispensiamo dal citare la ricca letteratura che su questo argomento si trova registrata nei varî trattati d'ottica fisiologica (3).

Dai fenomeni retinici e corneali propriamente detti, il fenomeno spettrale si differenzia per caratteri tutti suoi proprî. Esso si manifesta come una superficeola lucentissima, uniformemente luminosa, circondata da una miriade di punti splendenti immobili regolarmente ripartiti a mosaico su tutta la superficie di un disco: i punti lucenti sembrano punti incandescenti che spiccano sopra un fondo formato dal colore che si riceve nell'occhio e che si stacca in modo netto, con una periferia esattamente delineata, sul nero della camera oscura.

Se si produca uno spettro con luce quanto più è possibile pura monocromatica, come in appresso diremo, e se si resti per lungo tempo in una camera completamente buia, l'occhio, ricevendo un fascio omocentrico di luce semplice, vede distintamente i punti luminosi disposti a regolare mosaico, alquanto distanti l'uno dall'altro e tutti

(1) Atti della r. Accademia dei Lincei. Transunti, serie 3ª, vol. II, pag. 184.

(2) Atti della r. Accad. dei Lincei, serie 3ª, vol. I, pag. 371.

(3) Vedi: Purkinje, *Beobachtungen und Versuche zur Physiologie des Gesichtssinnes.* — Helmholtz, *Physiologische Optik.* — Aubert, *Physiologische Optik*, in Graefe u. Saemisch, *Augenheilkunde.*

racchiusi in un cerchio che si percepisce come proiettato su di un piano normale all'asse visivo. Questo cerchio ha un diametro sensibilmente costante nella stessa regione dello spettro, ma variabile coi colori osservati, e precisamente ha un massimo nella regione giallo-verde da dove gradatamente decresce verso il rosso ed il violetto. I punti luminosi sono altresì inegualmente splendenti nelle varie regioni dello spettro, seguendo di pari passo la grandezza apparente del disco; cosicchè mentre nella zona giallo-verde sono brillantissimi, nelle altre lo sono sempre meno, sino a che nel rosso scuro o nel violetto estremo sono appena percettibili.

La grandezza apparente del fenomeno varia pure, indipendentemente dalle altre circostanze, quando si allarghi entro certi limiti la fenditura che circoscrive il fascio di luce solare incidente sul prisma.

Nella annessa tavola abbiamo tentato di dare una rappresentazione del fenomeno spettrale fisiologico come si percepisce nelle regioni dello spettro in prossimità delle righe C, D, b, G, di Fraunhofer corrispondenti alle regioni rossa, gialla, verde e violetta dello spettro solare.

Le caratteristiche di questo fenomeno endottico sono:

1° I punti luminosi sono fermi nello spazio.

2° Occupano sempre la medesima posizione relativa.

3° Riproducono costantemente la medesima figura che, una volta veduta, è impossibile dimenticare o confondere con altri fenomeni corneali e retinici.

Allorchè si osserva il fenomeno, se si muova dolcemente la testa in maniera da imprimere all'occhio un moto rotatorio intorno all'asse visivo, si vede tutto il fenomeno ruotare nel medesimo senso e colla medesima velocità angolare che si è impressa all'occhio, ciò che dimostra non essere il fenomeno che la riproduzione di oggetti collegati intimamente coll'organo visivo.

La superficeola luminosa, che in qualsiasi regione dello spettro occupa il centro del disco osservato, ha molta analogia con quella che varî sperimentatori, e particolarmente Burrow (1), hanno notato studiando l'albero venoso di Purkinje corrispondente fisiologicamente al punto di fissazione ed anatomicamente alla parte centrale della *fovea*.

I punti luminosi, osservati dal Purkinje e da G. Müller, che appaiono nel campo visivo percorrendo un piccolo spazio, allorquando si guardi una superficie fortemente illuminata, o secondo G. Rood (2), se si guardi il cielo attraverso un vetro bleu, non sono da confondere coi punti che si osservano nel fenomeno di cui parliamo. Questi sono immobili, uniformemente distribuiti e riproducono il mosaico della *fovea centralis*; quelli, come dice il Vierordt, sono immagini dei corpuscoli sanguigni che corrono entro i vasi retinici.

La disposizione dei punti lucenti che riempiono il disco rassomiglia alquanto a quella della figura 5ª della tavola VII che accompagna il lavoro dell'Exner, *Ueber einige neue subjektive Gesichtserscheinungen* (3).

Ma questa speciale immagine endottica soggettiva che andiamo descrivendo non ha nulla di comune coi fenomeni endottici intraretinali: essa è certamente da ritenersi

(1) Müller's Archiv. 1854.

(2) Rood, *Modern Chromatics*, London 1879.

(3) Pflüger's Archiv. I, 375.

una riproduzione del mosaico della *macula lutea* di che è facile convincersi ricorrendo alla osservazione microscopica dello strato musivo della retina, in confronto colla percezione che risulta dal fenomeno spettrale.

La variabile grandezza del fenomeno nelle varie zone dello spettro e per varie intensità della luce incidente ottenuta col variare la larghezza della fenditura, conferma la nostra asserzione, dappoichè concorda con i risultati ottenuti da Aubert e Foerster mediante il perimetro (1) e da Schelske (2) con l'apparecchio di Tessel.

Allorchè il Boll fece le sue prime osservazioni sul fenomeno spettrale fisiologico presuppose che una tale scoperta non sarebbe restata senza applicazione nella oftalmologia pratica e che particolarmente avrebbe potuto essere utile per la diagnosi della discromatopsia.

Questa supposizione non trovò la desiderata sanzione nei nostri esperimenti. Infatti esperienze con individui affetti da daltonismo ci hanno provato che essi vedono ed apprezzano come individui sani il fenomeno in tutte le sue particolarità, lucentezza dei punti, diametro dell'aureola ecc. salvo il non percepire il colore per il quale sono ciechi.

Lo stesso fatto ripetemmo su noi stessi rendendoci temporaneamente daltonici osservando con vetro rosso rubino nel modo descritto da Seebeck (3) e da Maria Bakowa (4).

Anche il temporaneo disturbo della visione che Rose (5) Schultze (6) Helmholtz Huefner (7) ed altri hanno osservato prendendo della santonina od un santonato per le vie digestive non ha alcuna influenza sullo apprezzamento del fenomeno spettrale. Ripetemmo l'esperienze su di noi, e su altre persone che prima non avevano mai osservato il fenomeno, prendendo ciascuno una dose di grammi 0,50 di santonato di soda e trovammo che i diametri del fenomeno spettrale erano espressi, con sufficiente approssimazione, dalle medesime cifre che prima si avevano osservando con l'occhio normale (8).

Dobbiamo qui notare che parlando di grandezza del fenomeno nelle varie regioni dello spettro non intendiamo di significare che questa sia rappresentata da un valore numerico assoluto, giacchè ripetendo le esperienze anche a qualche ora di distanza nella stessa giornata, lasciando tutto possibilmente nelle medesime condizioni, si trovano nel diametro del cerchio percepito variazioni ora più ora meno pronunciate.

L'andamento generale del fenomeno però, ossia il rapporto fra le varie sue grandezze nelle diverse regioni dello spettro, non rimane per questo sensibilmente alterato, e se non si ricorra a misure di qualche precisione non è facile scorgere nè seguire queste oscillazioni.

(1) *Beiträge zur Kenntniss des indirecten Sehens.* Archiv. fur Ophthalmologie, Bd. III, Abth. 2.

(2) *Zur Farbenempfindung,* l. c. Bd. IX, Abth. 3.

(3) *Ueber den bei manchen Personen vorkommenden Mangel an Farbensinn.* Poggendorff's Annalen Bd. XLII, p. 177.

(4) *Ein Verfahren, kuenstliche Farbenblindheit hervorzubringen.* Zeitschrift fuer ration. Med. 1863. III. Reihe. Bd. XVII, p. 161.

(5) *Ueber die Farbenblindheit durch Genuss der Santonsäure.* Virchow's Archiv. Bd. XIX, p. 522 und XX, p. 245.

(6) *Ueber den gelben Fleck der Retina bei Farbenblindheit.* Bonn. 1866.

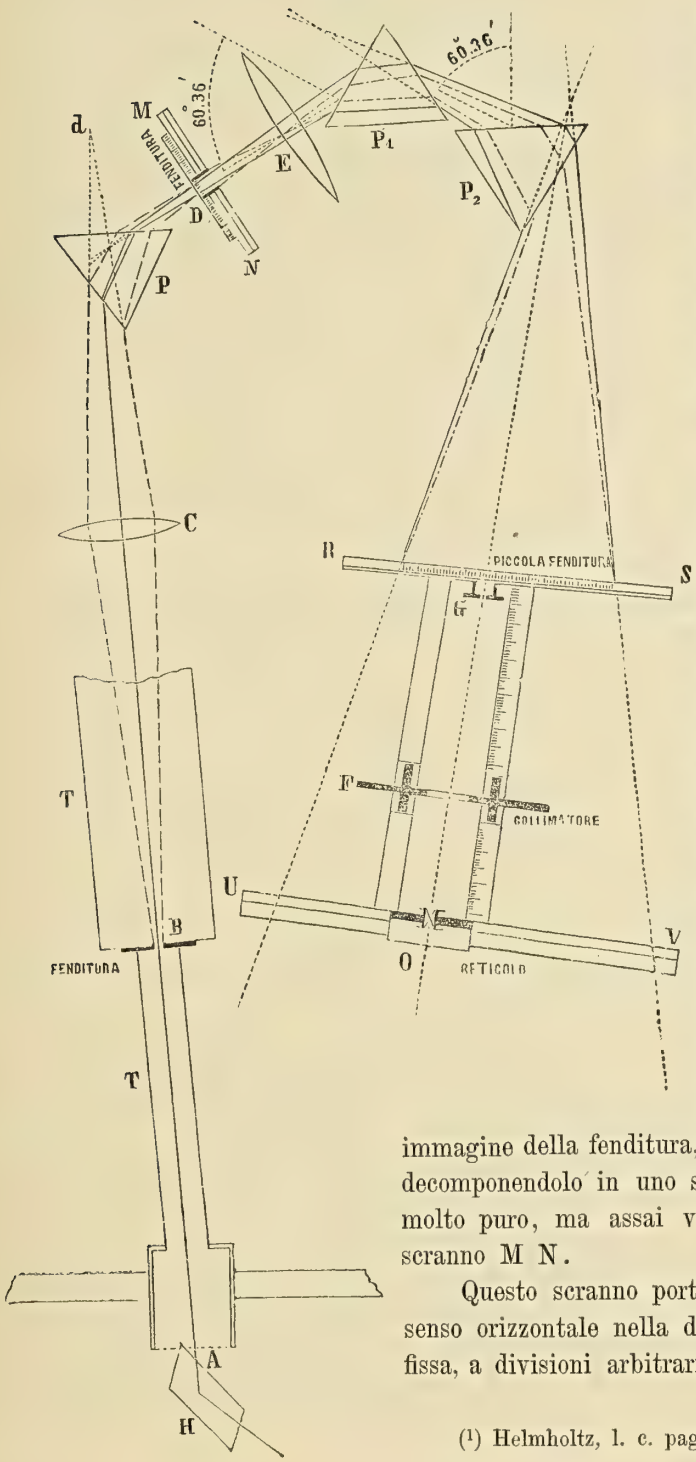
(7) *Versuch einer Erklärung von partieller Farbenblindheit in Sinne del Youngschen Theorie.* Archiv. für Ophthalmologie Bd. XIII. Abth. II, p. 309.

(8) Dobbiamo notare che il disturbo nella nostra visione prodotto dalla santonina non era molto grave ma che si limitava a farci vedere come colorati in giallo verdastro quegli oggetti che prima vedevamo bianchi, ed a farci percepire gli oggetti completamente neri di un grigio bluastro tutto speciale.

## II.

## Metodo di ricerca.

Fig. 1.ª




Per procurarci uno spettro solare composto di luce possibilmente pura monocromatica seguimmo le istruzioni date dall'Helmholtz (1) che noi potemmo scrupolosamente osservare avendo a nostra disposizione la camera ottica dell' Istituto fisico di Roma, molto bene adatta per ricerche di simil genere.

Questa camera possiede una finestra molto sporgente situata a sud dalla quale si può avere il sole dalle prime ore del mattino sin quasi al tramonto. Uno specchio portaluce H (fig. 1ª) situato sul telaio della detta finestra, inviava un fascio di raggi nella direzione A B sopra una fenditura B, discretamente allargata, della quale una lente C proiettava l' immagine in un punto *d* alla distanza di circa 5 metri dal portaluce. Un prisma di vetro qualsiasi P, posto al minimo di deviazione ed interposto sul cammino dei raggi prima della formazione della immagine della fenditura, faceva deviare il fascio in D decomponendolo in uno spettro non molto intenso nè molto puro, ma assai vivo che si proiettava sullo scranno M N.

Questo scranno portava una fenditura mobile nel senso orizzontale nella direzione M N, ed una scala fissa, a divisioni arbitrarie, sulla quale si notavano le

(1) Helmholtz, l. c. pag. 264.

posizioni delle principali righe di Fraunhofer. Per far sì che questo spettro non si spostasse lungo la scala con il lento muoversi del raggio solare incidente, la lente C era stata ricoperta sulle due faccie con uno schermo di carta nera avente una apertura nel mezzo, capace esattamente del fascio che proveniva dalla fenditura. Così regolando lo specchio in modo che punto luce si vedesse sulla carta nera, si era sicuri che lo spettro proiettato su M N si trovava sempre nella medesima posizione.

Facendo scorrere la fenditura D nelle varie regioni di questo spettro, si aveva un fascio di luce colorata non molto pura, risultante cioè di luce bianca e di varî altri colori con predominio di quello corrispondente alla posizione data alla fenditura. Una lente E a lungo fuoco dava un' immagine della fenditura che raccoglievamo sopra un diaframma R S dopo aver fatto nuovamente rifrangere il raggio in due prismi di *flint* pesante di Merz $P_1$, $P_2$, disposti al minimo di deviazione. In questo modo sullo scranno R S si proiettava uno spettro molto più debole in luce del primo, ma in compenso assai puro e molto espanso. I due prismi aveano la terza faccia smerigliata ed erano tutti circondati di carta nera, salvo nella zona che doveva essere attraversata dalla luce. La lente E era del pari ricoperta nel medesimo modo ed in ogni esperienza si aveva cura che il raggio l' attraversasse normalmente alle faccie.

Osservando direttamente lo spettro solare così prodotto, si percepiva il fenomeno spettrale in modo nettissimo e tanto preciso che si sarebbe potuto rappresentare, punto per punto, se la mano fosse sì abile per riprodurre cose cotanto fini e la tavolozza potesse fornire colori così brillanti.

Il fenomeno deve vedersi delineato sopra un fondo assolutamente nero ciò che solo s' ottiene ricoprendo i prismi e le lenti nel modo che abbiamo detto e mantenendo la camera nella più assoluta oscurità. A questo scopo il percorso dei raggi si compiva intieramente entro tubi di cartone, dei quali soltanto due T T sono visibili nella figura: le porte e finestre della stanza venivano ben chiuse mediante apposite tende assai spesse.

Per fissare le dimensioni del disco percepito ci servimmo di un collimatore formato da un foglio di cartone cui era stato tolto un cerchio del diametro di 20 centimetri. Questo foglio rappresentato in F nella figura 1ª era unito ad un sostegno che poteva scorrere su due guide a modo di slitta onde poter portare il cerchio collimatore a diversa distanza dall' occhio, sempre muovendo parallelamente a se stesso e col centro sull' asse visivo. Sulle due guide era una divisione in centimetri e millimetri di cui lo zero corrispondeva colla posizione ove doveva collocarsi l'occhio.

Una fiammella a gas, racchiusa in un cono di latta acconciamente disposto, proiettava sul margine del cerchio una debolissima luce appena sufficiente per distinguere il contorno del cerchio stesso. L' osservatore si poneva in O con l'occhio dietro uno scranno mobile sulla guida U V e portante un foro di circa due centimetri di diametro di cui il centro era determinato dall' incrociamento di un reticolo di quattro fili due a due paralleli. Così ci assicuravamo che la pupilla dell' osservatore era sempre alla medesima distanza dal prisma ed al punto che prendevamo per zero della graduazione. Per ricevere nell'occhio i raggi di luce monocromatica che si volevano osservare, senza essere disturbati dai raggi vicini, sul diaframma R S era stata posta una piccola fenditura anche essa scorrevole da R verso S, dell'altezza di circa 25 millimetri, coi margini molto precisi e bene anneriti. Lo spettro che si proiettava su R S

era alto 60 millimetri, sicchè non considerando le parti estreme alquanto deformate dalla lente, benchè ne fosse stata scelta una a fuoco lungo, rimaneva nel centro una zona molto nitida ove si era sicuri che tutta l'altezza della fenditura fosse abbracciata da luce della medesima lunghezza d'onda. Collo spostare la fenditura D variava la distribuzione della luce nello spettro proiettato su R S. Con esperienze preliminari si venne a conoscere quale posizione si doveva dare alla piccola fenditura G per ogni posizione della fenditura D. Queste posizioni si riferivano ad una scala arbitraria, che la luce stessa dello spettro illuminava, e che fu poi calcolata in lunghezza d'onda nel modo seguente.

Prendemmo le posizioni delle righe B, C, D, E, *b*, F, G di Fraunhofer e di queste deducemmo la lunghezza d'onda colle tavole di Ångström. Col metodo grafico si calcolò la lunghezza d'onda di altre 9 righe, formandoci così in totale 16 punti determinati in misura assoluta ai quali riferimmo tutte le nostre osservazioni.

Il valore della scala arbitraria risultò così espresso:

| Unità della scala arbitraria | Righe di Fraunhofer | Lunghezze d'onda in milionesimi di millimetro |
|---|---|---|
| 40,0 | B | 686,7 |
| 104,6 | C | 656,2 |
| 218,0 | | 616,2 |
| 306,5 | D | 588,9 |
| 355,0 | | 576,2 |
| 415,0 | | 561,5 |
| 489,0 | | 545,5 |
| 580,0 | E | 526,9 |
| 636,3 | *b* | 517,7 |
| 690,0 | | 508,0 |
| 765,0 | | 495,7 |
| 824,0 | F | 486,0 |
| 896,0 | | 476,1 |
| 1084,0 | | 454,9 |
| 1220,0 | | 438,3 |
| 1310,0 | G | 430,7 |

Il modo di esperimentare era il seguente.

Un assistente regolava lo specchio portaluce in modo che il raggio solare entrasse esattamente nel pertugio della lente C: il primo osservatore collocava l'occhio dietro il reticolo O, il secondo, poste le fenditure nella giusta posizione, si recava al cerchio collimatore che spostava dietro le indicazioni del primo sino a che questi vedesse il disco del fenomeno spettrale coincidere col margine del collimatore stesso. Letta sulla scala la divisione cui questo si trovava, s'invertivano le parti, il secondo si recava in O, il primo al collimatore.

In questo modo non si stancava soverchiamente l'occhio e si poteva osservare se noi percepivamo il fenomeno della medesima dimensione.

Sul principio esistevano discrepanze sul nostro modo di apprezzare, ma queste andarono man mano diminuendo sino a che, dopo circa 400 misure, noi potevamo dire di avere educato i nostri occhi a giudicare nell' identico modo. Nelle misure definitive, che più sotto riportiamo, le nostre osservazioni non sono considerate separatamente, ma si dà un numero unico corrispondente a quella distanza del collimatore che sembrava soddisfacente ai nostri occhi.

Per fare una serie di misure, in questo modo si impiegava poco meno di un' ora; le ultime osservazioni erano quindi fatte in condizioni probabilmente diverse dalle prime. Per riportarle al medesimo tempo, dopo averne fatta una serie, procedendo per es. dal rosso verso il violetto, se ne faceva una seconda retrocedendo dal violetto verso il rosso. Di queste due serie si prendeva la media, così si avevano tutte le osservazioni ridotte al medesimo tempo, almeno per quanto riguarda le variazioni continue che avessero potuto avvenire.

Conoscendo il raggio del cerchio collimatore $r$ e la distanza $d$ del collimatore dall' occhio, l' angolo visuale $\varphi$ sotto il quale il fenomeno si percepisce è dato dalla relazione:

$$\text{tang}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d}.$$

Questa relazione valevole per i casi di visione diretta non poteva, senza dimostrazione, essere accettata anco per il nostro caso. Perciò facemmo quattro serie di misure servendoci di cerchi collimatori di 10, 15, 20, 25 centimetri di diametro ed i valori di $d$ che risultarono da queste esperienze furono trovati con sufficiente approssimazione nel rapporto di 2:3:4:5, ciò che giustifica l' uso della precedente formola.

Nella nota preventiva cui abbiamo fatto accenno nel principio di questa memoria assegnammo all' angolo $\varphi$ i seguenti valori dedotti dalla media 27 serie di misure fatte dal 28 aprile al 20 luglio 1878

| | | |
|---|---|---|
| Rosso medio . . . . . | $\varphi =$ | 6° |
| Arancio medio . . . . . | » | 12° |
| Giallo alla riga D . . . . | » | 30° |
| Giallo-verde fra D ed E. | » | 36° |
| Verde medio . . . . . | » | 31° |
| Verde alla riga F . . . . | » | 11° |
| Turchino alla riga G . . | » | 6° |

Interrotte queste misure e riprese molto tempo dopo, nel Maggio del 1881, in condizioni differenti e cogli apparecchi molto più perfetti che abbiamo descritto, giudicammo necessario di rifare molte serie di misure affine di riabituare i nostri occhi ad apprezzare nel medesimo modo. Questo lavoro preparatorio non fu tralasciato sino a che fra i nostri giudizî non vi era più discrepanza.

Dopo ciò, eseguimmo nei giorni 6, 8, 9, 10 luglio 13 serie di misure che ritenemmo come definitive. In ciascuno dei giorni 6, 8 e 9 facemmo tre serie di misure, l' una intorno alle 10 a. m., l' altra intorno al mezzodì, la terza intorno alle 2 p. m. Nel giorno 10 fu fatta ancora una serie intorno alle 3 p. m.

Nella seguente tabella è riportato il valore in gradi dell'angolo visuale $\varphi$ misurato nelle 13 serie.

| SERIE | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | XIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| POSIZIONI SULLO SPETTRO | | VALORI DELL'ANGOLO $\varphi$ | | | | | | | | | | | | |
| Righe di Fraunhofer | Lunghezze d'onda in milion. di mm. | 6 Luglio | | | 8 Luglio | | | 9 Luglio | | | 10 Luglio | | | |
| | | 11 a.m. | 12 1/2 p.m. | 2 p.m. | 10 a.m. | 12 m. | 2 p. | 10 1/2 a.m. | 12 1/2 p.m. | 2 p.m. | 10 a.m. | 11 3/4 a.m. | 1 1/2 p.m. | 3 p.m. |
| B | 686,7 | 6°51′ | 6°51′ | 6°51′ | 7°13′ | 8°21′ | 8°21′ | 6°2′ | 6°2′ | 6°2′ | 7°10′ | 6°11′ | 6°11′ | 6°11′ |
| C | 656,2 | 16,2 | 15,48 | 15,12 | 9,22 | 10,55 | 11,12 | 9,21 | 9,21 | 9,21 | 8,36 | 7,37 | 8,24 | 8,24 |
| | 616,2 | 24,32 | 24,46 | 24,22 | 14,42 | 14,47 | 14,44 | 15,11 | 15,11 | 15,11 | 12,16 | 12,24 | 12,5 | 12,5 |
| D | 588,9 | 30,14 | 30,6 | 30,6 | 23,58 | 24,58 | 25,46 | 26,10 | 25,36 | 25,46 | 20,18 | 25,4 | 21,22 | 27,58 |
| | 576,2 | 32,20 | 32,48 | 31,44 | 25,34 | 26,36 | 27,32 | 29,16 | 28,4 | 28,4 | 27,58 | 32,46 | 30,14 | 27,10 |
| | 561,5 | 33,56 | 34,42 | 32,42 | 26,4 | 27,36 | 26,40 | 30,38 | 30,14 | 31,2 | 27,58 | 31,54 | 25,36 | 23,50 |
| | 545,5 | 34,12 | 36,52 | 33,42 | 25,36 | 26,10 | 25,4 | 20,38 | 31,02 | 28,58 | 20,12 | 23,22 | 20,52 | 20,20 |
| E | 526,9 | 30,14 | 31,52 | 28,46 | 23,48 | 22,18 | 22,36 | 20,38 | 24,20 | 21,48 | 16,34 | 17,14 | 16,54 | 16,58 |
| *b* | 517,7 | 26,12 | 27,26 | 23,4 | 20,58 | 20,56 | 19,16 | 20,16 | 20,12 | 20,16 | 14,36 | 13,54 | 15,10 | 14,14 |
| | 508,0 | 18,16 | 20,14 | 18,20 | 16,53 | 17,15 | 16,34 | 16,38 | 16,44 | 16,32 | 13,6 | 11,25 | 12,54 | 13,26 |
| | 495,7 | 14,16 | 14,36 | 13,54 | 13,31 | 13,35 | 13,25 | 14,33 | 14,44 | 15,17 | 9,14 | 8,48 | 9,9 | 9,50 |
| F | 486,8 | 11,32 | 11,54 | 11,13 | 8,40 | 10,53 | 10,53 | 9,56 | 10,2 | 9,46 | 6,56 | 7,28 | 6,22 | 6,47 |
| | 476,1 | 10,2 | 10,6 | 8,56 | 9,23 | 9,7 | 9,6 | 9,20 | 9,0 | 9,0 | 7,00 | 6,54 | 6,44 | 7,2 |
| | 454,9 | 7,20 | 7,57 | 6,39 | 7,57 | 7,1 | 7,24 | 7,7 | 7,26 | 7,8 | 6,48 | 6,6 | 7,8 | 6,23 |
| | 438,3 | 6,50 | 6,17 | 6,39 | 6,44 | 6,32 | 6,32 | 6,22 | 6,22 | 6,22 | — | — | — | — |
| G | 430,7 | 5,37 | 3,30 | 3,30 | 6,2 | 6,2 | 6,2 | 5,37 | 5,37 | 5,37 | 5,37 | 5,37 | 5,37 | 5,37 |
| STATO DEL CIELO | | Bellissimo | | | Bello, aria caliginosa | | | Bello, cielo bianchiccio | | | Bello, leggermente velato | | | |

## III.

### Discussione dei risultati.

Dall' esame della precedente tabella si giunge ad importanti conclusioni sulle variazioni dell'angolo sotto il quale si percepisce il fenomeno spettrale fisiologico nelle varie regioni dello spettro solare. Per rendersi meglio conto di questo andamento abbiamo delineato, servendoci delle 13 serie di osservazioni, altrettante curve che per ascissa hanno le posizioni della scala sulla quale furono fatte le osservazioni, e per ordinate i valori corrispondenti a tang $\varphi$.

Lo spettro che noi proiettavamo sulla scala R S (fig. 1ª) essendo uno spettro prismatico, la variazione angolare necessaria per avere una medesima variazione nella lunghezza d'onda era per conseguenza molto maggiore nel violetto che nel rosso. Siccome le nostre osservazioni erano fatte dividendo lo spettro che si proiettava su R S in tanti intervalli uguali, se nel rappresentare graficamente l'andamento del fenomeno avessimo voluto misurare le ascisse sulla scala normale, quale si ottiene nei spettri di diffrazione, ne sarebbe seguìto un diradamento dei punti osservati specialmente nelle zone gialla, rossa e verde, ove è più importante studiare le variazioni del fenomeno spettrale, ed un addensamento in quelle turchina e violetta, ove queste sono quasi insignificanti.

Affine di dare una rappresentazione più verosimile del fenomeno studiato sullo spettro prismatico abbiamo preferito prendere per ascissa numeri proporzionali alla distanza fra i punti d'osservazione, calcolandone poi il valore in unità della scala assoluta in lunghezza d'onda.

Nell'annessa tavola è riprodotta questa scala ad un quinto circa della sua vera grandezza: al disopra di essa sono rappresentate nella medesima proporzione le principali righe dello spettro solare.

Per ordinate abbiamo preso i valori di tang $\varphi$ espressi in parti di raggio; questi valori sono stati riportati sulla scala a sinistra della tavola moltiplicandoli per 100 così tutti i particolari nell'andamento del fenomeno riescono sufficientemente ingranditi.

Le curve corrispondenti alle tre osservazioni del giorno 6 luglio sono segnate in turchino; quelle dell' 8 in rosso; quelle del 9 in giallo; quelle del 10 in verde. In ogni giorno i punti riferentisi alla osservazione antimeridiana sono marcati col segno $\odot$, quelli dell'osservazione del mezzodì col segno $\times$, quelli del pomeriggio col segno $+$, e finalmente i punti delle osservazioni delle 3 pomeridiane del 10 luglio col segno $\triangle$.

Dall'esame di queste curve si possono dedurre le seguenti conclusioni:

1° I valori angolari sotto i quali si percepisce il fenomeno spettrale fisiologico seguono costantemente lo stesso andamento; crescono dal rosso sino ad una zona posta fra le righe D ed E di Fraunhofer e da questa diminuiscono verso il violetto.

2° Ogni serie presenta un massimo ed uno solo, ma la posizione di questo massimo oscilla nelle nostre esperienze fra le lunghezze d'onda

$0^{mm},000545$
$0^{mm},000580$

3° Il valore assoluto dei massimi è diverso da serie a serie di giorni diversi e fra serie e serie dello stesso giorno; le variazioni nel valore massimo di $\varphi$ nella stessa giornata giungono presso l'11 %.

4° I confronti fra giorno e giorno non si possono fare con grande sicurezza dacchè è difficile garantire che le fenditure siansi conservate colla stessa apertura ed i prismi nella stessa posizione. Con questa riserva però possiamo dire che le variazioni riscontrate nei massimi raggiungono il 29 %.

Rammentiamo che le curve da noi disegnate ingrandiscono le differenze intorno ai massimi avendo per ascissa i valori di tang $\varphi$, e che perciò ogni deduzione numerica va fatta sui valori di $\varphi$ dati nella tabella a pag. 10.

5° Nei giorni in cui il sole è più splendente tutti i valori di $\varphi$ sono più alti e le curve presentano un aspetto assai regolare. Nei giorni di sole leggermente velato o di aria un poco caliginosa (come accade spesso nelle giornate estive) si hanno per $\varphi$ valori più piccoli e l'andamento delle curve non è più molto regolare.

6° Nelle diverse ore dello stesso giorno il massimo di $\varphi$ cambia per grandezza e posizione; alcune volte si vede procedere verso il violetto, altre retrocedere verso il rosso senza nessuna apparente regolarità.

Queste ultime osservazioni tenderebbero a provare che esista una relazione fra la grandezza apparente del fenomeno, la forma della curva e la quantità e qualità di luce mandata dal sole a seconda dei diversi assorbimenti prodotti dall'atmosfera.

Dobbiamo infine notare, per quanto riguarda la forma della curva, che lo specchio adoperato era di metallo speculare e che ciò può avere influenza nella proporzione dei colori nello spettro, avendo osservato l'Helmholtz che gli specchi assorbono alquanto i raggi rossi ed arancio (1).

L'esattezza nelle nostre misure fu portata nella determinazione di $d$ sino al millimetro, e questo grado di precisione è più che sufficiente per il nostro caso. Difatti è facile calcolare che per produrre una variazione di 1° nel valore di $\varphi$ occorre spostare il collimatore:

| | | | |
|---|---|---|---|
| alla riga | B | di millimetri | 244 |
| » | D | » | 19 |
| » | E | » | 27 |
| » | F | » | 141 |
| » | G | » | 251 |

si può adunque con sicurezza ritenere esatto il valore di $\varphi$ sino a 5 primi.

(1) Helmholtz, l. c. pag. 262.

Nelle curve della tavola la differenza di un grado nei valore di $\varphi$ produce in ascissa la variazione seguente;

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| alla riga | B | unità | 1,8 | cioè millimetri | 2,7 |
| » | D | » | 2,4 | » | 3,6 |
| » | E | » | 2,1 | » | 3,2 |
| » | F | » | 1,8 | » | 2,7 |
| » | G | » | 1,7 | » | 2,5 |

Si vede da ciò che occorre maggior precisione nelle misure appunto nella zona ove il fenomeno è più ricco in luce, e dove, appunto perciò, esso è più facilmente percettibile. Per riguardo alle curve si vede che nelle zone intorno ai massimi gli errori di misura producono divergenze pari ad una volta e mezzo quelle delle altre regioni. Ma anche in queste zone si possono nettamente vedere i cinque primi che corrispondono ad una variazione della ordinata di circa $^4/_{10}$ di millimetro.

Vogliamo per ultimo esaminare la questione se le variazioni osservate nel fenomeno spettrale fisiologico non fossero da addebitarsi all'occhio al cui giudizio tutto è affidato.

Una garanzia contro possibili disturbi nella visione era già presa col fare le misure in due osservatori e col ritenere buone solo quelle osservazioni nelle quali si apprezzava ugualmente.

L'aver veduto che alterando la visione con l'uso della santonina non cambiava sensibilmente l'apprezzamento del fenomeno dà motivo per ritenere che le variazioni non siano da attribuirsi a causa soggettiva. Una prova diretta era però necessario di avere per dimostrare che con raggi di luce in identiche condizioni si aveva una identica grandezza del fenomeno spettrale.

Esperimenti con lampade elettriche ad arco voltaico, sia con regolatore Serrin, sia con regolatore Siemens differenziale, non ci diedero alcun risultato per le continue oscillazioni nella lunghezza e nella posizione dell'arco. Dobbiamo alla gentilezza del cav. Pouchain, direttore della Società del gas di Roma, lo aver potuto disporre per questa ricerca di una lampada elettrica *soleil*, di quelle in uso per la illuminazione dei piazzali di manovra alla stazione della ferrovia di Roma.

La lampada *soleil* ha l'arco voltaico racchiuso in un blocco di marmo che viene riscaldato dall'arco stesso al color bianco divenendo così una sorgente di luce intensissima, dolce e costante. Il blocco di marmo funziona come un magazzino di calore che toglie ogni saltuaria variazione nella intensità della luce emessa. Per queste esperienze la disposizione fu all'incirca quella rappresentata nella fig. 2. In luogo dello specchio H era posta la lampada elettrica ed il collimatore aveva il diametro di 97 millimetri. Lo spettro presentava le strie del calcio brillantissime sopra un debole fondo continuo.

Le misure si fecero sempre sopra una stria nel giallo-verde dove si percepiva molto bene il fenomeno spettrale. Esse furono eseguite dal 15 al 21 aprile e dal 14 al 24 maggio 1884. La corrente che alimentava la lampada elettrica non aveva sempre la medesima intensità: un elettrodinamometro intercalato nel circuito faceva vedere un leggero aumento nelle prime due ore d'accensione ed una diminuzione regolare e costante in seguito. Il fenomeno spettrale seguiva esattamente questo andamento

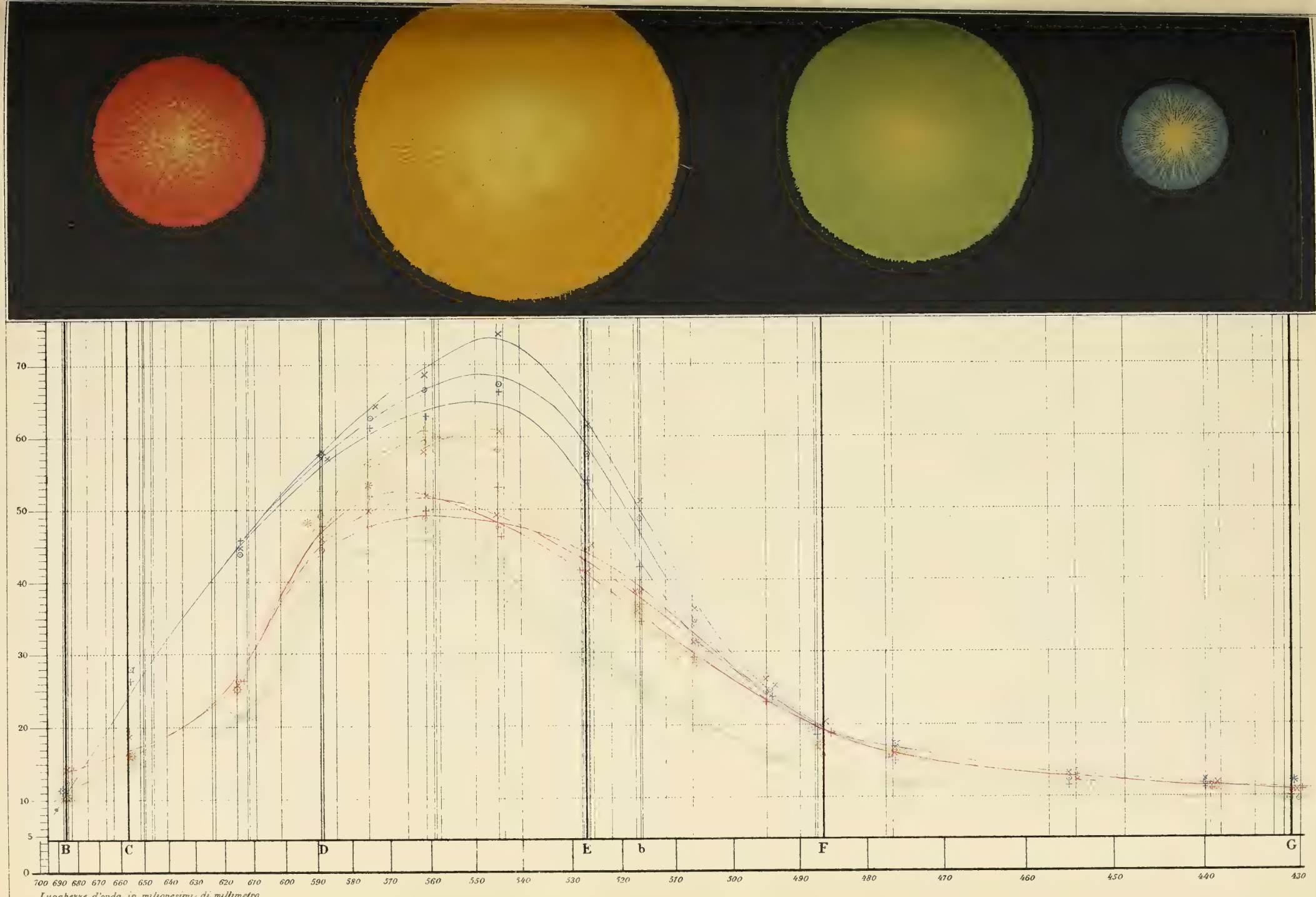
senza saltuarie variazioni. Le piccole differenze fra osservazione ed osservazione non giungevano mai a 10′.

In un' altra Memoria saranno descritte queste esperienze con tutti i particolari: per ora ci basta di constatare che avendo adoprato una sorgente di luce di composizione e di intensità costante, il fenomeno spettrale fisiologico aveva pure dimensioni costanti, e che variando la intensità luminosa di questa sorgente pure il fenomeno spettrale variava nel medesimo senso.

---

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

I dischi colorati rappresentano il fenomeno spettrale fisiologico come si osserva in corrispondenza delle righe C, D, *b*, G di Fraunhofer, le curve l'andamento del fenomeno stesso nelle varie zone dello spettro solare.




Lit Bruno e Salomone Roma

G. Mengarini dis.

# RELAZIONE

letta dal Socio Pigorini, relatore, a nome anche del Socio A. Cossa nella seduta del 21 febbraio 1886 sulla Memoria del sig. Domenico Lovisato intitolata: *Una pagina di preistoria sarda.*

« L'autore innanzi tutto descrive esattamente gli oggetti dell'età della pietra e gli avanzi animali trovati insieme in un terreno artificiale, a mezza strada fra Sassari ed Osilo. Le giudiziose sue osservazioni e le opportune comparazioni che ha saputo fare dimostrano, che ivi esistette una stazione nell'età neolitica, e ne mettono in rilievo la importanza per l'archeologia primitiva della Sardegna.

« Appresso l'autore ricorda quelle singolari grotte artificiali, sparse in varî punti dell'isola, comunemente dette *Domus de gianas,* parla delle loro particolarità architettoniche, rammenta le somiglianze che hanno con altre esistenti nella Sicilia, diffondendosi sopra di alcune da lui con molta cura esplorate. Crede il Lovisato che le *Domus de gianas* sieno tombe di abitatori fra più antichi della Sardegna, e inclina ad attribuirle all'età della pietra. Gli argomenti addotti a sostegno della sua opinione sono per fermo meritevoli di attenzione, e noi crediamo non siavi fin qui alcun studio migliore compiuto sopra tali monumenti.

« La Memoria si chiude con un elenco di parecchi strumenti di pietra sardi dell'età neolitica, pregevole per l'esattezza delle descrizioni e per le notizie sulla composizione chimica delle roccie colle quali sono stati formati. Alla Memoria poi sono unite due tavole con figure utilissime per avere chiaro concetto di taluni dei fatti più importanti esposti.

« La Commissione propone che tale lavoro sia inserito negli Atti dell'Accademia ».

# Una pagina di preistoria sarda.
## Memoria di DOMENICO LOVISATO

(Con due tavole)

Nella mia breve Relazione del 18 maggio 1879 sulla gita inaugurale della allora esistente Sezione di Sassari del C. A. I. al castello d'Osilo (1) accennava brevemente ad una stazione litica, che si trova ad un'ora e mezzo da Sassari, quasi a metà strada fra questa città e la ridente borgata d'Osilo, e prometteva pubblicare apposita Memoria, sia allo scopo di completare la descrizione degli oggetti rimasti in sospeso per non aver potuto compiere gli studi opportuni, sia ancora per descrivere tutto ciò che avrei trovato in novelle escursioni.

M'accingo ora appena a mantenere quella promessa, ma ciò faccio tanto più volontieri in quanto che altre importanti questioni della stessa o d'indole affine vengono ad aggiungersi, non ultima fra esse quella di certe curiosissime grotte, che in Sardegna sono numerosissime e presentano immenso interesse pel paletnologo, cui è offerto nuovo e bellissimo problema, come pure l'altra della illustrazione di varie accette rinvenute nell'isola, molte di mia proprietà, altre appartenenti a collezioni particolari.

Muoverò dalla stazione sopra accennata, distesa sopra un' area quadrangolare di più che 200 m. di lato, presso al ciglione miocenico (2), che sta a cavaliere della cantoniera di Abealzu, dove il sedimento del terziario medio si sovrappone al vulcanico nella località conosciuta col nome di *Calancoi*, a circa 400 m. sul livello del mare, sollevandosi quel colle per più che 190 m. sopra l'antico castello di Sassari.

Dal punto più elevato vedesi tutta la distesa della stazione, che all'occhio appare rettangolare, ma che invece è trapezia da nord-ovest a sud-sud-est passando per sud.

(1) D. Lovisato, *Gita inaugurale della Sezione di Sassari del C. A. I.* ecc. Sassari, tipografia G. Dessì, 1879; da pag. 18 a pag. 22.

(2) Nel febbraio 1879 dalla Calabria passava in Sardegna, dove istituiva tosto una Sezione del C. A. I., ma non si potè fare per causa delle pioggie persistenti la inaugurazione prima del 18 maggio. Fino allora quindi io non aveva potuto muovermi per fare una seria esplorazione scientifica ed è perciò che nelle pagine descrittive, stampate in quella occasione mi sono attenuto a quello che dissero il Lamarmora ed i suoi successori sulle formazioni geologiche percorse. Quindi ho sbagliato di pianta nel considerare quelle marne, quei tufi e quei calcari, come appartenenti al *pliocenico*, mentre esse sono tutte formazioni *mioceniche:* e siccome ogni galantuomo, ma specialmente un cultore della scienza deve essere più amico del vero, che di sè stesso, così, sebbene l'articolo presente sia d'indole paletnologica, mentre gli errori sono geologici, mi sia permesso di qui rettificarli; perciò alle pagine 9, 10, 13, 20, 26, 54 e 55 alle parole *pliocenico, formazione terziaria recente, terziario superiore*, ecc. si sostituiscano quelle di *miocenico*, di *formazione terziaria media*, di *terziario medio*, ecc., essendo effettivamente *miocenici* e non *pliocenici* quei sedimenti.

Alle numerose selci, alle ossidiane, ai frammenti di rifiuto d'ogni specie di diaspro, di agata e di quarzo, ai cocci senza numero, alle ossa di animali che convivevano con quei primi uomini, alle valve di *cardium edule*, ecc., a tutta questa roba ricordata, molti altri oggetti devo ora aggiungere per completare meglio la descrizione di quella stazione.

Ricorderò anzitutto una cuspide di freccia a mandorla di ossidiana (fig. 1), di considerevole grandezza, essendo lunga 52,5 mm. e 26 larga, alquanto allungata, trasparente agli spigoli, finiente in punta più acuta da una parte che dall'altra, rimarchevole per la regolarità della forma in generale e del contorno in particolare, nonchè pel complessivo accurato lavoro con cui fu ridotta a compimento: sui margini laterali non presenta molti segni di evidente logoramento per l' impiego fattone come punta o cima di gettata.

Delle parti superiori di tre azzine, trovate sempre nella stazione nel maggio 1879, il 14 e 18 novembre 1883 parlerò nella descrizione delle azze. Rammenterò piuttosto qui una superba punta di freccia intiera (fig. 2), esteriormente di color bluastro biancheggiante, per essere rimasta esposta all'aria per un lungo periodo di tempo, caratterizzando invece le selci scheggiate di fresco un colore nero bluastro. Coperta da una patina veneranda, ha la lunghezza di 25 mm. per 16 di larghezza.

Presso il punto più elevato della stazione rinvenni pure un bel frammento di lunga cuspide di freccia (fig. 3) di selce schistosa cinerea e nera, molto ben lavorata, mancante della punta, del peduncolo e di una delle alette. A primo tratto si potrebbe prendere questo avanzo per un pezzo di giavellotto, ma la presenza di una delle alette viene a giustificare il suo essere di punta di freccia.

Non parlerò di altri frammenti di punte di freccia rinvenute al pendìo della stazione e lungo le trincee della strada provinciale, che all'alto l'attraversa, nè dei numerosissimi pezzetti di coltellini d'ossidiana.

A ciò però devo aggiungere alcuni pestelli, molti macinelli e brunitoi, una fusaiuola, una quantità di cristalli di quarzo, un numero infinito di cocci di vasi, nonchè valve di molluschi ed ossa di mammiferi, che servirono di pasto agli abitatori di quella stazione.

I pestelli sono di una forma litologica corrispondente alla così detta *pietra forte* del Monreale di Bonaria di Cagliari, appartenente al miocene, o di *andesite*, che si trova subito sotto la stazione, mentre la prima è roccia in posto. Sono altrettanti cubi cogli spigoli e cogli angoli troncati ed arrotondati, come se avessero subìto uniforme rotolamento sopra ogni lato, con un certo incavo nella parte centrale delle faccie: l'asse sarebbe da 5 a 6 cent. Non mi opporrei alla supposizione che questi oggetti abbiano potuto servire per pesi da rete.

I macinelli sono più frequenti; tutti i rinvenuti da me sono di andesite, ma di varie dimensioni e quasi sempre rotti.

Tanto i pestelli che i macinelli troverebbero riscontro fra quelli del Grande Riparo di Molina alle Scalucce nel comune di Breonio Veronese in provincia di Verona, come pure fra gli oggetti delle palafitte del lago di Garda.

Solo non ho saputo comprendere a che abbiano potuto servire certi parallelepipedi perfettamente lisciati sopra tutti i lati e dei quali un esemplare si conserva nel Museo di Mineralogia dell'Università di Sassari.

Le fusaiuole non sono di pietra, come nelle palafitte svizzere della stessa età, ma di terra cotta; però, se tutte furono delle dimensioni del grosso frammento da me colà trovato, per la loro grandezza, per la grossezza esse non trovano riscontro, che in alcune pur di Sardegna, che si conservano nel Museo civico di Milano; in altra più piccola, ma di forme così grosse nella parte preistorica dell'isola d'Elba della collezione Pisani dello stesso Museo, e lontanamente in quelle della valle della Vibrata e in alcune poche che si conservano nel Museo di Torcello e provenienti dall'estuario veneto.

Nella collezione Orsoni, che ora si trova nel Museo preistorico di Roma e che si riferisce a scavi eseguiti in grotte esistenti nel Capo di S. Elia presso Cagliari, ma che non so quali possano essere state, non figura niente di analogo ai nostri pestelli, brunitoi e fusaiuole.

Dissi che non so quali possano essere state queste grotte dell' Orsoni: infatti mentre per molti sarebbero quella dei Colombi e l'altra del Vitello Marino, come le più grandi esistenti al Capo di S. Elia e quindi le più probabili, a me sembra che nè l'una nè l'altra sieno le esplorate dall'Orsoni, giacchè la prima è riempita da tale quantità di massi e di ciottoli calcari, i quali ricoprono tutto il piano dall'ingresso al fondo, che in nessun punto manifesta uno scavo eseguito; solo qua e là alcune cavità sono riempite dagli escrementi più che di pipistrelli, dei molti piccioni, dai quali la grotta ripete il nome: lo speco poi è troppo ampio e troppo aperto, perchè l'uomo primitivo abbia potuto sceglierlo per sua abitazione; non dirò dei grossi massi, che ora ne ingombrano in buona parte l'apertura, perchè potrebbero essere caduti da poco dall'alto della volta, ma il trovarsi essa grotta oggi colla sua soglia al livello del mare, mentre tutta la Sardegna si trova in uno stadio di sensibile sollevamento, che nella grotta stessa viene stupendamente mostrato dalle pareti forate dai litofagi marini, m'induce ad affermare con sicurezza non poter essere questa una delle grotte in cui l'Orsoni avrebbe eseguiti i suoi scavi: la seconda poi del Vitello Marino è oggi invasa dal mare così che non si può accedere ad essa che in barca; devo però confessare che questa seconda grotta non fu da me visitata.

I cristalli di quarzo jalino incolori sono numerosi e derivano dalla formazione vulcanica, che ha sollevato il calcare miocenico del ciglione: sono interi per la massima parte, pochi rotti e solo taluni manifestano un tentativo di lavorazione con qualche scheggiatura visibile: ritengo che essi abbiano servito semplicemente come oggetti d'ornamento.

Rimangono i cocci, che noi troviamo in numero infinito, appartenenti a vasi di tutte le forme dalle più strane alle più comuni. Tutti spettano a vasi fatti a mano, per la maggior parte grossolani, composti non di buona argilla plastica, ma di un tritume di particelle cristalline impastate con un'argillaccia: infatti noi vediamo alle volte grossi grani di quarzo e grosse particelle di feldispato impastati con quell'argilla a bella posta per dare maggiore consistenza ai vasi (1). In alcuni però dalle pareti sottili e ben levigate, quasi lucenti, vediamo mancare il tritume, ma l'argilla

(1) Tarso, *Le stazioni lacustri dei Laghi di Monate e di Varano di P. Castelfranco.* Atti della Società italiana di scienze naturali, vol. XXI, pag. 403.

grossolana, formata artificialmente e che non manca mai, è coperta da altra più fina a guisa di ingubbiatura. Però in mezzo a tante rozzissime stoviglie rinvenni buona parte d'un vasetto, di forma non comune, elegante, colle pareti così sottili come possono essere le nostre migliori stoviglie: rinvenni del pari molte anse appartenenti a grossissimi vasi, talune curiosissime con un foro cilindrico, come orecchietta per sospensione.

In generale non mostrano alcuna traccia di cottura, o ne manifestano una assolutamente superficiale, ma più che per essere stati assoggettati ad una cottura troppo debole, per essere stati di frequente esposti all'azione del fuoco per la preparazione delle vivande: quindi noi vediamo in quest'ultimo caso arrossata la superficie esteriore e non sempre in tutta la sua estensione, mentre la parte interna è perfettamente nera, come si osserva in antichissime stoviglie di altre stazioni.

Ma se nella fattura dei vasi non v'entra il tornio e questi accennano per lo più ad un'arte ceramica, che non avea fatto grandi progressi, non mancano anche gli ornamenti, giacchè ne incontriamo parecchi con ornati a graffiti a rozze linee con figure triangolari o meglio angolose, in generale geometriche, e taluni perfino coll'ornamento alla greca.

Dirò anzi che pei confronti che ho potuto fare, i miei cocci graffiti corrisponderebbero a quelli raccolti dall'Orsoni nelle accennate caverne di S. Bartolomeo al Capo di S. Elia e che in quella collezione, che si trova, come già dissi, al Museo preistorico di Roma, portano il n. 25848. Così le stoviglie con manico rassomiglierebbero perfettamente al n. 25925, comprendente avanzi di vasi notati dall'Orsoni fra gli oggetti rinvenuti nel punto della caverna, ove secondo lui abitavano i troglodíti. Anche i vasetti, che appartengono alla stessa divisione (n. 25848) degli oggetti rinvenuti nel secondo degli strati, che secondo l'Orsoni componevano il suolo della caverna, ove i troglodíti deposero i loro morti, rassomigliano perfettamente ai frammenti dei piccoli vasi da me trovati nella stazione; così dicasi dei cocci neri ed anche lucidati e più sottili, benchè taluni non ammettono come molto seria la distinzione che si possa fare fra cocci e cocci.

In ogni modo però per quanto rozzi sieno complessivamente quegli avanzi, non possiamo attribuirli all'uomo nello stato primitivo, obbligato a rifugiarsi, come un animale qualunque, in una caverna, ma all'uomo che nell'arte ceramica e quindi nel resto avea fatto qualche progresso.

Gli avanzi dei pasti, che constano di conchiglie marine e di ossa di mammiferi, ci presenterebbero l'uomo di questa stazione come dedito alla pesca ed alla caccia, mentre d'altra parte i macinelli, i pestelli, ecc. ce lo direbbero anche agricoltore, offrendosi a ciò molto bene i campi circostanti suscettibili di ogni sorta di coltura.

Dunque il nutrimento di quel nostro primo uomo consisteva non solo in molluschi marini come il *cardium edule* L., la *purpura haemastoma* L., il *monodonta fragarioides* Lk. (*trochus turbinatus* Born.), abbondando specialmente il primo di cui si trovano in numero infinito le valve, ma ancora in carne di cervo, di daino, di cinghiale, di bue, di capra, ecc. di cui troviamo là numerose ossa, alcune delle quali anche combuste nello strato di terriccio nero ricordato, che copre il calcare in posto.

Che la elevazione, sulla quale furono trovati gli oggetti ricordati, oltre i frammenti delle tre azzine, che verranno in seguito illustrate, sia una vera stazione litica, cioè una vera abitazione dell'uomo preistorico dell'età della pietra, e non terreno erratico colà trasportato dalle acque od in altro modo qualsiasi, ce lo dicono ad evidenza tutti gli oggetti rinvenuti colà e descritti, i quali non offrono alcun indizio di sofferto sfregamento, ciò che mostrerebbero, se fossero stati dilavati od il terreno, che li comprende, fosse stato là steso per una causa qualunque. Si aggiunga a tutto ciò che l'altezza sul livello del mare di quel punto è la maggiore che s' incontri fra Sassari ed Osilo. Che però quel terreno nero sia stato rimaneggiato per la coltura dei campi ne abbiamo la prova non solo nella nessuna regolarità del deposito, ma ancora nei numerosissimi cocci ridotti a frantumi, nelle ossa e nelle valve di conchiglie infrante, nei pestelli e nei macinelli rotti.

Si noti che nella immensa quantità di valve del *cardium edule* non ne rinvenni neppure una forata ad arte presso l'apice, come frequentemente si trovano nelle stazioni litiche ed anche nelle terremare dell'età del bronzo e che ricordano gli ornamenti da appendere al collo delle prime popolazioni. Però anche trovando qua e là valve di *cardium,* di *trochus* e di altri molluschi forate ad arte converrà andar cauti nel riferire quelle conchiglie ad un'età molto lontana dalla nostra, avendo io veduto alcuni mesi fa delle collane di *cardium edule* e di altre conchiglie al collo di alcune ragazzine ad Ullassai nel circondario di Lanusei (1).

Se dalla stazione noi volgiamo lo sguardo verso *Badde Inza* in direzione ovest-nord-ovest e nord, al di là di campo, tutto sparso di grossi massi e di ciottoli calcari e vulcanici, che coprono una più lunga discesa ed una più breve salita, noi vediamo rimpetto a noi i ciglioni del calcare miocenico bucherati con piccole aperture artificiali, regolari.

Sono spechi o grotte, che molti nell'agro sassarese chiamano *li casi de li faddi* (le case delle fate, delle streghe) e che nella provincia di Cagliari, ma anche in taluni luoghi di quella di Sassari, come a Fonni, si chiamano *domus de gianas,* che significa tanto case delle fate, come anche di donne piccole, nane. A Tonara vengono dette anche *foreddu de giana;* a Perdas de Fogu (Foghesu) *su mergiane;* ad Isili *tanas de margiani,* ecc.: in generale però qualunque sia la variazione di nome con cui vengono denominati quegli spechi, la volgare credenza li addita come abitazioni di gente nana o di streghe od anche quali grotte sepolcrali.

Sulla loro essenza diremo non appena avremo descritto qualcuna di esse.

Non posso dimenticare prima di far ciò di osservare che nella comba che si deve percorrere per arrivare da Calancoi alla prima grotta, che si raggiunge in 20 minuti, e che descriverò in seguito come quella che esplorata diede qualche frutto,

(1) In questi giorni ebbi dall'eg. signor Pietro Galassi, come provenienti da Isili e propriamente dalla Villa Carlotta, di proprietà dell'on. Ghiani Mameli, una bella valva di *cardium edule* ed altra di *pectunculus,* tutte due forate e dovute a scavi praticati in quella vasta *necropoli,* che antecedentemente assieme ad una quantità di stoviglie avea dato due denti, uno di *carcharodon* e l'altro di *oxyrhina,* che quei primi uomini adoperarono come armi o come amuleti. Attesto per l'ultimo la mia riconoscenza alla gentilissima signora Vittorina Ghiani Mameli e pel primo allo stesso sig. Pietro Galassi.

non rinvenni selci piromache di rifiuto, non diaspri, non ossidiane, che però ricompariscono assieme ad abbondanti cocci, quando si comincia a fare il lievissimo pendìo, che mette alla grotta esplorata, per cessare interamente di nuovo alla sua soglia.

Queste grotte, numerosissime in Sardegna, si aprono tutte in pareti verticali, come quelle esistenti sulle coste e nelle montagne della parte sud-est della Sicilia, come i sepolcri incavati nella roccia ed oramai conosciuti in contrada del Fusco, in Temenite, in Tica, nel Plemmirio, ecc. e le 260 stanze sepolcrali scoperte nella penisola di Magnisi (l'antica Thapsos), il tutto descrittoci dal signor Francesco Saverio Cavallari (1). Anzi colle grotte della Sardegna, scavate in quasi tutte le formazioni geologiche dell'isola dalla panchina di Alghero allo schisto antichissimo della Nurra, le grotte sepolcrali della Sicilia, illustrate dal Cavallari, hanno molti termini di confronto, tanto nella forma in generale quanto nel sistema di loro disposizione interna ed esterna, mentre non le possiamo paragonare con quelle incavate nel suolo, esistenti pure in Sicilia ed alla Pianosa e coi fondi di capanne del Mantovano e del Reggiano, descrittici dal Salinas (2) e dal Chierici (3).

La descrizione di queste grotte, generalmente come abbiamo già detto conosciute col nome di *domus de gianas*, è molto facile, perchè tutte si rassomigliano, sia nell'apertura, sempre ristrettissima e della medesima forma rettangolare, quasi quadrata, sia nella parte interna tanto per la forma che trae più al circolare che al rettangolare, quanto nel numero e disposizione degli ambienti. Sono di una perfezione artistica senza pari e la loro conservazione è tanto migliore, quanto più dura e resistente è la roccia in cui esse sono scavate: quindi le più belle, le più regolari in tutte le loro parti, le troviamo nel granito. Non possiamo però a meno di far subito notare, che prescindendo dalla perfezione questa migliore conservazione la dobbiamo anche alla maggiore resistenza che opposero quelle in granito in confronto delle altre in roccia diversa ad essere manomesse dai pastori passati e presenti, i quali ridussero quelle in roccia tenera come il calcare, il tufo vulcanico, l'anagenite, la panchina, ecc. tali da poter servire loro di abbastanza comodo rifugio per la notte o contro l'intemperie.

L'orientazione non vi è per nulla osservata, perchè esse presentano le aperture in tutti i sensi; in alcune sono ad un livello di poco superiore al piano circostante, in altre si trovano fino a 3 m. sopra il piano, in modo da dover accedere agli spechi per certe intaccature a mo' di gradini, che però ritengo per lo più fatte posteriormente.

Ma passiamo alla descrizione della grotta menzionata e già esplorata per poter dare un'idea di quello che sieno queste *casi de li faddi* o queste *domus de gianas*.

Come già dissi essa si trova a 20 minuti dal ciglione di Calancoi, a valle del *Monte de sos cantones*, in parete verticale di roccia calcare miocenica. Al suo sud

(1) Siracusa, 2ª Appendice alla Memoria: *Le città e le opere di escavazione in Sicilia anteriori ai Greci* (Estratto dall'opera: *Topografia archeologica di Siracusa*, ordinata dal Ministero della pubblica istruzione). Palermo, tipografia dello Statuto, 1883.

(2) Salinas, *Notizie degli scavi*, comunicate alla r. Accademia dei Lincei dal senatore Fiorelli. Palermo, 1880.

(3) Chierici, *Gl'Iberici in grotte artificiali, in fondi di capanne ed in caverne*. Bullettino di Paletnologia Italiana. Anno VIII, gennaio, febbraio e marzo 1882, n. 1, 2, 3.

sta un piccolo nuraghe, mentre al suo est sta la lieve elevazione, chiamata *Monte de sos cantones*. Essa ha l'apertura d'ingresso rivolta ad est con qualche grado di deviazione verso nord ed è in questa grotta (fig. 4) che ho condotto uno scavo regolare il 29 maggio 1884 in compagnia degli egregi amici, il dott. C. I. Forsyth Major e l'avv. Stefano Vallero coll'assistenza di un bravo zappatore.

La porta si solleva anche in questa come in tutte alquanto sopra il piano circostante, ha forma regolarissima, rettangolare, quasi quadrata, non più alta di 0,60 m., mentre d'altra vicina l'apertura non è più alta di 0,45. Il piano interno ha forma rotonda col diametro maggiore da nord a sud di 2,46 m., essendo il minore, quasi perpendicolare all'apertura, di 2,25: la sua altezza di 1,60 ad 1,65 è quella di un uomo di media statura, però in generale l'altezza di questo genere di grotte, specialmente di quelle lavorate nel granito, va da 1 m. ad 1,20.

Dalla parte sud-sud-est trovasi nicchia incavata nella roccia per 0,40, della larghezza di 0,90, dell'altezza di 0,50, in forma di segmento di ellissoide di rivoluzione alquanto irregolare.

Il fondo della grotta era coperto fino o quasi al livello della soglia d' ingresso di terriccio nero con ciottoli arrotondati di calcare e di andesite: ciottoli analoghi trovavansi anche nella nicchia. Il terriccio all'apertura della grotta avea la potenza di 0,20 m. e verso la parte più interna, quindi quasi al suo ovest arrivava fino a 0,26 e 0,27. Ad ovest-nord-ovest evvi una specie di pozzetta alla quale vanno a finire alcuni canaletti o dirò meglio solchi, di cui il più lungo sulla destra entrando va in linea retta quasi da est-nord-est ad ovest-sud-ovest fino a tre quarti della lunghezza, dove incontra altro, che quasi dal centro si porta alla pozzetta, quindi con direzione nord-ovest: questo poi prima di arrivare a quella, perciò in prossimità del fondo della grotta, è incontrato da altro breve, diretto quasi da sud a nord.

Si scavò colla massima prudenza e con le cautele, che la scienza esige, e la messe raccolta fu tale da non lasciarci scontenti: ossa, denti, cocci, selci ed un pezzo di vetro, ma niente di carboni.

Le ossa ed i denti appariscono sparsi e rimaneggiati, ma, come una semplice occhiata può rivelarlo, non hanno sofferto alcun rotolamento, non furono portati dentro da alcuna alluvione, ma, là collocati, vi rimasero. Non mancano le ossa lunghe, ma i crani sono tutti a pezzi non solo, ma anche frantumati ed alcuni dislocati al luogo delle soture. In mezzo ai denti ne troviamo qualcuno degli inevitabili feroci ospiti delle caverne.

Le ossa umane sono abbondantissime e si presentarono a noi in tanto maggior quantità quanto più si procedette verso lo strato inferiore: devono aver appartenuto per lo meno a 7 adulti distinti ed a bambini, avendo potuto noi raccogliere 7 mascelle o frammenti di mascelle di individui distinti e denti lattanti. Non parlo delle ossa lunghe, talune conservatissime, altre abbruciate e di quelle del cranio, che lasciammo per la più parte sul posto, asportando soltanto le migliori, che regalai assieme a tutte le mie collezioni mineralogiche, geologiche e paleontologiche all'Università di Sassari ed ora si veggono esposte in uno scaffale apposito di quel Museo di Mineralogia assieme a tutto ciò che fu raccolto da me nella vicina stazione di Calancoi.

Assieme alle ossa umane si trovavano altre, appartenenti probabilmente a cervo,

alcuni frammenti informi di selce piromaca, un pezzo di vetro con bella iridescenza, che a qualche paletnologo sembrò lavorato, ma che è invece con semplici rotture accidentali; molti cocci non diversi da quelli della vicinissima stazione ed una superba ciotola a forma di tronco di cono (fig. 5), rassomigliante al vasetto Orsoni, portante il n. 25825 o meglio alla ciotola portante nello stesso Museo di Roma il n. 16962, sebbene più piccola della mia, però di forma identica agli oggetti dei laghi di Neuchâtel e di Bienne nelle palafitte della Svizzera raccolti ed in parte regalati allo stesso Museo dal dott. Victor Gross.

Ai vasetti di questa ultima collezione rassomiglia pure il frammento ricordato nella stazione.

In complesso lo strato del terriccio non mostrava una vera stratificazione, che nella parte più bassa, dove le ossa erano in maggior abbondanza e specialmente verso il centro della piccola grotta, mentre la parte superiore è stata certamente rimaneggiata dall'uomo attuale, il quale forse posteriormente ingombrò la caverna con un numero maggiore di ciottoli calcari, sebbene una parte di essi anneriti mostrassero il lungo periodo di tempo durante il quale rimasero sepolti: infatti in essa le ossa ed i denti sono sparsi irregolarmente e le ossa del cranio particolarmente sono frantumate, solo alcune, come già dissi, dislocate nel luogo delle soture.

Le ossa combuste, come una mascella, alcuni pezzi di cranio e taluni frammenti d'ossa di cervo, che sembrano tagliate con taglio reciso, netto, e che hanno tutti i caratteri dell'antichità, debbono forse il loro abbruciamento a focolari posteriori.

Giova notare che nè fuori di questa grotta, nè nella stazione litica di Calancoi, dove le ossa abbondano, ho potuto trovare una sola scheggia di ossa umane.

Sopra questa grotta si trova vastissima caverna naturale, non senza traccie di lavoro, e che può aver servito di ottimo rifugio ai nostri padri selvaggi.

L'osservazione fatta per lo speco descritto che il piano interno è più basso della soglia, vale per tutte le altre *domus de gianas,* in cui noi troviamo sempre quel piano sotto la soglia dai 5 ai 20 cent.: negli ambienti interni invece il piano è più alto e quindi vi si entra facendo un gradino: in talune abbiamo stanzuccie oblunghe e colla roccia alle pareti disposta come un letto sollevato; in alcune gli ambienti sono in fila uno dietro l'altro facendo seguito all'ingresso, nella più parte sono lateralmente all'entrata, a destra od a sinistra indifferentemente, come in Sicilia; tutte però sono incomode ed in nessuna un uomo può stare ritto in piedi.

Venendo ora ad una specificazione delle *domus de gianas,* lasciando di parlare di quelle nel quaternario di Alghero, delle numerosissime nel miocene specialmente di Badde Inza e suoi dintorni, di quelle pure nel miocene di « *li Curuneddi* » non lungi da Sassari, di Bonorva, di Cossoine, delle elevazioni fra la cantoniera di Scala Cavalli e Sassari e di quelle di Isili, nonchè di quelle negli schisti prepaleozoici della Nurra e di Galtellì, ricorderò quelle scavate nel tufo vulcanico che ad ovest-nord-ovest di Onniferi si eleva in sistema collinesco sulla sinistra della strada a Modde Rocca e su Lovai, precisamente a *Sas Concas.* Sono una decina oltre a sei tentativi, che si seguono una dopo l'altra, tutte rivolte a sud-sud-est: per la più parte furono manomesse ed alcune hanno l'ingresso largo ed alto e le stanze ampie, comode, per la facilità alla lavorazione, che presenta la roccia in cui sono scavate.

Ne troviamo alcune in una specie di *anagenite* bianca, un conglomerato quarzoso, qua e là ferruginoso, con ristrette lenti di grès e che il Lamarmora attribuì all'oolite superiore: una singolare in questa forma litologica si vede nella località Martì a pochi minuti da Tonara con due aperture una ad est-nord-est e l'altra ad ovest-sud-ovest, quindi diametralmente opposte, munite di atrio e che mettono nella stanza di mezzo, la quale fa le funzioni come di vestibolo: dalla stanza di mezzo, appena alta 55 cent., quindi poco più della porta che è di 50 cent., si passa a sud-sud-est in larga stanza laterale.

Nella stessa formazione a due ore da Perdas de Fogu (Foghesu) sulla strada per Seui nel salto *sa Ruta Niedda* in grandi massi di quella stessa anagenite bianca si trovano due *domus de gianas* (Su mergiane): quella di sinistra è più alta di soglia, più piccola, e dopo la prima stanzetta, evvi una seconda stanza interna; l'altra invece dopo la stanza d'ingresso, meglio conservata della prima, presenta ampia stanza interiore. Non mancano i nuraghi nella parte superiore.

Passando ora a quelle di granito, che sono le più numerose dell' isola, come quelle che meglio han resistito ad ogni sorta di agenti degradatori e distruttori, ricorderò quelle di Fonni, 2 a *Frume de bidda* in granito ricchissimo di nidi di epidoto e di turingite, 9 nella regione *Gariunelle,* sempre in vicinanza della cara ed ospitale borgata, 7 od 8 ad un'ora e mezzo da Fonni verso Mamojada presso il ponte *Ori seguro* e 2 fra Fonni e Gavoi in contrada *Orrui* nella posizione detta S. Michele, presso la chiesa. Non dimenticheremo quelle esistenti fra Fonni, Mamojada e Lodine ad *Istellazzu* e più precisamente a *sas finestras* nei salti di Gavoi, come ad *Istoddoè* (tanca di Canìo); ad un quarto d'ora da Gavoi ve ne sono parecchie, fra cui una bellissima, altre ad *Isterridorzu* nei salti di *Sorradile* ed una a *su beccu* negli stessi salti in terreno di Domenico Porcu.

Passando oltre Lanusei, ricorderemo la bella *domus de gianas* della località *su vargiu* presso Tortolì con un nuraghe di massi granitici a cavaliere, ed altre 9 delle quali alcune veramente superbe a *Monte Terrili,* immediatamente vicino alla prima ed a 25 minuti dalla borgata, con tre o quattro nuraghi demoliti quasi a contatto. A venti minuti dalla stessa Tortolì in direzione ovest-nord-ovest con apertura a sud-ovest ne abbiamo due a Monte Atho, assieme a vari tentativi di altre.

Son le *domus de gianas* in granito certamente quelle, che devono destare l'ammirazione generale, perchè fatte in roccia durissima e con una perfezione da sfidare i migliori artefici dell'oggi colla vivezza de'loro angoli e de'loro spigoli, colla perfezione delle linee, col garbo e colla gentilezza delle curve, colle superficie perfettamente liscie. Ma per meglio avvalorare le mie parole basterà descriverne qualcuna, sebbene imbarazzati nella scelta, perchè tutte bellissime.

Daremo la preferenza a due che si trovano a Monte Terrili in un medesimo masso granitico, allungato, e reso pittoresco da certe piante che cresciute sopra e lateralmente vengono a formarne un ornamento, come tirìe (calycotome villosa) e cisti (cistus monspelliensis) a sinistra; olivi (olea europea), lentischi (pistacia lentiscus), carrubi (ceratonia siliqua), fichi d'India (opuntia ficus indica) sopra e nuovamente carrubi ed olivi a destra (fig. 6).

Coll'apertura rivolta ad ovest-sud-ovest in faccia a quella isolata di *su vargiu*

si presentano in questo masso due *domus de gianas*. La fig. 7 rappresenta l'aspetto esteriore di quella di destra, la fig. 8 la sezione orizzontale e la fig. 9 la sezione verticale.

Dopo una rientranza od incavo in forma di trapezio, che è di 0,80 m. a sinistra e 0,85 a destra e che fa colla superficie esteriore angolo acuto vedesi uno specchio perfettamente levigato, nel quale sta inscritta in forma rettangolare la porta, nella quale dopo una rientranza di alcuni centimetri è inscritta come una cornice sempre di forma rettangolare, e finalmente in questa è inciso l'accesso allo speco nella complessiva grossezza di 0,30, colla larghezza approssimativa di 0,53 e coll'altezza approssimativa di 0,60. Nello spessore della soglia della porta però havvi un incavo che passa quasi tutto all' ingiro per tre lati, essendo gli spigoli della parte esteriore ed interna della soglia stessa arrotondati e ridotti ad una specie di ovulo.

La prima stanza, quasi ingresso, è in forma semirotonda, profonda 0,70 m., larga 1,15 ed alta un metro, con a sinistra una nicchia larga 0,45, alta 0,53 e profonda 0,27; sulla destra per altra porta si entra in una seconda stanza, che gira per 1,40 m. intorno alla prima, di cui ha la stessa altezza. La prima stanza è intieramente vuota ed il suo piano inferiore è un po' più incavato verso il centro, che alle pareti, ma il cielo dello speco è perfettamente orizzontale.

Più semplice di questa sta l'altra sulla sinistra, la quale possiede due sole nicchie.

Aggiungo qui la sezione verticale (fig. 10) di una delle due *domus de gianas* di Monte Atho, perchè assieme alle altre valga a meglio mettere in evidenza queste bizzarre costruzioni, eseguite con tanta esattezza.

Nella località già mentovata di Monte Terrili ve ne sono altre bellissime coll'apertura rivolta ad est-nord-est, nord-est, sud-est, sud, ovest-sud-ovest, ovest-nord-ovest per lo più con due stanze, coll'interna indifferentemente a destra od a sinistra, ma taluna della lunghezza fino di 2,15 m., però coll'altezza massima di 1,20 m., mentre nei tufi calcari e vulcanici troviamo l'altezza spesso di molto superiore (1).

Gli avanzi dei nuraghi ricordati stanno al sud-sud-est delle *domus de gianas*: in generale le *domus de gianas* ed i nuraghi si accompagnano.

(1) Dopo l' invio della presente memoria all'Accademia in nuove escursioni scientifiche ho esaminato altre *domus de Gianas*. Fra esse non posso a meno di ricordare quelle di Dorgali, dove sono conosciute col nome di *concas* o *concheddas de gianas*, e come quelle che sono scavate in formazioni geologiche non ancora accennate. Infatti in grosso masso di *calcare cretaceo*, rotolato dal Monte *su Anzu* sopra il vulcanico, in regione *Sa Picada de Lussurgia* a mezz'ora dalla borgata, havvi una di queste grotte, dall'uomo attuale rotta semplicemente per farne della calce! In roccia lavica poi ne visitai otto: la prima a 20 minuti da Dorgali nella regione *Nuragòro;* la seconda più vasta a N. N. E. del pittoresco paese nella posizione detta *Lohiddài;* la terza, veramente superba e degna di descrizione, che mi riserbo di fare altra volta, è quella nella regione *Frandina*, quasi al sommo della collina della Costa e conosciuta niente meno che col nome di *Sa domu de su re;* la quarta sta alle falde del *Carmine;* altre due nella regione *Fontana Quă;* la settima a *Su Acu* e l'ottava a *Pirastru Nieddu* in immediata vicinanza del paese, ma quasi intieramente sepolta nel terreno vegetale. Rammenterò che esistono parecchie altre di queste grotte fra Dorgali, Orosei e Galtellì nella località che viene proprio denominata *Domus de gianas;* nè posso dimenticare quella bellissima, che in schisto uronico si trova nella tanca Delitala a 10 minuti da Galtellì ed è chiamata *Su cucuru (d)e Maleìcas* (l'altezza dei maledetti).

Queste grotte che in alcuni luoghi sono appena accennate, abbozzate, essendo di alcune segnata solo l'apertura, di altre anche il solco iniziale di alcuni centimetri di profondità, ben dovrebbero richiamare l'attenzione degli specialisti, cui senza dubbio somministrerebbero nuovi lumi sopra importanti questioni d' interesse generale, non solo per la Sardegna, ma anche per altre regioni italiane; specialmente poi per la Sardegna per rischiarare uno dei periodi più oscuri della tradizione, se non vorremo dire anche per uno studio comparativo dell'architettura trogloditica.

I problemi che si affacciano alla mente del visitatore di que'curiosissimi monumenti sono certamente questi: A che han potuto servire le *domus de gianas,* come e quando furono costruite.

Io avea dapprima l' intenzione di non entrare nel merito della questione e per evitare in seguito ogni discussione appigliarmi al partito di riferire i fatti come si presentano, ma la voglia benedetta di far fare un po' di luce sul buio pesto di uno dei periodi più oscuri della tradizione e della scienza in Sardegna mi spinge ad emettere qualche idea, se non per la risoluzione dei problemi sopra enunciati, almeno perchè possa servire ad altri, di me più competenti in questa materia, come premessa per la risoluzione degli stessi problemi, quando si avranno i dati necessari.

Alla domanda a che abbian potuto servire le *domus de gianas* risponderò senza alcuna esitazione, che credo quelle grotte altrettanti sepolcri, appartenenti a popolazioni che abitarono l'isola assai prima dell'arrivo delle prime colonie, sebbene i dati sepolcrali certi sieno ancora pochi.

Ad escludere l'idea che abbiano potuto servire come abitazioni basterebbe la ristrettezza degli ambienti di quelle grotte, specialmente delle granitiche, in nessuna delle quali un uomo può star ritto in piedi, arrivando l'altezza massima di esse ad 1,20 m., ed in pochissime potendovi stare disteso; ma abbiamo ben altro in nostro appoggio. Abbiamo gli scheletri della grotta di Badde Inza con cocci e selci eguali a quelli della vicina stazione di Calancoi; abbiamo gli stipiti, specialmente delle granitiche, tutti rincassati nella parte esterna non solo della stanza d'ingresso alla grotta, ma anche dalla prima stanza alle altre; evidentemente quel rincassamento dovea servire per adattarvi una lastra di pietra per chiudere le stanze delle grotte e murarle; non ricordo di aver veduto in alcuna di queste grotte i rincassi dalla parte interna: abbiamo ancora di più che in alcune vi è una scanalatura che passa all'intorno dell'ingresso, almeno su tre lati, ed anche questa porta a credere che la grotta sia stata chiusa da una lastra messa dentro della scanalatura, dopo che il morto era stato sepolto, per impedire l'entrata agli uccelli di rapina e ad altri animali. Pur troppo è vero che in nessuna grotta, fattane eccezione per una di Monte Atho, ho potuto trovare lastre o frammenti di lastre, che abbiano servito di chiusura al sepolcro. Ma che per questo? Ho già detto che la maggior parte di queste grotte è stata manomessa da gente guidata solo dall'avidità di scoprire tesori nascosti, come chiunque può persuadersi esaminando il fondo di quelle grotte, perfettamente nudo od ingombro di avanzi di pasti recenti e non infrequentemente dalle ossa di qualche scomparso: nè dobbiamo arrestarci alla manomessione degli uomini attuali, ma dobbiamo pensare ancora a tutte quelle trasformazioni, cui han potuto andar soggette fino dalle epoche greche e romane; e a quella manomessione, a queste trasformazioni, ai frugamenti

antichi abbiamo ad attribuire pure la mancanza di oggetti in quelle costruzioni. Abbiamo ancora di più: quei canaletti nella grotta di Badde Inza e che vediamo anche in altre di Sicilia nella necropoli della Galera Bagliazzo di Selinunte (1) e nelle camere preistoriche scavate a Rondineto, comune di Breccia, presso Como (2) dovean servire a raccogliere i prodotti del disfacimento dei corpi dei morti ed a portarli nella pozzetta accennata nella descrizione della grotta di Badde Inza.

Certamente che i corpi umani non poteano star distesi al suolo, ma accovacciati, a quella guisa che furono trovati piegati gli scheletri alle Arene Candide ed ai Balzi Rossi, precisamente come oggi usano ancora i Patagoni e gli abitanti della Terra del Fuoco: quindi non era necessario che gli spechi avessero la lunghezza in atteggiamento di uno che dorme.

Rappresentano dunque le *domus de gianas* le tombe, i sepolcri di una delle prime genti che abitarono la Sardegna, molto prima dell'arrivo delle prime colonie. E deve essere stata molto numerosa la popolazione costruttrice di quelle *domus de gianas,* se guardiamo al numero immenso di esse, che si trovano sparse per la Sardegna: però non abbiamo bisogno di fantasticare o di ricorrere colla mente ad epoche favolose od a popolazioni trogloditiche per queste costruzioni, eseguite con tanta perfezione.

Secondo il Cavallari i sepolcri di Siracusa, che corrisponderebbero per la forma, le dimensioni, la distribuzione degli ambienti alle nostre *domus de gianas,* differendo solo nelle pareti che in Sicilia sono per lo più incurvate ed in Sardegna verticali e nelle volte che nelle grotte sepolcrali sarde sono piane, liscie, mentre nelle tombe di Siracusa sono sferiche, apparterrebbero (3) alle popolazioni trovate dai Corinti di Archia al loro arrivo in Sicilia.

Contro la supposizione che queste grotte sieno state fatte ed usate dai naviganti fenici e greci, tanto per la Sardegna quanto per la Sicilia, come egregiamente osserva il signor Cavallari, sta il fatto che essi non si allontanavano dalla costa del mare, mentre per la maggior parte le *domus de gianas* stanno nell'interno e fino quasi a 1000 m. sul livello del mare.

Quanto all'altro problema come sieno stati costruiti questi monumenti, la questione sembrerebbe un po' più ardua della precedente. Infatti gli oggetti trovati in esse, che si riducono a quelli della grotta di Badde Inza ed a pochissimi cocci della stessa natura dei descritti, trovati in alcune grotte *de li Curuneddi* ed in quella isolata di *su vargiu* ed in qualcuna delle altre del distretto di Tortolì, se sono troppo pochi per autorizzarci ad una conclusione circa l'uso e l'antichità di quei monumenti, sembrano insufficienti affatto per rispondere sul modo, come quelle grotte sepolcrali furono fatte. Però, sebbene pochi, tutti gli oggetti trovati nella grotta di Badde Inza sono in così stretto rapporto con quelli della stazione litica di Calancoi poco discosta e dei quali nessuno potrebbe rigorosamente riferirsi ad altra età che non sia quella della pietra, che ci porterebbero per la loro natura, per la loro omogeneità a concludere

(1) Cavallari, lavoro citato, pag. 12.
(2) Barelli, *Rivista archeologica della provincia di Como,* 1877-78-79.
(3) Cavallari, lavoro citato, nota, pag. 16.

appartengano queste grotte ad uomini che non conoscevano i metalli e risalgano quindi all'età della pietra.

Senonchè contro questa conclusione contrasta altamente la mirabile esecuzione della maggior parte di esse e specialmente, come abbiamo già detto, di quelle in granito, che sono le più numerose. Naturale si fa la domanda: poteano le genti dell' età della pietra con rozzi sassi, sia pure con armi della più mirabile fattura, di roccia o di minerale durissimo, tenacissimo, lavorare con quella perfezione che noi vediamo, con una regolarità di disegno senza esempio, con una precisione di linee inappuntabile, fare quelle grotte nei tufi calcari, nei tufi vulcanici, nei calcari compatti, appartenenti alla così detta *pietra forte* di Bonaria di Cagliari, negli schisti micacei e talcosi, nei graniti?

Se tutti converranno nel rispondere affermativamente pel tufo calcare, che vediamo anche oggigiorno lavorato e modellato colla maggiore facilità, senza alcuna fatica appena levato dalla cava e quindi meglio in posto, non tutti daranno una risposta affermativa per le altre roccie che sono più dure e particolarmente pel granito, che è durissimo.

Se si domanderà peraltro, se possono bastare arnesi in pietra basaltica od in roccia amfibolica per la costruzione di quelle grotte, sento di poter rispondere affermativamente, perchè sia i basalti che le dioriti, i diabasi, le amfiboliti, di cui sono formate per lo più le reliquie sarde dell'età della pietra, oltre all'avere una durezza di gran lunga superiore ai calcari, e se vogliamo anche agli schisti, s' accordano in quella coi graniti, vincendo questi e quelli di molto nella tenacità.

Sulla possibilità di lavorare quelle grotte, comprese le granitiche, con armi di pietra ed anche di pietra meno dura delle specie accennate, non dobbiamo mettere alcun dubbio, quando noi vediamo ancora oggi i selvaggi dell'America forare il quarzo ed altre pietre dure col mezzo di bastoncini di legno a punta, usando sabbia ed acqua. Infatti il celebre viaggiatore e zoologo inglese A. R. Wallace che passò parecchi anni al fiume delle Amazzoni, descrivendoci il modo col quale gli abitanti dell'Uaupes forano lunghi pezzi di quarzo, dice: « Sembra quasi incredibile che essi senza « ferro possano forare un materiale così duro. Essi usano perciò pieghevoli polloni a « punta del banano selvatico, girandoli con fina sabbia ed un poco di acqua sulla « pietra, ed io non dubito, che, come essi dicono, un tal perforamento richiegga un « lavoro d'anni ».— Questo fatto è stato a torto miscreduto, poichè da poco fu confermato dal prof. Rodriguez di Rio Janeiro nel modo seguente: « Gli antichi Indiani « facevano il buco nella pietra proprio nell'istesso modo come usano fare ancora oggi « gl'Indiani Uaupes e che si deve vedere effettivamente per credere. Si procurano ver- « ghette di polloni della Pacova Sororoca (Urania amazonica) e mentre prendono la « pietra fra il pollice e l'indice di uno dei loro piedi, usando fina sabbia con acqua « fanno girare la verghetta fra le mani tenute distese, a spesa di grande abilità, di « indicibile pazienza e di molti mesi » (1).

Però diranno i più; per lavorare tante grotte l'uomo delle prime età deve aver impiegato molte armi di pietra e molte deve averne rotte; e come va che in Sardegna

(1) A. B. Meyer, *Die Nephritfrage kein ethnologisches Problem*, ecc. Berlin 1883, pag. 18.

così pochi sono gli oggetti litici che si rinvengono interi e nelle collezioni si trovano ancora in minor numero i rotti?

È vero che nè dentro le grotte sepolcrali, nè nella loro immediata vicinanza ho trovato alcuna accetta, ma ne rinvenni tre e tutte tre rotte nella vicina stazione di Calancoi e rotta è una delle due accette che ho trovato nel giugno passato al Capo di S. Elia: rotta nel taglio è una grossa azza di roccia dioritica quarzosa che trovai alla Nurra nel gennaio 1880: le accette n. 1 e n. 3, regalatemi dall'egregio amico dott. Antonio Giuseppe Usai, furono trovate in terreno presso le grotte *de li Curuneddi*, ricco di frammenti di cocci della stessa argilla grossolana di Calancoi e che qui si rinvengono immediatamente sopra le grotte a Monte Oro, nel cui terreno sono disseminati in grande numero frammenti e pezzi di rigetto di quarzo, di diaspro, di calcedonio, di ossidiana e non infrequenti i pezzi di coltellini. Tutto ciò è poco, ma a quanto ho già detto superiormente, cioè che la mancanza di oggetti la si deve in gran parte attribuire ai frugamenti antichi, aggiungerò qui per tutta risposta qualche osservazione, che, sebbene dolorosa, non è per questo men vera per l'isola nostra.

La Sardegna ricca in tutto, ricchissima specialmente di antichità, ha gli oggetti della storia passata sparsi nei pubblici e privati musei di tutti i paesi della terra. In Inghilterra, in Francia, in Germania, in Austria, in America noi troviamo scarabei di Tharros, idoli fenici, arnesi dell'età della pietra e del bronzo; così 7 degli oggetti litici, che in seguito descriverò, appartenenti alla Sardegna, quindi nell'isola trovati, vennero a me dal continente. Si aggiunga a ciò che gli oggetti in pietra non sono i preferiti dall'uomo attuale, il quale d'altra parte poi quando ne trova uno levigatissimo, non grosso, dalle forme eleganti, lo raccoglie, lo tiene come amuleto ed è assai difficile portar via un'azza da una famiglia, dove vi sia una donna che la porti addosso come preservatrice delle disgrazie, avendosi anche qui sopra quelle armi e quegli arnesi gli stessi pregiudizi di tutti gli altri paesi italiani: così non fu possibile a me di avere per nessun prezzo un' accettina appartenente ad una donna di Alghero, nè ho potuto neppur vedere un oggetto di pietra conservato gelosissimamente da altra donna a Dorgali.

Non dobbiamo neppure trascurare il fatto che uno studio speciale sull'età della pietra in Sardegna non è stato ancora iniziato da nessuno e le indagini che a quello studio possono condurre sono ancora molto poche, per non dire che tutto lasciano a desiderare.

Del resto, se non vennero finora curate le accette intere, figuriamoci quanto poco doveano esserlo le fratturate, che molte volte solo all' occhio esperto si appalesano per tali.

Facendo un riassunto dirò ai signori paletnologi, cui mi rivolgo per la soluzione dei problemi relativi alle *domus de gianas* della Sardegna: Esse sono grotte sepolcrali e non abitazioni; sono monumenti antichissimi, anteriori alla venuta delle prime colonie nell'isola; queste opere meravigliose possono benissimo essere state fatte con armi di pietra; la loro importanza più che nella tecnica con cui furono scavate anche in roccia durissima sta nella religiosa osservanza di un tipo speciale; questo tipo uniforme lo dobbiamo alla molta fatica richiesta da tal lavoro non solo per la speciale durezza della roccia, ma anche per l'angustia dello spazio nel quale

il lavoratore dovea muoversi; non si deve trascurare la immediata vicinanza dei nuraghi alle *domus de gianas,* nè la immediata vicinanza di due stazioni litiche a due gruppi di queste grotte, quella di Calancoi e l'altra di Monte Oro.

Essendo parecchie di queste grotte, specialmente quelle in granito, in massi isolati e di non difficile trasporto, come quelle di Tortolì a pochissimi chilometri dal mare, si potrebbe pensare di ornare con alcuna di esse i principali nostri Musei, imitando con ciò il principe di Scalea, r. Commissario pei Musei e scavi in Sicilia, il quale con lodevolissimo pensiero fece estrarre dalla roccia un intero sepolcro e trasportarlo intatto al Museo archeologico di Palermo. Se però non si volesse pensare al trasporto, ben si dovrebbe sottoporre almeno le più belle fra le *domus de gianas* a speciale sorveglianza.

Non lascierò questo importante argomento senza dire una parola sulle tradizioni, sulle credenze che il popolo conserva in Sardegna per questi monumenti.

Giovanni Bottaro, soprannominato Perdi Carzas, di Fonni, uomo di 74 anni, mi diceva le *giane* erano esseri che si pascevano di erba, avevano una voce deliziosa, erano incantatrici e belle così che ancora oggi quando ad una donna si voglia dire che è bella, le si ripete lassù a Fonni: *bella comenti una giana;* mi aggiungeva lo stesso vecchio che ciò vale anche per gli uomini, quindi: *bello comenti uno giano.* Richiesti a Fonni stesso alcuni pastori come fossero state fatte e lavorate così bene quelle grotte nel granito, unanimi mi risposero con santa ingenuità: non già a forza di martelli e di scalpelli, ma sibbene con accette, come si fa ancora oggi per il tufo calcare (la *pietra cantone* degli scalpellini sardi), però quando il granito era molle, pastoso, essendo impossibile, lavorare colle stesse accette il granito duro, come oggi si trova!

A Tonara si crede che gli abitatori di quelle grotte fossero piccoli, grossi, incantatori, ma non fosse possibile distinguere i maschi dalle femmine, adoperando queste e quelli un identico abito e non avendo alcuna distinzione palese nella faccia.

A Tortolì ed altri luoghi ancora le *gianas* sarebbero donne tozze, grassissime, dalle mammelle lunghe, che gettavano dietro le spalle, sia per allattare i bambini, sia perchè non pendessero in terra, quando lavoravano: a Tortolì stesso si ritengono quali streghe o maghe.

Ad Onniferi, dove quegli spechi si dicono anche *domus de zanas,* si ritengono i loro abitatori quali esseri pericolosi, se debbo badare a quanto un uomo di quella borgata disse a me, che a lui aveva manifestato il desiderio di entrare nelle *domus de gianas,* che si trovano nella vicinanza di quel paese: « *Non intret,* egli mi disse, *puìta no ne bessit* (non entrate, perchè non uscirete), assicurandomi in pari tempo che nessuno è mai uscito di coloro che sono entrati in quegli spechi, con una persuasione degna di miglior causa e con una certa aria di spavento.

Passo ora alla illustrazione degli oggetti litici raccolti da me od appartenenti a collezioni speciali sarde, aggiungendone taluni altri non sardi, ma di mia proprietà o facenti parte di collezioni particolari.

1. Azzina verde chiara biancastra di *giadeite* (fig. 11), colle dimensioni, se completa, di 35 mm. di lunghezza, di 19 di larghezza, e di 7 di grossezza massima. È rotta nella sua parte superiore dove fa vedere la schistosità di questa specie di

giadeite, che presenta un peso specifico = 3,334, essendo il suo peso assoluto di 10,92 grammi. Il peso specifico di quest'azza e delle altre ai n.i 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20 e lettera *e* è stato calcolato coll' acqua alla temperatura di 21,5°. È trasparente, di splendore subvitreo, levigatissima e presenta assieme alla sua frattura scheggiosa una certa fissilità. È fusibilissima ed inattaccabile dagli acidi. Fu trovata ai *Curùneddi,* regione, come abbiamo già detto, abbondante di grotte scavate nel miocene e mi fu regalata dall' egregio amico dott. Antonio Giuseppe Usai Utzu assieme alla seguente, come proveniente dalla stessa località.

2. Piccola sgorbia di colore verde oscuro, un po' translucida nel taglio, alquanto dentato, ma conservatissima sopra tutte le due superficie levigatissime, con un' intaccatura sopra una delle faccie nel senso della lunghezza, è rotta un po' nella parte superiore ed ha le dimensioni relative di 42, 30 e 6 mm. Il peso specifico = 2,985, la durezza superiore a 5, la translucidità al taglio e l'inattaccabilità dall'acido cloridrico mi portano a pensare ad un minerale nefritoide, perchè il peso specifico è troppo enorme per un serpentino, a cui si potrebbe pensare immediatamente per quella sgorbia, sebbene imbianchi al cannello. Per nefrite vera si oppone l'infusibilità.

3. Superba azza di probabile *saussurite* con *giadeite,* proveniente da Perfugas, e che devo alla gentilezza del mio ottimo amico Antonio Maria Marras. Sopra un fondo verde giallastro ha in grande numero macchiette di un verde più oscuro, con alcune alquanto più grandi di color ruggine di ferro: è perfettissima nel taglio, sulle superficie, sulle costole tondeggianti e nella parte superiore: translucida nel taglio: presenta con un peso specifico = 3,345 e con una durezza = 7 le dimensioni relative 69, 40,5 e 10 mm.

4. Di *schisto amfibolico* oscuro, quasi gneis molto oscuro, è altra azzina magnificamente conservata, dovuta pure alla generosità dello stesso signor Marras e quindi proveniente da Perfugas. Colle dimensioni relative di 61,33 e 12,5 mm., ha il peso specifico = 3,07 e la durezza superiore a 6.

5. Piccolissima sgorbia, superbamente lavorata, conservatissima in ogni sua parte, translucida al taglio affilato, di color verde oliva con macchiette tendenti al giallognolo, ha le dimensioni relative di 32,28,5 e 6,5 mm. Dopo l'azzina n. 144 di cloromelanite della mia collezione di Calabria (1) colle dimensioni relative di 23, 21,5 e 5 e l'altra di Dorgali, la cui descrizione verrà al n. 25, è questa fra le più piccole e la più superba fra i miei oggetti litici per perfezione di lavoro. Presenta la durezza da 6,5 a 7 ed il peso specifico = 3,38 circa. Mi sembrava troppo grande profanazione lo staccarne un frammento per procedere all'analisi chimica, per pronunciare diagnosi esatta su questa preziosa reliquia, che molto probabilmente è di *saussurite* o meglio di *saussurite* mescolata con *giadeite.* Mi fu regalata dallo studente Antonio Dejana, che l'ebbe da Pes Antonio Pietro, il quale la rinvenne presso Perfugas.

6. Bellissima azza schiacciata verde oscuro, quasi nera, levigatissima, un po' rotta nel taglio e nella parte superiore, inattaccabile dagli acidi, infusibile, colla

(1) D. Lovisato, *Nuovi oggetti litici della Calabria.* R. Accademia dei Lincei. Serie 3.ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. III. Roma, 1879; pag. 20.

durezza = 5,5, col peso specifico = 2,987, di *roccia amfibolica,* fu trovata presso Bortigiadas da Pietro Oggiano. Io l'ebbi in dono dal mio ex-scolaro Antonio Dejana, che mi diede pure qualche spiegazione sopra queste pietre che anche colà si chiamano *troni:* così quando cade un fulmine si dice *un tronu è faladu* e questo *tronu,* consistente in una di queste azze, si caccia 7 canne sotterra; dunque anche a Bortigiadas ed in tutta la Sardegna il numero 7 caratteristico della Calabria e delle altre regioni italiane si conserva, solo che invece di 7 metri, 7 palmi, 7 piedi, sono 7 canne, corrispondendo quella canna a 12 palmi cioè a 3. m., mentre a Sassari è eguale a 10 palmi ossia a 2,5 metri. Le dimensioni relative di questa azza sono 65,38 e 9,5 mm.

7. Azzina di *roccia amfibolica* oscura rossastra, rovinata sulle superficie, sulle costole ristrette e nel taglio, colla durezza = 5, col peso specifico = 2,85 e colle dimensioni relative 49,27,5 e 7 mm., fu trovata nella località *Isciaelighe* del comune di Perfugas ad un' ora e mezzo ad est della borgata ed era conservata a Bortigiadas come *pedra de tronu,* quando la ebbi dallo stesso studente Dejana Antonio, cui mi è caro qui professare la mia riconoscenza.

8. Azza di *roccia amfibolica,* quasi criptocristallina, di colore molto oscuro, quasi nero, levigatissima sulle faccie e scabra e molto picchiettata sulle due costole molto grosse e arrotondate, presenta nel taglio alcune fratture, ma maggiori son quelle alla parte superiore, che manca totalmente. Ha il peso specifico = 3,09 e la durezza superiore al 6. Fu trovata nelle vicinanze di Sassari e mi fu regalata come la seguente nel gennaio 1884 dallo zappatore Antonio Maninchedda.

9. Azzina d'un minerale omogeneo, quantunque sopra un fondo verde oliva venga attraversata da righe e reticolati d'altro verde oscuro, quasi nero. Presenta la forma primitiva del ciottolino di fiume, ridotto levigatissimo sulle due faccie ed affilatissimo nel taglio. È così dura che scalfisce il quarzo e manda molte scintille all'acciarino; presenta il peso specifico = 3,35. La ritengo *saussurite.* È rotta nella parte superiore e presenta le dimensioni relative di 30, 28 e 5,5 mm. Anche questa come la precedente proviene dall'agro Sassarese.

10. Azza verde oscura, probabilmente di *gabbro,* regalatami fino dal 5 gennaio 1880 dalla madre di Michele Puliga, che da molti anni la tenea come amuleto e colla dichiarazione che fu trovata alla Nurra. Presenta il peso specifico = 2,986, la durezza inferiore a 5 colle dimensioni relative di 65, 39,5 e 16 mm. È levigatissima con un' intaccatura sopra una delle costole tondeggianti; ha il taglio grossetto con alcune cavernosità sopra una delle superficie, che palesano il ciottolo di fiume della sua provenienza.

11. Azza schiacciata verde oscura, meno però della precedente, conservatissima in tutte le sue parti meno che nel taglio, che presenta parecchi denti, ha la sua densità = 2, 82 colla durezza che raggiunge il 5° grado e colle dimensioni relative che sono di 60,40 ed 8,5 mm. Sembra serpentino, sebbene il suo peso specifico sia troppo forte e superi perfino il massimo da me trovato per una roccia serpentinosa di Gimigliano in Calabria, che è di 2,805, mentre nessuna varietà di serpentino, almeno di quelle, che io conosco, superò la densità della *bowenite,* che è di 2,787. Proviene come la seguente da Alghero e come quella mi fu regalata dall' egregio dottore Giuseppe Nonis.

12. È un'azza schiacciata di color biancastro sporco esteriormente, ma bluastro oscuro interiormente, probabilmente di roccia amfibolica, colla durezza superiore al 5 e colle dimensioni relative: 40, 38,5 e 8,5 mm.

13. Frammento superiore d'azzina trovata da me nel maggio 1879 alla stazione litica di Calancoi. È di color bluastro e la sezione sottile al microscopio mostra tutta la struttura interna di un serpentino ranocchiaia, ma il suo peso specifico n'è troppo forte essendo = 3,05 colla durezza = 5: ad ogni modo è d'una sostanza prodotta dalla decomposizione dell'orniblenda.

14. Il giorno 14 novembre 1883 ho trovato pure nella stessa stazione litica di Calancoi la parte superiore di altra azzina (fig. 12) che dovea essere superba, se si ha da giudicare dal frammento raccolto. È di color verde azzurrognolo con macchie e vene di un bellissimo verde pistacchio, certamente di *roccia amfibolica,* col peso specifico = 3,11 e colla durezza = 6.

15. Nel medesimo luogo ho trovato il giorno 18 dello stesso mese di novembre la parte superiore di altra azzina (fig. 13), assai più piccola della precedente e di color azzurrastro, col peso specifico = 2,89 e colla durezza appena superiore al 5. Il frammento che contiene qualche lamella di mica e qualche mosca metallica è così piccolo, che non ho saputo indurmi a fare la diagnosi di questo pur interessante frammento.

16. Di *roccia granitoide* verdastra con quarzo e prevalenza d'amfibolo è la parte mediana di una grossa azza da me trovata nella Nurra nel gennaio 1880, mancante del taglio e rotta alquanto nella parte superiore.

17. Di *roccia porfirica* con grani di quarzo è la superba azza-scalpello, che nel 1879 ebbi qui a Cagliari dall'eg. prof. Giovanni Falconi. Colle dimensioni relative di 78,35 e 23 mm. essa è magnificamente conservata, superbamente lisciata anche nella parte, che entrava nel manico di color più oscuro, mentre la parte inferiore è bianco-giallognolo con una costa più marcata dell'altra, sebbene anche questa tondeggiante ed ha la durezza = 7.

18. Azzina di color verde oliva sporco, levigatissima, ma col taglio ingrossato forse per la poca durezza, che è inferiore al 5: per questa, pel colorito, pell'aspetto esterno la direi di serpentino, se non presentasse l'enorme peso specifico di 2,95, non ammesso da alcun serpentino: è però d'una roccia affine. Deriva da Oliena nel Nuorese e la devo assieme alle sei seguenti alla cortesia del mio caro amico, il dottor C. I. Forsyth Major. Presenta le dimensioni relative di 46,24 e 7 mm.

19. Azzina quasi nera esteriormente, verde oscura internamente, di *roccia amfibolica* compattissima, col taglio inclinato e con una scanalatura sopra la più lunga delle coste, molto bene levigata e conservata. Proviene da Dorgali, ha le dimensioni relative di 65, 32,5 e 14 mm., la durezza superiore al 6, il peso specifico = 3,10 circa ed è infusibile.

20. Azza di *roccia dioritica* giallo verdastra, col taglio inclinato, pure di Dorgali, con costole piane, bene levigata, egregiamente conservata ad eccezione della parte superiore un po' fratturata, colla durezza = 5, col peso specifico = 2,92 circa, colle dimensioni relative di 82,48 e 14 mm.

21. Grossa azza dalle dimensioni relative di 135,50 (al taglio) e 19 mm. proveniente da Dorgali, oscura, dal bel taglio, solo alquanto dentato, colle costole assai

bene indicate e scanalate in modo curiosissimo, con spigoli marcatissimi, rotta alquanto nella parte superiore o meglio mostrante il ciottolo di fiume. Il ch. prof. Grattarola dell'Istituto superiore di Firenze, che vide ed esaminò quest'azza assieme alle altre tre che seguono, prima che a me venissero dal continente spedite in dono, ne calcolò il p. s. = 2,97 e la ritenne di *diabase* povero di *feldispato*, senza escludere che si tratti di nefrite, ma per constatare ciò, egli soggiunge, come è ben naturale, occorrerebbe oltrechè la sezione sottile anche un'analisi chimica. Appartiene certo alla serie delle *roccie amfiboliche* ed ha la durezza da 5,5 a 6.

22. Piccola sgorbia sezionata nella parte superiore, colla lunghezza originaria di 41 mm., larga 32 (al taglio) e grossa 9, levigatissima, assai bene conservata. Colla durezza superiore al 6 presenta secondo il Grattarola il p. s. = 3,02, che coll'acqua alla temperatura di 15,80° risultò al sig. Vicentini, prof. di fisica di questa Università, ed a me = 3 con due pesate. Alla stessa temperatura furono calcolati i pesi specifici dei n.i 23, 27 e 28. È molto oscura, quasi nera, con macchiette azzurro-verdognole e rossastre, come fossero altrettanti granati. Il prof. Grattarola, che studiò la sezione sottile di questo bell'oggetto, dice che questa indicherebbe più che altro una *nefrite*, ma io la ritengo più una roccia che un minerale.

23. Superba azzina di color verde oscuro con piccole chiazze d'un verde più chiaro, levigatissima, benissimo conservata in tutte le sue parti, anche nel taglio un po'inclinato, quasi fosse una sgorbia. Colla durezza = 6,5 ha il p. s. = 3,36 secondo il Grattarola, che la ritiene, se non del tutto, per la massima parte di *giadeite*. Anche io la ritengo d'una *giadeite* impura, corrispondendovi anche il peso specifico, che pure al prof. Vicentini ed a me risultò in media = 3,36: però come dice benissimo l'eg. prof. di Firenze alla diagnosi precisa della sostanza di questo prezioso pezzo, che sarebbe sacrilegio il profanare, non si potrà arrivare senza lo studio microscopico e chimico. Le dimensioni relative sono 43,29 e 7,5 mm. Fu comperata questa azzina dal Forsyth Major ad Oliena da una donna, che la tenea come amuleto.

24. Azza schiacciata, molto larga, colle dimensioni relative di 52, 50,5 e 9 mm., fu sgrossata nella parte superiore, dove era rotta. È rosso giallastra oscura con vene e gruppi verdi che sono più trasparenti della massa e che sembrano essere un minerale *nefritoide* colla durezza = 6,5. Il Grattarola, che per quest'azza trovò il peso specifico = 2,903 scrive al Forsyth Major, che essa presentasi come un tessuto di piccoli ammassi fibrosi, grigi, verdolini (leggermente dicroici), e con colori di polarizzazione (di aggregazione ?), discretamente vivaci e la calcola di *diabase* o di *nefrite*. Io pure sono inclinato a crederla di *diabase* inquinato d'un minerale nefritoide.

25. Curiosissima azzina-sgorbia dalle dimensioni relative di 30,24 e 2,5 mm. che proviene da Dorgali e che mi fu regalata dallo studente signor Valentino Cucca. È trasparente, d'un verde oliva carico, conservatissima in tutte le sue parti, anche nel taglio affilatissimo. Viene fortemente scalfita dall'apatite e solo per poco intacca qualche varietà di fluorina. Presentò il peso specifico in una prima pesata = 3,01 ed in una seconda = 2,997, quindi in media possiamo ritenere la sua densità = 3. Fu calcolato il peso specifico di quest'azza, come quello della seguente coll'acqua alla temperatura di 14°. È questo interessantissimo pezzo un minerale omogeneo, che non si potrà determinare senza diagnosi.

26. Azzina schiacciata, levigatissima sulle faccie e sulle costole molto marcate, rotta un po' al taglio ed alquanto nella parte superiore, mostrando talune piccole cavernosità sopra una delle faccie, di color fulvo con macchie rosse dovute a cristalli di granato, ha le dimensioni relative di 32,25 e 3,5 mm. Col peso specifico = 2,81 ha la durezza inferiore al 5° grado; la direi una varietà di *tremolite* piena di *granato,* se non si opponesse il peso specifico troppo basso ed un tantino anche la durezza. La comperai a Dorgali per una lira.

27. Azzina in forma di triangolo isocele, schiacciata, conservatissima in tutte le sue parti ad eccezione del taglio alquanto dentato, di color giallo verdastro con macchie e vene rosse, rassomigliante molto per la sostanza a quella del n. 24, sebbene sia più chiara, abbia un peso specifico più alto, poichè = 2,98 ed una durezza inferiore al 6° grado. Fu trovata da me il 2 luglio passato ad *is mesas* al Capo di S. Elia ed ha le dimensioni relative di 36,32 e 7 mm.

28. Frammento inferiore di grossa azza da me trovata il medesimo giorno a Cala Fighera dello stesso Capo di S. Elia. Conserva il taglio affilatissimo e parte delle due superficie, che testimoniano essere stata magnifica questa azza di color verde oscuro, che ad occhio nudo appare quasi una lava, come si manifesta anche al microscopio a luce naturale: però fra i nicol in una massa generale di color verde apparisce il quarzo abbastanza abbondante; il feldispato si presenta in cristalli come decomposti; in masse alquanto opache vedonsi dei vacui rotondi, alle volte uniti fra loro, sì da manifestare una forma variolitica: vedesi della clorite o per lo meno della mica cloritizzata, con grande quantità di magnetite. È tenacissima, ma la sua durezza non arriva che a 4,5 col peso specifico = 2,81.

29. Il signor Antonio Ballero mi regalava nel 1880 un curioso martello, lungo 103 mm., largo 40 ed alto 29 (fig. 14), di tipo originale, che rassomiglia o ritrae delle armi di bronzo. Sembra un' incompleta mazzuola da minatore di quelle che si adoperavano nelle antiche miniere: più che per uso, lo credo logorato dal tempo. Pare di roccia porfirica o meglio di conglomerato di porfido di color bigio biancastro. È meritevole di menzione il foro, il quale alla superficie inferiore e superiore ha il diametro di 17 mm. va mano mano restringendosi fino alla metà dell'altezza da una parte e dall'altra sì che s' incontrano le due specie di tronco di cono e formano una apertura quasi circolare. Pare dunque forato in due volte e non finito. Qualche cosa di analogo presenterebbe un martello oscuro della Scandinavia, notato col n. 16200 fra oggetti di provenienza incerta nel Museo preistorico di Roma, però questo ha il foro completo. Mi si disse trovato a Sassalai, monte scosceso di Samugheo, in provincia di Cagliari, da un pastorello capraio dopo un fortissimo temporale nel 1878!

30. Martello magnifico di *diorite* (fig. 15), da me trovato il 5 marzo 1885 nell'alluvione di S. Andrea a due ore da Cagliari per andare a Capo Carbonara. Ha le dimensioni di 152 mm. di lunghezza, 108 di altezza ed 80 di larghezza colla scanalatura sui due lati, del tipo finora anche da me detto *americano,* ma che pare essere anche sardo e calabrese e quindi *italiano*. Altro consimile, sebbene non così bello esiste in questo Museo di antichità. A poca distanza dal piano dove rinvenni il martello trovasi la roccia in posto.

A tutti questi oggetti descritti si devono aggiungere come pezzi litici sardi

altre 7 azze da studiarsi ancora, ma appartenenti per lo più a roccie amfiboliche e dovute alla generosità del Forsyth Major; ancora un'azzina colle dimensioni relative di 49, 27,5 e 10,5 mm. di probabile *amfibolite*, ben conservata, ma non bene levigata, avuta in dono assieme ad un ciottolo dal giovinetto Giovanni Moretti di Villanova Monteleone il 14 marzo 1885; una sgorbia (istrale de tronu) di roccia amfibolica verde oscura rotta nella parte superiore regalatami sui primi di agosto dall' ottimo amico don Antonio Mattu Salis di Dorgali; due altre azze, una grossa ed una piccola, provenienti da Dorgali e regalatemi gentilmente dal giovane studente signor Valentino Cucca, assieme alla già descritta al n. 25; non dimenticherò altra azza comperata nella stessa Dorgali ed altre due oscure di roccia amfibolica comperate ad Oliena; come ricorderò ancora un' accetta rotta nella parte superiore, regalatami dall' esimio farmacista don Francesco Putzu di Laconi, che la trovò a Fontana Meddoni presso il camposanto di quella borgata assieme ad un magnifico coltello di selce piromaca della lunghezza di 127 mm.: dallo stesso egregio signore e come proveniente da Stunnu, in territorio di Laconi ebbi la superba freccia di ossidiana, rappresentata nella tavola I (fig. 16) e tale che non vidi mai niente di più bello (1).

Quale appendice aggiungo qualche cenno sopra alcuni oggetti litici trovati in Sardegna, ma appartenenti ad altri, o trovati altrove, alcuni dei quali di mia proprietà.

*a*) Della stessa specie di *giadeite* verde chiara del n. 1 levigatissima, col taglio stupendamente conservato, quasi intatto, con qualche fissilità sulle faccie ma nessuna rottura, trasparente, colle dimensioni di 55,5 mm. di lunghezza, 30 di larghezza e 9,5 di massima grossezza, è una superba azza, appartenente alla collezione Sclavo, ora di proprietà del signor avv. Vittorio Aperlo. Il suo peso specifico alla temperatura dell'acqua di 21° è di 3,352 e la sua durezza = 6-6,5. Coll'acqua alla stessa temperatura furono calcolati anche i pesi specifici delle tre seguenti azze e delle altre ai n.i 13, 14 e 15. Dicesi trovata nella provincia di Sassari.

*b*) Azza verde oscura di *eclogite*, che in taluni punti rassomiglia alla vera *giadeite*, della quale ne avrebbe anche il peso specifico = 3,39 circa ed anche alla *cloromelanite*. I granati sono sparsi in tutta la massa, ma in taluni punti sono più concentrati. È levigatissima: rotta alquanto nel taglio con molti denti, ma nel resto molto bene conservata: presenta la durezza di 7 circa. Fu trovata nella regione « *Li Mucci* » non lungi da Sassari ed appartiene all'avv. Stefano Vallero-Usai. Ha le dimensioni relative di 52,33 e 11,5 mm.

*c*) Bellissima azza di *cloromelanite* di color verde oliva carico, con zone più

(1) Dalla stessa località di Fontana Meddoni presso Laconi proviene superba sgorbia, regalatami il 17 febbraio dal distinto dottore Giuseppe Piso-Borme, prof. di fisiologia presso questa Università: coll'acqua alla temperatura di 13° diede il peso specifico = 2,927; è assai probabilmente di un minerale nefritoide e mostra chiaro il ciottolino di fiume.

Non posso poi a meno di qui ricordare con animo riconoscente altro dono fattomi dall'eg. signor Francesco Mereu, Segretario comunale di Dorgali, di un'azza proveniente da Campumannu, campagna presso Dorgali, e di una roccia, che non rinvenni ancora in Sardegna, di un brunitoio in porfido felsitico e di un importante oggetto in roccia durissima e tenacissima, a modo di grande fusaiuola schiacciata, senza foro, ma con un regolarissimo incavo, quasi a segmento sferico nel mezzo da tutte due le parti: fu trovato nella regione Santu Nicola ad O. S. O. di Dorgali, quasi alle ultime case, ma non posso ancora dire a che abbia potuto servire.

chiare nella parte superiore, dove manifesta il carattere del ciottolo di fiume, mentre è conservatissima nella parte inferiore, appartiene all'illustre professore ed egregio amico mio Pompeo Castelfranco di Milano. Ha il taglio affilatissimo, magnificamente conservato in tutta la sua estensione in curioso arco di cerchio, ciò che ho potuto vedere in pochissime altre azze, come pure mostra sulle altre azze la particolarità di essere molto schiacciata. Col peso specifico = 3,43 circa e la durezza = 7 presenta le dimensioni relative di 64, 46,5 e 10 mm. Proviene dalla palude del laghetto di Varano, provincia di Como.

*d*) Altra azza di *eclogite,* ricchissima di granati e di color verde oscuro, mostrante come l'altra il ciottolo di fiume, colla parte superiore scabra e picchiettata per meglio assicurarla al manico, appartiene alla stessa collezione Castelfranco e proviene da Vignale parmense. A proposito di quest'azza, dalle dimensioni maggiori della precedente, specialmente assai più grossa di quella e più rovinata, osserverò che nel Museo civico di Modena la maggior parte delle azze verdi, che vidi conservate in una ricca vetrina sono di *eclogite,* fatto che non ho rimarcato in nessun'altra collezione. Ha il peso specifico qualche cosa superiore a 3,44 e la durezza = 6,5.

*e*) Azzina di *cloromelanite,* in forma di vera accetta levigatissima, conservata nel taglio, che presenta qualche leggiera frattura e rotta alquanto nella parte superiore, mostrante il ciottolo di fiume, è di color verde intenso ed in una frattura lo mostra d'un bellissimo oliva carico. È fornita di costole, su una delle quali si osserva della pirite di ferro in decomposizione con macchie rosso-ruggine. Colle dimensioni relative di 35, 31,5 ed 8 mm. presenta la durezza = 7 ed il peso specifico = 3,43 circa. Devo questa azzina alla bontà del sig. ing. Giuseppe Quaglia, il quale nella sua preziosa collezione di Varese possiede delle bellissime azze, trovate nelle torbiere di Cazzago-Brabbia e Pustenga, la quale ultima torbiera fu denominata la stazione delle azze, perchè in essa si trovano in modo prevalente queste sulle punte di freccia, che invece abbondano nelle altre stazioni: infatti delle 32 azze possedute dal Quaglia la maggior parte appartiene a Pustenga, che diede solo 2 o 3 cuspidi di freccia ed alla palude Brabbia. Alcune di queste azze, se non saranno di *cloromelanite* o di *giadeite,* da questi minerali preziosi poco si allontaneranno. Però l'azzina da me testè descritta e regalatami dal Quaglia, fu da lui comperata da un antiquario a Roma.

*f*) Superba accetta di *giadeite* col peso specifico = 3,335 fatte le debite correzioni di temperatura; forse non è *giada oceanica,* che oscilla fra 3,09 e 3,31. È levigatissima con una frattura sopra una delle costole e con accennata qualche schistosità; di color verde oscuro, col taglio conservatissimo, colle dimensioni relative 75, 34 e 18 mm. e colla durezza da 6,5 a 7. Fu trovata presso l'antica città di *Gnathia* o *Ignathia,* contrada Quazzo, vicino Fasano in provincia di Bari sulla linea ferroviaria, e qui mi fu gentilmente inviata dal mio conterraneo dott. Antonio Pizzarello quale dono del signor. Giovanni Lorenzini.

Di tutte le azze sopra accennate cercherò in seguito di dare la diagnosi od almeno un cenno illustrativo appena il tempo me lo permetterà.

## RELAZIONE

letta dal Socio CREMONA, relatore, a nome anche del Socio DINI, nella seduta del 6 giugno 1886, sulla Memoria del dott. DOMENICO MONTESANO, intitolata: *Sulle correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa.*

« È notissima la correlazione polare-nulla (Nullsystem) nella quale ai punti d'una data cubica gobba corrispondono i piani osculatori di questa stessa curva. A questa correlazione si dà il nome di *correlazione polare d'osculamento.*

« In una recente interessantissima Memoria, inserita nel tomo 26 dei Mathematische Annalen di Lipsia, il prof. Sturm ha ricercato le collineazioni e le correlazioni che trasformano una cubica gobba in sè stessa, ed ha dimostrato che una cubica gobba data è trasformata in sè stessa: 1° da un numero doppiamente infinito di collineazioni, le quali sono *iperboloidiche armoniche,* ossia ciascuna è costituita da coppie d'elementi armonicamente separati mediante due rette fisse (*assi*); 2° da un numero doppiamente infinito di correlazioni polari (non nulle, ossia costituite dai sistemi polari relativi a superficie di 2° grado, reali o imaginarie); 3° da una sola correlazione polare-nulla, che è quella d'osculamento.

« Nella Memoria, sulla quale i sottoscritti riferiscono, il dott. Montesano dimostra il teorema fondamentale che, combinando la correlazione d'osculamento colle collineazioni sopradette, si ha il completo sistema delle correlazioni polari rispetto alle quali la cubica gobba $C_3$ è polare a sè stessa. Dimostra inoltre che, premesso il distribuirsi delle collineazioni in terne tali che le tre coppie di assi delle collineazioni d'una terna appartengono ad uno stesso sistema di generatrici d'un iperboloide e sono due a due armoniche, ogni retta dello spazio è raggio unito di tre collineazioni che appartengono ad una stessa terna.

« Dimostra che il luogo de' punti coniugati ad un punto dato P in tutte le collineazioni in discorso è una superficie razionale di 6° ordine $F_6$, segata da ogni piano osculatore di $C_3$ secondo tre coniche, avente una curva doppia cuspidale che è la stessa $C_3$, un punto quadruplo P', coniugato a P rispetto a $C_3$, una retta tripla PP', e tre rette doppie, passanti per P' e situate nel piano che è polare di P' nella correlazione d'osculamento. La superficie $F_6$ è trasformata in sè stessa dalle tre collineazioni (sempre di quelle che si considerano) nelle quali P è coniugato a sè stesso.

« L'autore eseguisce la rappresentazione della superficie $F_6$ sopra un piano, i cui punti vengono allora a corrispondere univocamente alle correlazioni polari che trasformano $C_3$ in sè stessa. Le imagini delle sezioni piane di $F_6$ risultano curve di 3° ordine.

« Da ultimo giunge al teorema che il complesso delle generatrici degli iperboloidi, rispetto ai quali la cubica gobba $C_3$ è polare a sè stessa, è costituito da due complessi distinti: il complesso lineare de' raggi uniti della correlazione d'osculamento, e il complesso cubico delle rette che si appoggiano a quattro tangenti armoniche di $C_3$. Per ogni raggio del primo complesso passano tre iperboloidi del sistema; per ogni raggio del secondo ne passano due.

« Da questi enunciati appare senz'altro evidente l'importanza della ricerca istituita con esito felice dal dott. Montesano, a complemento de' risultati già ottenuti dal prof. Sturm sullo stesso argomento. Noi crediamo dunque di poter proporre l'inserzione di questa breve Memoria negli Atti accademici ».

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 5

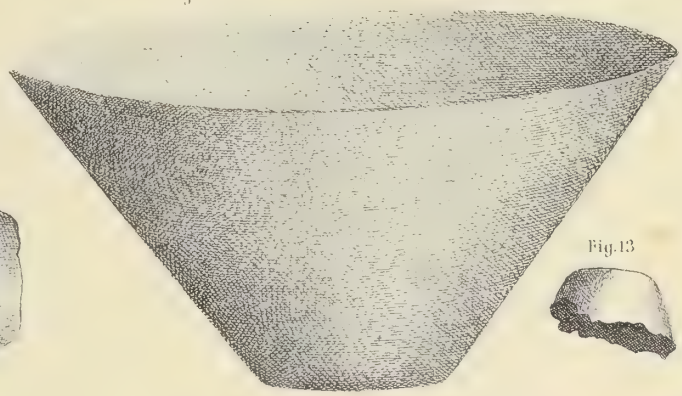
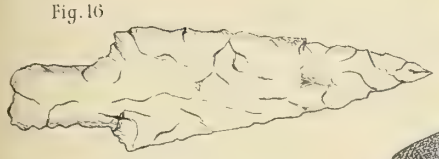


Fig. 12

Fig. 13



Fig. 16



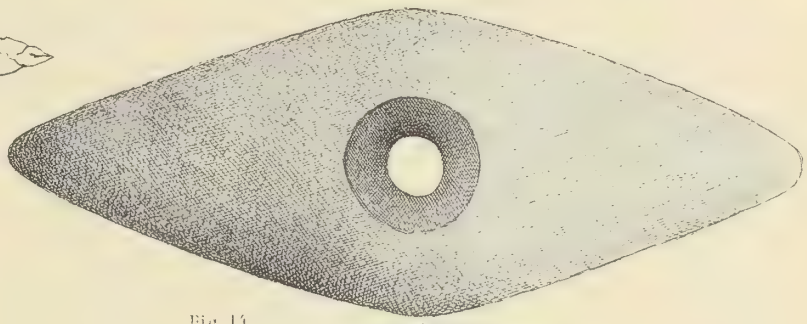


Fig. 11

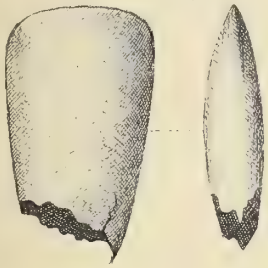


Fig. 14

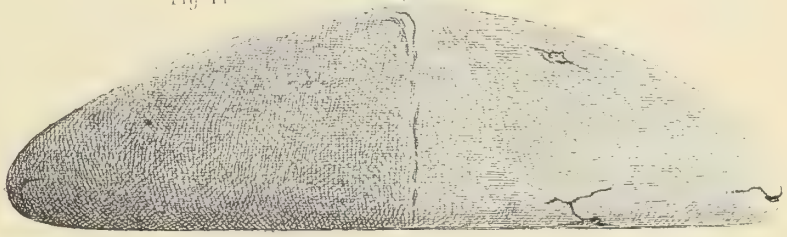
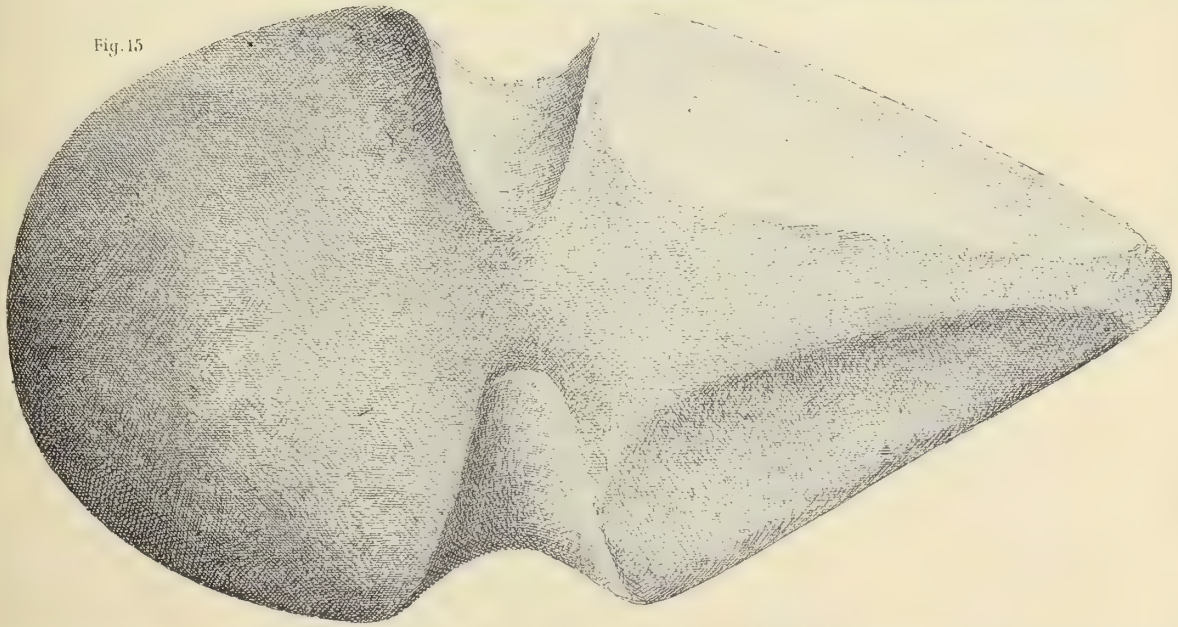
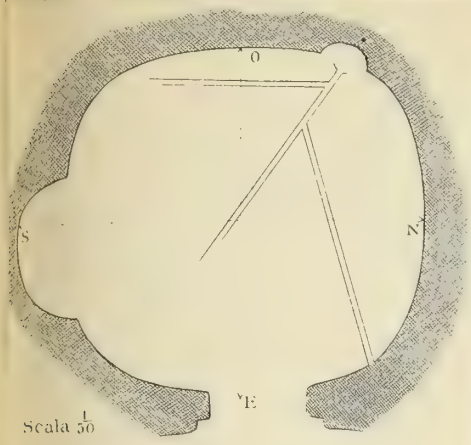


Fig. 15



Domenico Lovisato disegnò.

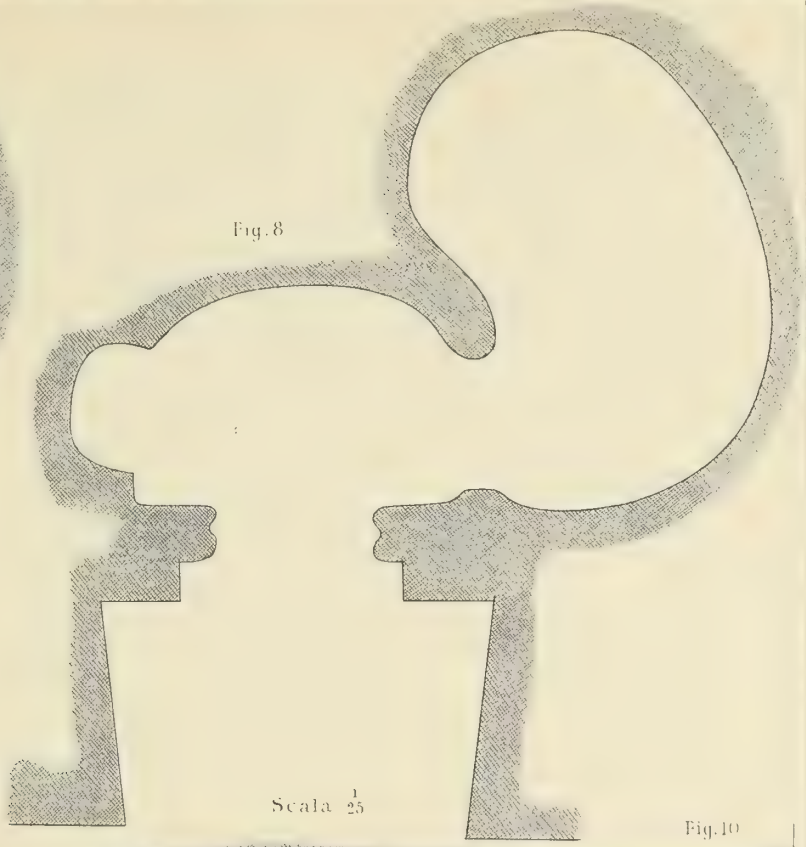
Lit. Bruno e Salomone, Roma




Scala $\frac{1}{50}$

Fig. 4

Fig. 8



Scala $\frac{1}{25}$

Fig. 9

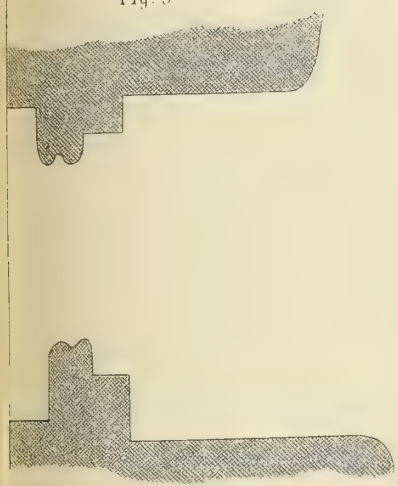


Fig. 7

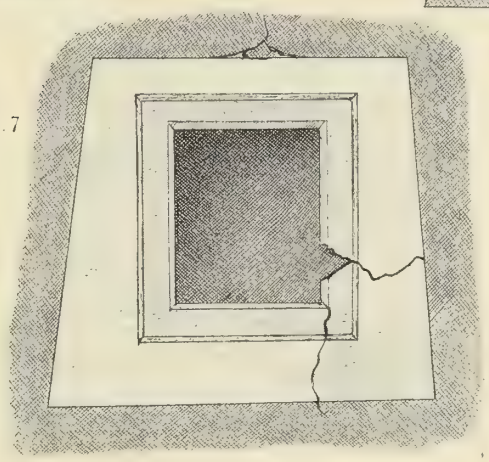
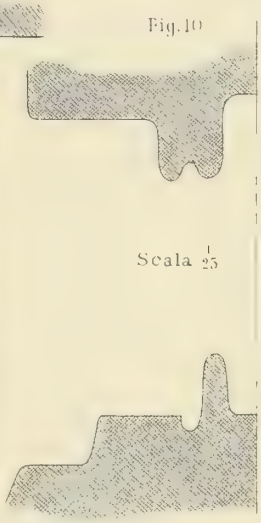


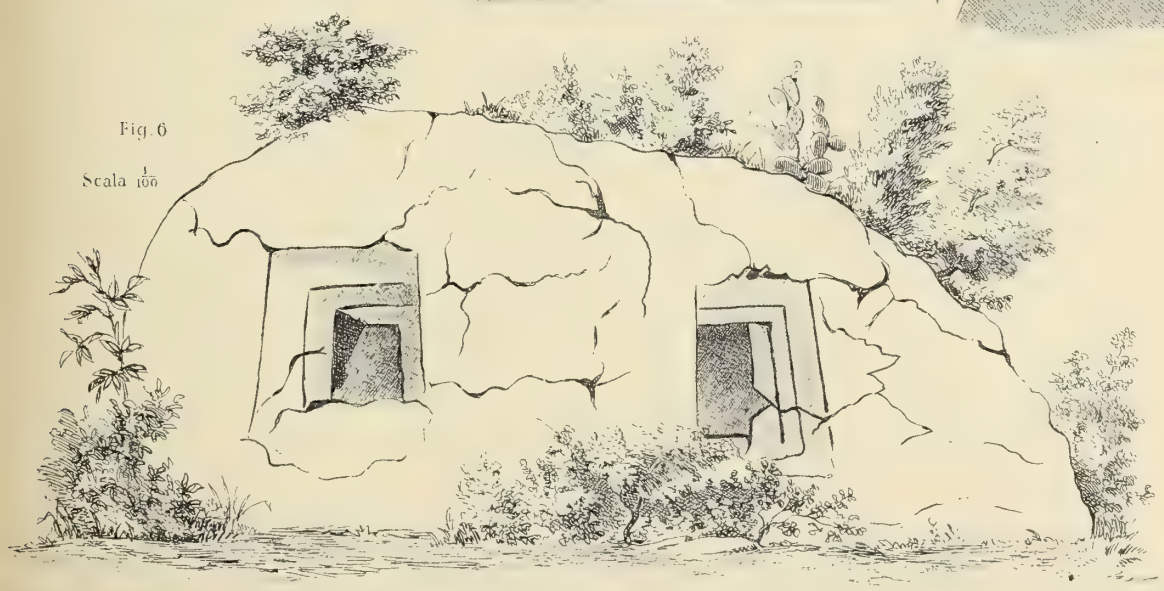
Fig. 10



Scala $\frac{1}{25}$

Fig. 6

Scala $\frac{1}{100}$



# Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa.

Memoria del dott. DOMENICO MONTESANO.

Mi propongo di esaminare in questa Nota un sistema di correlazioni polari dello spazio, le quali si presentano nello studio delle cubiche gobbe, le correlazioni, cioè, rispetto a cui a una cubica gobba corrisponde la sviluppabile dei suoi piani osculatori.

L'eminente geometra Sturm in un suo recente lavoro [1] si occupa in generale delle collineazioni e correlazioni, che mutano in sè stessa una cubica gobba, ed accenna (§ 50 della sua Memoria) che fra tali correlazioni vi è un sistema doppiamente infinito di correlazioni polari.

Ora io in questa Nota studierò direttamente un tale sistema di correlazioni, determinerò le caratteristiche elementari delle loro superficie fondamentali, e studierò con speciale attenzione la superficie luogo dei poli di un piano arbitrario nelle correlazioni del sistema, che è una superficie razionale di 6° ordine, avente per linea doppia cuspidale la cubica data, e dotata di una retta tripla e di tre rette doppie.

1. Data la cubica gobba $C_3$ fra le correlazioni polari, in cui la $C_3$ riguardata come assieme dei suoi punti e dei suoi piani osculatori, è *polare* a sè stessa, si presenta da prima la correlazione polare nulla *di osculamento*, nella quale ad ogni punto della cubica corrisponde il piano osculatore alla cubica in tale punto.

Nè vi è alcun' altra correlazione polare nulla, in cui la cubica sia polare a sè stessa, giacchè in ogni correlazione nulla ogni punto ha per corrispondente un piano, che passa per esso.

Di più è evidente che ogni collineazione o correlazione, che muti la cubica $C_3$ in sè stessa, muterà in sè stessa anche la correlazione polare di osculamento della $C_3$, e quindi ogni correlazione polare $\Pi$, in cui la cubica sia polare a sè stessa, sarà involutoria con detta correlazione H di osculamento [2], e quindi la corrispondenza ($\Pi$-H), prodotta dalle correlazioni $\Pi$, H, sarà una collineazione iperboloidica armonica, ed in essa la cubica gobba sarà coniugata a sè stessa, essendo tale rispetto alle correlazioni componenti K, H.

Ora se $d_1, d_2$ sono gli assi della ($\Pi$-H), e se P, P′ sono due punti della $C_3$ coniugati in essa, la P P′ si appoggierà alle $d_1, d_2$ in due punti, che risulteranno separati armonicamente da i punti P, P′, e che perciò risulteranno *coniugati* [3] rispetto alla

[1] Math. Annalen Bd. XXVI.

[2] V. la mia Nota *Su certi gruppi di superficie di secondo grado.* Annali di Matematica. Tomo XIV pag. 131.

[3] Cremona, Journ. für Math. Bd. 58, n. 14. — Reye, *Geometria di posizione* Lezione 14ª.

cubica, onde delle rette $d_1, d_2$ l'una contiene i punti coniugati ai punti dell'altra rispetto alla cubica, e quindi esse rette sono due *raggi di osculamento* (1) coniugati rispetto alla cubica.

Viceversa è evidente che se $d_1, d_2$ sono due raggi di osculamento della cubica coniugati rispetto ad essa, la cubica sarà coniugata a sè stessa nella collineazione iperboloidica armonica $(d_1\text{-}d_2) = \mathrm{K}$, onde risulterà polare a sè stessa anche nella correlazione (K-H), che si ottiene combinando la collineazione K con la correlazione di osculamento H. E siccome le K, H sono corrispondenze fra loro involutorie, giacchè gli assi della prima sono raggi uniti della seconda, perciò detta correlazione $(\mathrm{K\text{-}H}) = \Pi$ sarà polare; e quindi possiamo affermare che:

Combinando la correlazione polare di osculamento di una cubica gobba con le collineazioni iperboloidiche armoniche, che hanno per assi le coppie di raggi di osculamento coniugati rispetto alla cubica, si ha il completo sistema delle correlazioni polari, rispetto alle quali la cubica gobba è polare a sè stessa.

Ne sussegue che il sistema di tali correlazioni polari è doppiamente infinito.

Una qualsiasi di esse, la (K-H), ha per superficie fondamentale l'iperboloide luogo dei raggi uniti della correlazione di osculamento H, che si appoggiano a gli assi $d_1, d_2$ della collineazione K, a cui essa correlazione (K-H) è dovuta. Tale iperboloide conterrà perciò le tangenti alla cubica nei punti di appoggio delle $d_1, d_2$, e quindi in questi due punti osculerà la cubica.

2. Dunque lo studio delle correlazioni polari, in cui la cubica data è polare a sè stessa, può farsi dipendere dallo studio delle collineazioni armoniche, che mutano la cubica in sè stessa. È ciò che noi faremo.

Queste collineazioni armoniche saranno da noi costantemente indicate col simbolo K, e con $\Sigma$ ne sarà designato il sistema.

Ogni collineazione K determina sulla cubica gobba un' involuzione di punti, di cui ogni coppia è costituita di punti coniugati nella K. Data viceversa un'involuzione di punti, I, su la cubica, resta determinata la collineazione K, che dà origine ad essa. Gli assi della K sono i due raggi di osculamento: $d_1, d_2$, fra loro coniugati, che si appoggiano alla cubica nei punti doppî $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$, della I. Ognuno di tali raggi incontra la tangente nel punto di appoggio dell'altro alla cubica, onde essi sono completamente determinati dai punti $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$, dati i quali resta perciò determinata la K. Noi potremo quindi designare la K anche col simbolo $(\mathrm{D}_1\text{-}\mathrm{D}_2)$, e ne potremo dedurre che il sistema $\Sigma$ delle collineazioni K è razionale, e quindi rappresentabile su i punti di un piano; rappresentazione, che sarà da noi data in seguito.

Ora importa notare che per mezzo della sola involuzione I noi possiamo di un qualsiasi punto P dello spazio costruire il coniugato P′ nella collineazione K, a cui è dovuta la I.

(1) Ritenendo la designazione data dai geometri Schuhert e Schröter chiameremo *raggio di osculamento* della cubica ogni raggio, che passi per un punto della cubica e giaccia nel piano osculatore alla cubica in tale punto. Detti raggi di osculamento costituiscono una congruenza di 3° grado, contenuta nel complesso lineare dei raggi uniti della correlazione nulla d'osculamento.

Chè se $\pi$ è il piano polare di P nella correlazione nulla d'osculamento della $C_3$, e se A, B, C sono i punti di incontro di $\pi$ con la cubica, e A', B', C' ne sono i coniugati nella I, il punto P' sarà il polo del piano A' B' C' nella correlazione di osculamento.

Notiamo ancora che due raggi d'osculamento della cubica fra loro coniugati sono con la cubica su di una stessa superficie di secondo grado, sicchè ogni corda A A' della cubica, che incontra un raggio di osculamento $d_1$, incontra anche il suo coniugato $d_2$, e i due punti d'appoggio $D_1, D_2$ dei due raggi separano armonicamente i punti di appoggio A, A' della corda A A'.

Da questo teorema segue l'altro che:

Se PA, PB, PC sono i tre raggi di osculamento della cubica passanti per uno stesso punto P (e quindi situati nello stesso piano $\pi$, che corrisponde a P nella correlazione di osculamento), e se P' A', P' B', P' C' ne sono i raggi coniugati (passanti pel punto P' coniugato a P rispetto alla cubica e situati nel piano $\pi'$ coniugato a $\pi$), i punti A', B', C' sono coniugati armonicamente ai punti A, B, C rispetto alle coppie BC, CA, AB rispettivamente (1).

Infatti la corda A B della cubica incontrando il raggio di osculamento P C, segherà anche il suo coniugato P' C' e le coppie CC', A B saranno armoniche; e analogamente saranno armoniche le coppie AA', BC e le coppie BB', CA.

Di più se $P_1, P_2$ sono i punti di appoggio della corda PP' con la cubica, la coppia $P_1 P_2$ sarà armonica con ciascuna delle tre coppie AA', BB', CC'.

3. Se su la cubica $C_3$ si considerano due involuzioni di punti $I_1, I_2$ fra loro armoniche, tali cioè che a due a due le coppie di punti coniugati nell'una involuzione siano coniugate nell'altra involuzione, anche le due collineazioni K del sistema $\Sigma$ determinate da esse, godono la stessa proprietà, risultano cioè involutorie, sicchè i loro assi sono su di uno stesso sistema rigato, e si separano armonicamente.

E ad una terna di involuzioni di punti della $C_3$, a due a due fra loro armoniche, corrisponde una terna di collineazioni K del sistema $\Sigma$ a due a due fra loro involutorie, di cui le tre coppie di assi appartengono ad uno stesso sistema rigato, e a due a due sono fra loro armoniche.

Ogni retta $r$ dello spazio è direttrice di uno di questi sistemi rigati; cioe: ogni retta dello spazio è raggio unito di tre collineazioni K del sistema $\Sigma$, a due a due fra loro involutorie.

Siano infatti $a, b, c, d$ le tangenti della cubica $C_3$, che si appoggiano alla $r$ e quindi anche alla sua coniugata $r'$ nella correlazione H d'osculamento della $C_3$.

Se A, B, C, D sono i punti di contatto di tali tangenti, nelle collineazioni K dovute alle tre involuzioni di punti determinate su la $C_3$ dalle coppie AB, CD; AC, BD; AD, BC (involuzioni, che sono a due a due fra loro armoniche) il gruppo delle quattro tangenti $a, b, c, d$ è coniugato a sè stesso, onde lo sarà del pari la coppia delle rette $r, r'$; sicchè in ognuna di queste tre collineazioni o ciascuna delle $r, r'$ è coniugata a sè stessa, o esse sono coniugate fra di loro. Ma questa seconda ipotesi è da escludersi, perchè se in una delle tre collineazioni considerate, che avesse per assi i raggi di osculamento $d_1, d_2$, fossero coniugate le $r, r'$, le quattro rette $d_1, d_2, r, r'$ apparter-

(1) Cremona, Nouv. Annales de Math. § 5. — Staudt. *Geometrie der Lage* n. 499.

rebbero ad uno stesso sistema rigato, di cui il sistema direttore sarebbe costituito da raggi uniti della correlazione nulla di osculamento della $C_3$, e quindi conterrebbe le due tangenti alla cubica nei punti di appoggio delle $d_1, d_2$, che sarebbero perciò due delle quattro tangenti $a, b, c, d$, e che risulterebbero raggi uniti della collineazione; mentre in nessuna delle tre collineazioni, che si considerano, è raggio unito alcuna delle tangenti $a, b, c, d$.

Dunque le tre collineazioni K considerate, che a due a due sono fra loro involutorie, hanno per raggio unito il raggio $r$, il quale perciò sarà una direttrice del sistema rigato, a cui appartengono gli assi delle tre collineazioni.

4. Noi vogliamo ora considerare la superficie luogo dei punti coniugati ad un punto P nelle collineazioni armoniche K del sistema $\Sigma$.

Essendo razionale questo sistema, sarà anche razionale la superficie F, di cui vogliamo occuparci.

Siano $d, e, f$ i raggi di osculamento alla cubica $C_3$ uscenti dal punto P [1], e $d', e', f'$ siano i raggi coniugati ad essi, uscenti dal punto P′ coniugato al punto P rispetto alla cubica.

Nelle tre collineazioni armoniche K: $(d\text{-}d'), (e\text{-}e')(f\text{-}f')$, e solo in esse, il punto P è coniugato a sè stesso, onde esso punto è triplo per la superficie F.

Di più una retta arbitraria passante per P sega ulteriormente la superficie F in altri tre punti, che sono i coniugati del punto P nelle tre collineazioni K, di cui la retta considerata è raggio unito; onde la superficie F, che si esamina, è di 6° ordine.

Si presenta da prima su la superficie F un sistema di coniche giacenti nei piani osculatori della cubica $C_3$; ogni piano osculatore ne contiene tre, che formano la completa sezione di esso con la superficie.

Sia infatti $\omega$ un piano osculatore alla cubica $C_3$ in O. Se P′ è un punto della superficie $F_6$ situato in $\omega$, che sia coniugato al punto P nella collineazione K di $\Sigma$, in questa al piano $\omega$ dovrà essere coniugato uno dei tre piani osculatori alla $C_3$ passanti per il punto P; e viceversa nelle collineazioni K, in cui ad uno dei piani osculatori $\alpha, \beta, \gamma$ passanti per P corrisponde il piano $\omega$, al punto P corrispondono punti del piano $\omega$.

Ora delle collineazioni K, in cui sono coniugati i piani $\omega, \alpha$, ciascuna vien determinata quando del piano $\beta$ si assegni il corrispondente piano osculatore $\beta'$; allora del piano $\gamma$ resterà determinato il corrispondente piano $\gamma'$ e il punto $\omega\beta'\gamma'$ sarà il punto P′ coniugato in essa collineazione al punto P.

Ora col variare del piano $\beta'$, il piano $\gamma'$ viene a descrivere una serie proiettiva a quella di $\beta'$, e quindi le tracce di tali piani sul piano $\omega$ descriveranno due serie proiettive nella conica da esse inviluppata, in modo che l'assieme dei punti $\omega\beta'\gamma'$, coniugati al punto P nelle collineazioni del sistema che si considera, sarà una conica.

Quando il piano variabile $\beta'$ viene a coincidere con uno dei piani $\omega, \alpha$, la corrispondente collineazione sarà degenere, e quindi anche il piano $\gamma'$ verrà a coincidere

[1] Si suppone che il punto P non cada su alcuna tangente della cubica $C_3$, altrimenti la superficie, che cercasi, si spezzerebbe nella sviluppabile osculatrice della $C_3$ (sviluppabile, che mutasi in sè stessa in tutte le collineazioni K del sistema $\Sigma$) e nel piano osculatore alla cubica passante per la tangente, su cui trovasi il punto P.

col piano $\omega$ o col piano $\alpha$; onde le tangenti unite delle due serie proiettive sono la $\omega\omega = o$ e la $\alpha\omega$, e quindi la conica ora determinata tocca la conica del piano $\omega$ inviluppata dai piani osculatori alla cubica, nel punto O e nel punto $\omega a$ (essendo $a$ la tangente alla cubica nel piano osculatore $\alpha$).

Quando invece il piano $\beta'$ coincide col piano $\gamma$, il piano $\gamma'$ coincide col piano $\beta$, e quindi la conica ottenuta passa anche pel punto $\omega\beta\gamma$.

Analogamente si ottengono nel piano $\omega$ altre due coniche della superficie $F_6$, luoghi dei punti P' coniugati al punto P nei due sistemi di collineazioni armoniche K, nelle quali il piano $\omega$ è coniugato ad uno dei piani $\beta, \gamma$.

Entrambe queste coniche hanno un doppio contatto con la con la conica inviluppata dai piani osculatori; la prima nei punti $O, \omega b$, la seconda nei punti $O, \omega c$ (essendo $b, c$ le tangenti alla cubica nei piani $\beta, \gamma$); di più di esse la prima si appoggia alla retta $\gamma\alpha$, e la seconda alla retta $\alpha\beta$.

Col variare del piano osculatore $\omega$ veniamo ad avere infinite di siffatte terne di coniche, appoggiate alla $C_3$ e alle rette $a, b, c, \beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$. Queste linee giaceranno perciò su la superficie F; ed è facile vedere che le rette $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ contengono i punti coniugati al punto P nelle collineazioni K rispettivamente involutorie alle collineazioni (BC), (CA), (AB) di $\Sigma$; che le tangenti $a, b, c$ corrispondono per intero al punto P nelle collineazioni degeneri $(a\text{-}a) = (\text{A-A}), (b\text{-}b) = (\text{B-B}), (c\text{-}c) = (\text{C-C})$ del sistema (A, B, C sono i punti di contatto delle $a, b, c$); e che infine nelle altre corrispondenze degeneri (O-O) al punto P corrispondono i singoli punti O della cubica $C_3$.

Ogni tangente $o$ di questa, diversa dalle $a, b, c$, ha in comune con la superficie F sei punti coincidenti col punto di contatto O con la $C_3$, giacchè coincidono in O i sei punti di sezione della $o$ con le tre coniche della F situate nel piano osculatore $\omega$ in O.

Invece ogni corda della cubica $C_3$ ha in comune con la superficie F oltre i due punti d'appoggio con la cubica altri due punti.

Chè se TT' è una corda della $C_3$, in una collineazione (non degenere) K, in cui al punto P sia coniugato un punto della TT', questa dovrà essere coniugata alla corda DD' uscente da P, e viceversa; onde i punti P' della F situati su la TT' (e non su la $C_3$) sono i coniugati di P nelle due collineazioni K individuate dalle due involuzioni di punti della $C_3$, determinate l'una dalle coppie TD, T'D', e l'altra dalla coppie TD', T'D.

Segue da ciò che la cubica $C_3$ è doppia per la superficie F; ma siccome ogni suo punto O è coniugato al punto P non in due collineazioni distinte del sistema $\Sigma$, ma nelle due collineazioni degeneri (O-O), (O'-O') infinitamente poco diverse da loro, perciò la cubica $C_3$ è curva doppia cuspidale per la F.

La superficie F possiede altre linee multiple.

La corda $DD' = c$ della cubica $C_3$, uscente da P è tripla per la F, chè se $P_1$ è un suo punto arbitrario, e se Q, Q' sono i punti che dividono armonicamente le coppie $PP_1, DD'$, i raggi di osculamento $l, m, n$ uscenti dal punto Q e i raggi ad essi coniugati $l', m', n'$ (che passano pel punto Q') determinano tre collineazioni K: $(l\text{-}l'), (m\text{-}m'), (n\text{-}n')$ del sistema $\Sigma$ (involutorie con la (DD')), in ciascuna delle quali al punto P corrisponde il punto $P_1$, sicchè questo sarà triplo per la $F_6$, la quale perciò avrà per retta tripla la $c$.

Il punto P′ della $c$, che è coniugato al punto P rispetto alla cubica, è coniugato a P oltre che nelle tre collineazioni K, determinate come sopra, anche nella collineazione (D-D′) del sistema $\Sigma$, e quindi è quadruplo per la superficie F.

E i tre raggi di osculamento $d', e', f'$ (= P′ A′, P′ B′, P′ C′) uscenti da esso (e perciò situati nel suo piano polare nella correlazione H) sono doppî per la superficie. Chè se $P_1$ è un punto di uno di questi raggi, p. es. di $d'$, una delle tre collineazioni K del sistema $\Sigma$, di cui la $PP_1$ è raggio unito, è la collineazione $(d\text{-}d')$, onde nelle altre due (fra loro involutorie, e involutorie con la $(d\text{-}d')$, (§ 3)) le $d, d'$ saranno fra loro coniugate, e quindi in ciascuna di esse il punto $P_1$ sarà coniugato al punto P, sicchè $P_1$ sarà doppio per la superficie F, della quale perciò le tre rette $d', e', f'$ saranno doppie.

Lo stesso può dedursi considerando le coniche della $F_6$ situate nei piani osculatori $\alpha', \beta', \gamma'$ della $C_3$, che passano pel punto P.

La conica, p. es., luogo dei punti coniugati al punto P nelle collineazioni K, in cui sono coniugati i piani $\alpha, \alpha'$, si riduce ad una retta da contarsi due volte, poichè la corrispondenza proiettiva fre le tracce dei piani osculatori, che la determina, risulta in questo caso involutoria, giacchè le due tangenti unite $(\alpha' \alpha' = a', \alpha' \alpha)$ della corrispondenza risultano separate armonicamente dalle due tangenti corrispondenti $\alpha' \beta$, $\alpha' \gamma$, essendo armonico il gruppo dei quattro piani $\alpha, \alpha' \beta, \gamma$ (§ 2).

5. Tutto il sistema $\Sigma$ delle collineazioni armoniche K, che noi consideriamo, si muta in sè stesso in una qualsiasi di tali collineazioni.

Perciò se consideriamo le tre collineazioni del sistema nelle quali il punto P è coniugato a sè stesso: le collineazioni $(d\text{-}d'), (e\text{-}e')(f\text{-}f')$, in una qualsiasi di esse ad un punto $P_1$ della superficie $F_6$ (che corrisponda al punto P nella collineazione $K_1$) ha da essere coniugato il punto $P'_1$ coniugato a P nella collineazione $K_1'$ di $\Sigma$, che corrisponde alla $K_1$ nella collineazione che si considera; e siccome $P'_1$ è anche esso un punto della superficie F, perciò questa si muta in sè stessa in ciascuna delle tre collineazioni armoniche $(d\text{-}d'), (e\text{-}e',), (f\text{-}f')$.

6. La superficie F da noi ottenuta può anche riguardarsi come il luogo dei poli del piano $\pi = ABC$ (che corrisponde al punto P nella correlazione di osculamento H) nelle correlazioni polari $\Pi = (K\text{-}H)$, nelle quali la cubica $C_3$ è polare a sè stessa (§ 1).

Invece la superficie di 6ª classe $\Phi$ coniugata alla F nella correlazione H, è l'inviluppo dei piani polari del punto P nelle correlazioni polari $\Pi$ ora accennate.

Noi indicheremo costantemente con $\Sigma_1$ il sistema di tali correlazioni polari. Esse sono riferite univocamente alle collineazioni armoniche del sistema $\Sigma$, che combinate con la H le producono.

Ora noi possiamo rappresentare le corrispondenze dei due sistemi sui punti di un piano.

A ciò supponiamo stabilita una corrispondenza proiettiva fra i punti della cubica gobba $C_3$ e quelli di una conica $C_2$, e nel piano $\mu$ di questa conica assumiamo come immagine di una collineazione K del sistema $\Sigma$ (o della corrispondente correlazione polare (K-H) del sistema $\Sigma_1$) il polo dell'involuzione di punti della $C_2$, che corrisponde all'involuzione di punti della $C_3$ determinata dalla K; con che viceversa ad ogni punto del piano $\mu$ corrisponde un' unica collineazione K del sistema $\Sigma$ (o un' unica correlazione $\Pi = (K\text{-}H)$ del sistema $\Sigma_1$).

I punti della $C_2$ sono le immagini delle corrispondenze degeneri del sistema $\Sigma$ (o in quelle del sistema $\Sigma_1$); e a due punti coniugati rispetto alla $C_2$ corrispondono due collineazioni K fra loro involutorie (o due correlazioni $\Pi$ fra loro involutorie iperboloidiche).

Da questa rappresentazione si può dedurre quella della superficie $F_6$ dovuta ad un qualsiasi punto P.

Basta a ciò assumere come immagine di ciascun punto X della superficie F quel punto $X_1$ del piano $\mu$, che è l'immagine della collineazione del sistema $\Sigma$, nella quale il punto P ha per coniugato il punto X.

Occupiamoci brevemente di tale rappresentazione.

I punti fondamentali di essa sono i punti $A_1, B_1, C_1$ della conica $C_2$, che corrispondono ai punti A,B,Cdella $C_3$, situati nel piano polare del punto P nella correlazione d'osculamento. Essi infatti sono immagini delle tre collineazioni degeneri (A-A), (B-B), (C-C) del sistema $\Sigma$, e quindi sono immagini delle rette $a, b, c$ della superficie F, tangenti alla cubica nei punti A, B, C, le quali corrispondono per intero al punto P in quelle tre collineazioni degeneri (§ 4).

Se $A'_1, B'_1, C'_1$ sono i punti della conica $C_2$ coniugati armonicamente ai punti A, B, C rispetto alle tre coppie BC, CA, AB, le tre coppie AA', BB', CC' appartengono ad un' involuzione, che corrisponde all'involuzione della $C_3$, di cui sono punti doppî i punti di appoggio D, D' della corda $c$ della cubica passante per P (§ 2); e siccome le collineazioni del sistema $\Sigma$, in cui il punto P ha per coniugati i punti della corda $c$ sono involutorie con la collineazione (D-D') del sistema (§ 4), perciò la retta tripla $c$ della F ha per immagine l'asse $o_1$ d'omologia dei due triangoli omologici $A_1 B_1 C_1$, $A'_1 B'_1 C'_1$, il quale è anche l'asse di omologia di uno di questi triangoli e del triangolo delle tangenti alla conica $C_2$ nei vertici di esso.

I punti di questa retta $o_1$ si distribuiscono in terne, di cui ciascuna è l'immagine di uno stesso punto della retta $c$ della F.

I punti di una stessa terna sono poli di tre involuzioni di punti della conica $C_2$, nelle quali al gruppo di punti $(A_1 B_1 C_1)$ è coniugato lo stesso gruppo di punti $(A_0 B_0 C_0)$, sicchè ognuna di queste terne è composta di tre punti proiezioni dei punti $A_1, B_1, C_1$ da uno stesso punto della conica $C_2$.

Infine le tre rette doppie della superficie F contenendo i coniugati del punto P nelle collineazioni K del sistema $\Sigma$ involutorie con le collineazioni (A-A'), (B-B'), (C-C') rispettivamente, avranno per immagini le rette $A_1 A'_1$, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$, di ciascuna delle quali ogni coppia di punti coniugati rispetto alla conica $C_2$ sarà l'immagine di un punto della corrispondente retta doppia della superficie F.

Ne sussegue che le immagini delle sezioni piane della superficie dovranno passare semplicemente per i punti fondamentali $A_1, B_1, C_1$, dovranno segare la retta $o_1$ in tre punti di una stessa terna e segare ciascuna delle rette $A_1 A'_1, B_1 B_1', C_1 C'_1$ in una coppia di punti coniugati rispetto alla conica $C_2$ (oltre che nei punti $A_1, B_1, C_1$ rispettivamente) sicchè tali immagini saranno delle curve di 3° ordine [1].

[1] Noi possiamo da ciò dedurre che le sezioni piane della superficie F sono di 6° ordine e di genere 1, e che quindi su la $F_6$, oltre la retta tripla e le tre rette doppie, vi deve essere un'ulteriore linea doppia di 3° ordine, che non può essere diversa dalla cubica $C_3$. E che questa sia cuspidale si deduce dal fatto che i punti di essa hanno per immagine sul piano $\mu$ i singoli punti della conica $C_2$.

Le rette $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ del piano $\mu$ sono le immagini delle rette $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ della F, ed i punti in cui esse rette segano la $o_1$ sono le immagini del punto P.

Invece il punto quadruplo P' della F ha per immagine il punto di concorso $O_1$ delle $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$ e i tre punti, in cui queste rette segano la $o_1$.

Infine le tre coniche secondo cui un piano osculatore alla cubica sega la superficie F hanno per immagini le rette, che uniscono i punti $A_1, B_1, C_1$ al punto della conica $C_2$, che corrisponde al punto di contatto della cubica $C_3$ col piano osculatore considerato. Queste tre rette costituiscono infatti una linea di 3° ordine, che soddisfa le condizioni, da cui sono determinate le curve immagini delle sezioni piane della $F_6$.

7. La sezione della superficie $F_6$ col piano $\pi = ABC$, di cui essa è il luogo dei poli nelle correlazioni $\Pi$ del sistema $\Sigma_1$, ha per immagine sul piano di rappresentazione $\mu$ una curva di 3° ordine $C_\pi$, che tocca in $A_1, B_1, C_1$ la conica $C_2$ e passa per i tre punti comuni alla $o_1$ e alle rette $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$, punti che sono l'immagine del punto P.

Queste condizioni determinano infinite curve $C_3$ costituenti un fascio (di cui fanno parte le linee degeneri $(o_1, C_2), (B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1)$); fra di esse la $C_\pi$ resta completamente individuata dal dovere segare ulteriormente ciascuna delle $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$ in due punti coniugati rispetto alla $C_2$, onde se $E_1, D_1$ sono i punti di incontro della $A_1A'_1$, con le rette $o_1, B_1C_1$, i due punti di ulteriore sezione della $A_1A'_1$ con la curva $C_\pi$ saranno i punti coniugati rispetto alla $C_2$ e coniugati nell'involuzione determinata dalle coppie $A'_1E_1, A_1D_1$. Analogamente per le rette $B_1B'_1, C_1C_1'$.

Nelle correlazioni polari del sistema $\Sigma_1$, che hanno per immagini sul piano $\mu$ i punti di questa curva $C_\pi$, i poli del piano $\pi$ trovansi su di esso, sicchè le superficie fondamentali di esse correlazioni polari sono tangenti al piano $\pi$ (e quindi passano pel polo P di $\pi$ nella correlazione H); dal che segue che:

Le correlazioni polari del sistema $\Sigma_1$, le cui superficie fondamentali toccano un piano dato (o passano per un punto dato) hanno per immagini sul piano di rappresentazione i punti di una curva di 3° ordine completamente individuata col piano (o col punto) dato.

8. Ai punti di una retta $r_1$ del piano $\mu$, che seghi in $T_1, U_1$ la conica $C_2$ corrispondono nel sistema $\Sigma$ le collineazioni K involutorie con la $K_0 = (T\text{-}U)$ (e in $\Sigma_1$ le collineazioni $\Pi$ involutorie con la $\Pi_0 = (K_0\text{-}H)$).

Ad un punto arbitrario P dello spazio sono coniugati in tali collineazioni K i punti di una cubica gobba, che è quella che su la superficie $F_6$ dovuta al punto P corrisponde alla retta $r_1$ del piano di rappresentazione $\mu$. Tale cubica passa per i punti T, U, che corrispondono al punto P nelle collineazioni degeneri dell'assieme, che si considera.

Perciò in tali collineazioni le rette coniugate ad una retta arbitraria $r$ appartengono ad una superficie gobba di 4° grado della 1ª specie Cremona (potendo questa superficie in infiniti modi riguardarsi come luogo delle congiungenti punti corrispondenti di due serie proiettive di punti situate su due cubiche gobbe, aventi in comune due punti, che sono punti uniti della corrispondenza).

Onde fra le collineazioni K, che hanno per immagini i punti della $r_1$ ve ne sono quattro, in cui ad una retta $r$ sono coniugate rette appoggiate ad una retta $s$, e quindi

tenendo fisse le rette $r, s$ si avrà che le collineazioni K del sistema $\Sigma$, in cui ad una delle rette $r, s$ sono coniugate rette appoggiate all'altra, hanno per immagini sul piano $\mu$ i punti di una curva di quarto ordine $C_4$.

Questa sega la $C_2$ nei punti, che corrispondono ai punti di contatto delle tangenti della $C_3$ appoggiate alle $r, s$.

E nelle correlazioni polari $\Pi$ del sistema $\Sigma_1$, che corrispondono ai punti di questa curva $C_4$, alla retta $r$ sono coniugate rette appoggiate alla $s'$, che è coniugata alla $s$ nella correlazione H di osculamento, come, per conseguenza, alla $s$ sono coniugate rette appoggiate alla $r'$, che è coniugata alla $r$ nella correlazione H.

Ora se la $s$ coincide con la $r'$, se cioè le rette $r, s$, che si considerano, sono fra loro coniugate rispetto alla H, allora la corrispondente curva $C_4$ sarà l'immagine delle correlazioni polari $\Pi$ del sistema $\Sigma_1$, nelle quali a ciascuna delle rette $r, r'$ è coniugata una retta appoggiata ad essa, sarà cioè l'immagine di quelle correlazioni polari $\Pi$, le cui superficie fondamentali risultano tangenti alle $r, r'$.

In tale caso la curva $C_4$ risulta tangente alla conica $C_2$ nei quattro punti $L_1, M_1, N_1, P_1$ che corrispondono ai quattro punti di contatto delle tangenti $l, m, n, p$ della $C_3$, che si appoggiano alle $r, r'$.

E se $L'_1, M'_1, N'_1, P_1'$; $L''_1, M''_1, N''_1, P''_1$ sono i punti della conica $C_2$, che corrispondono rispettivamente ai punti di sezione della $C_3$ con i piani $r'l, r'm, r'n, r'p$; $rl, rm, rn, rp$, le tangenti $l_1, m_1, n_1, p_1$, alla curva $C_4$ nei punti $L_1, M_1, N_1, P_1$ sono ulteriormente toccate dalla $C_4$ nei punti $(l_1 - L'_1 L''_1), (m_1 - M'_1 M''_1), (n_1 - N'_1 N''_1), (p_1 - P'_1 P''_1)$. Di più appartengono alla $C_4$ i punti in cui la $L_1 M_1$ è segata dalle rette $L'_1 M''_1$. $L''_1 M'_1$ e i punti analoghi dovuti alle altre congiungenti a due a due i punti $L_1, M_1, N_1, P_1$.

Notiamo infatti che il punto comune alle $L_1 M_1, L'_1 M''_1$ rappresenta una collineazione del sistema $\Sigma$, nella quale al punto $rl$ corrisponde il punto $r'm$, e quindi rappresenta una correlazione del sistema $\Sigma_1$, nella quale il punto $rl$ ha per piano polare il piano $rm$, ecc.

Se $Q_1, R_1, S_1$ sono i punti diagonali del quadrangolo $L_1 M_1 N_1 P_1$, essi saranno le immagini delle tre collineazioni del sistema $\Sigma$, di cui le $r, r'$ sono raggi uniti (§ 3); e siccome in queste tre collineazioni si muta in sè stesso l'assieme delle correlazioni $\Pi$, che si considera, perciò la curva $C_4$ si muterà in sè stessa nelle tre omologie armoniche $(Q_1 — R_1 S_1), (R_1 — Q_1 S_1), (S_1 — Q_1 R_1)$, cioè i punti della $C_4$ si distribuiscono in quadrangoli aventi per triangolo diagonale il triangolo $Q_1 R_1 S_1$, dal che segue che la curva $C_4$ non ammette punti doppî.

Ed evidentemente noi possiamo affermare che:

Le correlazioni polari $\Pi$ del sistema $\Sigma_1$, le cui superficie fondamentali toccano una data retta $r$ (e perciò anche la sua coniugata $r'$ nella correlazione H), hanno per immagini sul piano $\mu$ i punti di una curva di quarto ordine e di genere 3, completamente determinata con la retta $r$.

Da questo teorema e da quello del paragrafo precedente si deduce che:

Nel sistema I delle superficie di secondo grado, rispetto alle quali una cubica gobba data è polare reciproca a sè stessa, vi sono

nove superficie che passano per due punti, o che toccano due piani, o che passano per un punto e sono tangenti ad un piano dato; ve ne sono dodici, che toccano una data retta e passano per un punto o toccano un piano dato, e ve ne sono sedici, che toccano due rette date.

9. Le generatrici delle superficie di secondo grado del sistema I (rispetto alle quali la cubica data è polare reciproca a sè stessa) sono in notevoli relazioni con la cubica gobba.

Sia F una superficie del sistema, che sia la superficie fondamentale della correlazione $\Pi_0 = (K_0 - H)$ del sistema $\Sigma_1$.

Un sistema rigato della F è costituito dai raggi uniti della correlazione H appoggiati a gli assi $d_1, d_2$ della $K_0$; l'altro sistema rigato è costituito invece da coppie di rette coniugate sia nella correlazione H che nella collineazione $K_0$.

Perciò due rette di una qualsiasi di queste coppie si appoggiano a quattro tangenti della cubica $C_3$ costituenti un gruppo, che è coniugato a sè stesso nella $K_0$. E siccome due di queste tangenti sono quelle che toccano la cubica nei punti di appoggio degli assi $d_1, d_2$ della $K_0$, (le quali sono raggi uniti di questa) perciò le altre due risultano coniugate in essa, e quindi i loro punti di contatto separano armonicamente i punti di contatto delle prime due tangenti.

Viceversa se una retta $r$ (e con essa la sua coniugata $r'$ nella H) si appoggiano a quattro tangenti della cubica data, i cui punti di contatto costituiscono un gruppo armonico, esse rette $r, r'$ si trovano su due iperboloidi del sistema I fra loro involutorî.

Chè se infatti L, M, N, P sono i punti di contatto in parola, in ciascuna delle due collineazioni K: (L - M), (N - P) (che risultano involutorie, essendo armonico il gruppo (LMNP)), le $r, r'$ sono fra loro coniugate, onde esse risultano raggi uniti delle correlazioni polari $\Pi$, dovute a queste due collineazioni K.

Possiamo dunque affermare che:

Il complesso delle generatrici degli iperboloidi, rispetto ai quali una cubica gobba $C_3$ è polare reciproca a sè stessa, è costituito dal complesso dei raggi uniti della correlazione di osculamento della $C_3$ e dal complesso delle rette, che si appoggiano a quattro tangenti della $C_3$, di cui i punti di contatto costituiscono un gruppo armonico.

Per ognuna di queste rette passano, come abbiamo visto, due iperboloidi del sistema I fra loro involutorî. Invece per ogni raggio unito $u$ della correlazione H di osculamento passano tre iperboloidi del sistema I a due a due fra loro involutorî. Essi sono le superficie fondamentali delle correlazioni polari del sistema $\Sigma_1$ dovute alle tre collineazioni $K_1, K_2 K_3$ del sistema $\Sigma$, le quali hanno per raggio unito il raggio $u$, che si considera.

Dette superficie hanno ulteriormente in comune il secondo raggio unito della H, che trovasi sull'iperboloide contenente gli assi delle $K_1, K_2, K_3$, nel sistema opposto a quello di questi assi.

Dalle cose su esposte segue ancora che se si considera nello spazio un punto arbitrario A ed un piano $\alpha$ passante per esso, delle nove superficie del sistema I, che passano per A e toccano il piano $\alpha$, tre sono quelle che passano pel raggio

unito della correlazione H situato nel fascio (A-$\alpha$), e le altre sei a due a due passano per le singole rette del fascio (A-$\alpha$), che incontrano quattro tangenti della cubica, di cui i punti di contatto formano un gruppo armonico. Onde il numero di tali rette è tre, e quindi:

Il complesso delle rette che incontrano quattro tangenti di una cubica gobba, delle quali i punti di contatto formano un gruppo armonico, è un complesso di terzo grado: $X_3$ (1).

Ogni raggio di tale complesso, che passi per un punto della cubica $C_3$ (o che sia in un piano osculatore di essa) ne è un raggio osculatore, onde se $\alpha$ è un piano osculatore alla cubica nel punto A, il fascio (A-$\alpha$) contato tre volte forma il cono del punto A e la curva inviluppo del piano $\alpha$ nel complesso $X_3$

Di più notiamo che il complesso $X_3$ si trasforma in sè stesso in tutte le collineazioni e correlazioni che mutano la cubica gobba in sè stessa.

(1) Sturm, Giornale di Crelle. Vol. 86, pag. 131.

# I terremoti Andalusi cominciati il 25 dicembre 1884.

Memoria di T. TARAMELLI e G. MERCALLI

*letta nelle sedute dei giorni 10 e 12 giugno 1885.*

(Con quattro tavole)

---

In seguito a proposta dell'illustre sig. Presidente della r. Accademia de' Lincei, i Ministeri d'Istruzione pubblica, d'Agricoltura e Lavori pubblici ci onorarono dell'incarico di studiare i terremoti, incominciati nell'Andalusia il 25 dicembre 1884 e ci veniva formulato dal Socio sig. prof. Stoppani il seguente programma.

1° Rilevare, coll'aiuto delle opere e delle carte geologiche risguardanti la regione commossa dal terremoto, la struttura geologica con particolare riguardo alla tectonica delle formazioni ed alle relazioni che possono esistere tra quella regione, le Baleari, le isole e la penisola italiana. Si desidera che i risultati di questo studio possano giovare anche alla conoscenza della stratigrafia di quel tratto del bacino mediterraneo occidentale, in vista degli studî talassografici, affidati ad apposita Commissione della r. Accademia dei Lincei.

2° Esporre la storia del terremoto, considerato nei suoi varî elementi: fenomeni precursori, ora, direzione, natura ed intensità delle scosse, repliche, rombi ed altri fenomeni fisici, che sogliono accompagnare le scosse.

3° Rilevare gli effetti meccanici del terremoto sugli edificî, esaminare la distribuzione delle rovine in rapporto colla natura, colla disposizione e colla conformazione del suolo. Ciò anche in vista di ulteriori consigli che si potrebbero dare per la collocazione, natura e forma degli edificî in quelle nostre provincie, le quali, pur essendo soggette a frequenti e dannosi terremoti, hanno condizioni di suolo diverse dalle assai speciali dell'isola d'Ischia.

4° Rilevare gli effetti dinamici e fisici sul suolo, e le modificazioni portate dalle scosse nella circolazione interna ed esterna delle acque.

5° Determinare l'area del terremoto, la posizione e la forma dell'epicentro e possibilmente la profondità e la natura geologica del centro o dei centri di scossa.

6° Esaminare il modo di propagazione del movimento sismico, specialmente in rapporto colla natura delle rocce e colle fratture stratigrafiche.

7° Esaminare i rapporti dei recenti terremoti andalusi coi terremoti iberici delle passate epoche e coi fenomeni sismo-vulcanici di altre parti del globo, specialmente d'Italia.

L'elaborato dei due inviati, corredato dalle carte e dai disegni necessarî, verrà presentato alla r. Accademia dei Lincei [1].

[1] Rendiconti della r. Acc. d. Lincei. V. I, 9, seduta 12 aprile 1885.

Il giorno 8 aprile salpammo da Genova per Barcellona e di là direttamente a Madrid, dove, mercè la squisita gentilezza del sig. Ministro Canovas de Castillo, del sig. ministro italiano, barone Le Blanc e dei signori geologi spagnuoli, ebbimo le più ampie commendatizie ed utili indicazioni scientifiche per agevolare le nostre ricerche ed escursioni nei luoghi colpiti dal terremoto.

Incominciammo le escursioni nell'area del terremoto fermandoci ad Almaden, dove visitammo le famose miniere di cinabro, e dopo breve sosta a Cordova, Siviglia, Cadice, Osuna, raccogliendo notizie del terremoto, giungemmo il 20 aprile a Malaga. Per essere già trascorsi quasi quattro mesi dal giorno della grande catastrofe, le case più danneggiate o pericolanti erano in gran parte demolite. Tuttavia nei paesi più fortemente colpiti come Velez-Malaga, Arenas del Rey, Alhama, Zafarraya, Cacin ecc., trovammo campo vastissimo per le nostre osservazioni e per lo studio degli effetti dinamici del terremoto. Sicchè speriamo che la presente Relazione, sebbene incompleta e pel ritardo della nostra visita e per la brevità del tempo da noi impiegato, porga al lettore una cognizione sufficiente sia della struttura geologica della regione come della natura e degli effetti del terremoto.

Dividiamo il nostro lavoro in tre parti: nella prima esponiamo le condizioni tectoniche dell'Andalusia e delle provincie confinanti della Spagna meridionale, aggiungendo alcun maggiore dettaglio per la regione più fortemente scossa; nella seconda parte facciamo la storia dei terremoti accaduti nell'Andalusia, confrontandoli con quelli delle altre regioni della penisola iberica; nella terza parte tratteremo lo studio monografico del periodo sismico, che fu iniziato dalla scossa disastrosa del 25 dicembre.

---

# PARTE PRIMA

## I.

## Notizie sulla orografia e sulla costituzione geologica dell'Andalusia e della provincia dell'Almeria.

Il tratto della Spagna meridionale, che piglia il nome di Andalusia, dalla sierra Morena e dalla sierra Sagra si estende alle spiagge dell'Atlantico e del Mediterraneo dallo sbocco del Guadalquivir alla provincia d'Almeria; ha la figura di trapezio, colla base a nord di oltre mille chilometri, coll'altezza da nord a sud di oltre seicento; il massimo rilievo si inalza assai presso alla costa mediterranea colla sierra Nevada (3481$^{m}$), formando poi un contorno ancora più litoraneo la catena delle Alpujarras, che tocca i duemila metri d'altitudine e che si continua verso ponente coi monti di Malaga e colla Serranìa di Ronda. All'estremo occidentale si stende una regione collinesca, che muore allo stretto di Gibilterra coll'altopiano di Tarifa e colla rupe di calcare liassico, su cui posa la fortezza inglese. La sierra Nevada e le altre catene che le stanno a ponente chiudono a sud l'ampio bacino del Guadalquivir, che a mattina è limitato dalla sierra Sagra (2392$^{m}$) ed a tramontana dalla più umile sierra Morena (995);

ed i geografi chiamano *betica*, dall'antico nome del fiume, quella regione ed in particolare la massima catena, distinguendo poi col nome di *penibetico* quel sistema di catene basilari, che contornano la sierra Nevada.

Il Guadalquivir tiene il suo corso fin sotto a Siviglia rasente le falde della sierra Morena, lasciando sulla sinistra largo tratto di terreno ondulato, poi un labirinto di sierre ed un assai intricato sistema di depressioni, d'onde ad esso provengono i principali tributarî, quali la Guadiana Menor, il Guadalbullon, il Guadajoz ed il Genil. In provincia di Cadice il Guadalete scende direttamente all'Oceano a nord di questa città, e nella regione litoranea mediterranea per le provincie di Malaga, Granata ed Almerìa scendono del pari direttamente al mare molti fiumi e torrenti, dei quali da ponente a levante ricorderemo tra i principali: il Guadiaro col confluente Genal dalla Serranìa di Ronda; il Guadalhorce ed il Rio di Velez dai monti di Malaga; il Guadalfeo ed il fiume Adra dalle sierre Nevada, di Lujar ed Alpujarras, il Rio Almerìa dalla sierra de las Filabres, ed il Rio Almanzora nel piovente orientale, trovando foce tra il capo di Gata e Cartagena.

La feracità di talune plaghe di quella contrada è pari alla mitezza del clima; e nei tratti più alpestri della catena litoranea si dispiegano dei paesaggi abbastanza variati per emulare l'amenità delle nostre prealpi orientali. Però anche il massimo rilievo della serra Nevada, per la semplicità del motivo tectonico e per la prevalenza dei terreni scistosi, uniformemente modellati dalla abrasione, offre un aspetto monotono, reso ancora più triste dalla scarsità della vegetazione arborea. Dove poi si estendono vasti affioramenti di terreni serpentinosi, come nella Serranìa di Ronda, o dove decorrono per molti chilometri le denudate creste di calcari e di dolomie mesozoiche, sotto la quasi perenne arsura di quel clima, la vegetazione è assai scarsa. Contansi in media da 35 a 50 giorni di pioggia all'anno, con una media annuale di 19° di temperatura a Malaga, di 18° ad Almerìa, di 17° a Cadice e con massime di 40° a 43°.

Come è molto diversa la struttura geologica dei due versanti della valle betica, così il carattere del paesaggio, con molli ed uniformi ondeggiamenti per la sierra Morena, che è uno smisurato avanzo di una abrasa massa di rocce cristalline antiche, fortemente, contrasta all'ampiezza dei terrazzi posterziarî e miocenici, che ricolmano la vastissima depressione, colla varietà e coll'asprezza delle sierre penibetiche, colla solenne maestosità del rilievo principale. Insieme al carattere del suolo varia pur quello delle valli secondarie; in generale però, stante l'energico ma uniforme sollevamento postmiocenico del bacino betico, i minori confluenti sono profondamente incassati nelle formazioni del terziario recente e del quaternario oppure negli stretti solchi, scolpiti nelle rocce calcari; come si avverte particolarmente pel tratto inferiore del Guadalfeo sopra Motril e pei rivi, che dalla regione per noi più interessante del versante meridionale del R. Genil, in provincia di Granata, scendono verso nord all'ampio bacino, che piglia il nome da questa città. Sull'orlo di tali solchi, profondi le centinaia di metri, sono collocati in generale gli abitati; la quale situazione vedremo quanto abbia contribuito a rendere più fatali le rovine, causate dal terremoto.

Sarebbe indubbiamente fuori di luogo che noi esponessimo la lunga serie degli scritti, che dal principio del secolo trattarono della geologia di questa regione; anzi confessiamo che dei più antichi avemmo notizia indiretta dagli scrittori più recenti,

tra i quali poniamo in prima linea i geologi spagnuoli; taluni componenti l'Ufficio geologico, che colà funziona assai lodevolmente, altri addetti all'insegnamento, altri per elezione appassionati e coltissimi cultori della geologia del loro paese. È noto poi come i geologi francesi ed in particolare i signori Verneuil e Collomb, l'austriaco Drasche e prima ancora gli inglesi Anstedt e Silvertop abbiano portato largo tributo di quei primi raffronti, che, anche quando non sono del tutto felici, servono di esca e di stimolo per gli osservatori locali. L'impianto modesto ma opportuno di quell'Ufficio geologico (provveduto di abbondanti raccolte paleontologiche e di personale addetto allo studio delle medesime; che, pur serbando unità di direzione, si giova anche degli studî dei geologi che ad esso non appartengono; che, senza grande sfarzo di carte, pubblica gradatamente delle buone descrizioni stratigrafiche per le singole provincie, e delle monografie paleontologiche bene illustrate) contribuì certamente a fecondare gli esempî dei geologi non spagnuoli ed a rendere quella penisola tra le più note alla scienza geologica, ad onta delle difficoltà materiali, che le condizioni di suolo e di viabilità oppongono allo studio dettagliato di essa.

Importanti notizie con uno sguardo generale sui terreni iberici e sui terreni dell'Andalusia in particolare, del sig. Esquerra del Bayo, comparvero nel Neues Jahrbuch di Leonhard e Bronn nel 1851, rilevando in particolare la natura dei terreni scistosi antichi e delle rocce cristalline; mentre le osservazioni di Verneuil e Collomb servirono a preferenza ad una prima distinzione delle formazioni mesozoiche. Accadeva però che il loro concetto di un'azione metamorfica, esercitata dalle diabasi sulle formazioni che le comprendono e che erano ritenute triassiche, indusse sino a questi ultimi anni una determinazione erronea delle formazioni paleozoiche più recenti. Devesi soggiungere che tale loro idea fu enunciata con riserva e che per la sierra di Gador, famosa per la ricchezza in filoni di galena argentifera nei suoi calcari dolomitici, più recenti rinvenimenti di fossili dimostrano come più accettabile l'opinione dei geologi francesi.

Dalle pubblicazioni della *Comisión del Mapa* (1) e dai pregevolissimi studî del sig. Mac-Pherson abbiamo tolto per la massima parte le notizie che verremo esponendo, prima per la valle betica poi per la regione litoranea da Cadice alla foce del R. Almanzora; parendoci che possa giudicarsi questa rivista non estranea allo scopo del presente scritto, in particolare dal punto di vista tectonico, e se la estendiamo alla regione trachitica del capo di Gata, nella quale si potrebbe scorgere qualche rapporto col fenomeno sismico da noi esaminato, ed alle isole Pitiuse e Baleari, poste sull'allineamento stratigrafico, al quale appartiene il rilievo andaluso, come evidentemente compare dallo schizzo in calce alla annessa tavola geologica (Tav. I$^a$).

In provincia di Jaen ed a nord di questa città, il Guadalquivir riceve sulla destra il Guadalimar col tributario Guadalen e più sotto, presso Andujar, l'Almandula; tra Cordova e Siviglia, il Guadiato dalla valle di Belmez-Espiel, importante pei suoi

(1) In appendice alla Memoria dei signori Verneuil e Collomb, inserita nel vol. X, 2$^a$ serie del Boll. d. Soc. geol. di Francia, evvi una ricca nota bibliografica, alla quale fanno continuazione altre pubblicate a più riprese nel Bol. d. Com. del Mapa geologico di Madrid; i lavori del signor Mac-Pherson sono pubblicati in quest'ultimo od a parte, e per la geologia andalusa sono assai importanti, essendo tutti improntati da larghezza di vedute, coll'obiettivo costante di una esatta nozione della storia di tutta la penisola.

depositi di carbon fossile, il Bembazar ed il Biar; poco sotto Siviglia, il fiume abbandona le falde della sierra Morena e solca un vasto altipiano di terreni terziarî; aggiungendosi al miocene, che occupa tutta la depressione betica ed il bacino di Granata sino ad oltre mille metri, anche il pliocene marino, che in due zone divergenti si spinge fino a Huelva e fino a Cadice. Il Guadalquivir mette foce in un profondo estuario tra Huelva e S. Lucar. L'esistenza di un estuario, ad onta delle abbondanti torbide del fiume, che misura nelle piene anche non eccezionali una portata superiore a quella media del Po, aggiunta al fatto che in estuario sbocca del pari il Tago presso Lisbona, ed all'essere la costa cantabrica incisa da veri fiordi, che si internano per decine di chilometri entro terra, conforta a ritenere molto probabile che negli ultimi periodi neozoici la costa oceanica della Spagna sia stata in fase di prevalente sommersione; e questa induzione noi vedremo come possa tradursi in certezza per altri fatti, che verremo esponendo.

L'andamento delle formazioni nell'alto bacino betico in provincia di Jaen mostra in modo evidentissimo la convergenza di due direzioni di corrugamento: della serie arcaica e delle rocce paleozoiche nella sierra Morena, da nord a sud-est; della serie mesozoica ed eocenica da sud-ovest-ovest a nord-est-est. Senonchè i terreni meno profondi ma ancora assai antichi, cioè i paleozoici ed i triasici, presso alla convergenza delle due direzioni assumono una direzione intermedia, e più ad oriente pur essi si volgono a nord-ovest nelle provincie di Albacete e di Ciudad Real, per convergere tra le due Castiglie nella catena di Guadarama. Per tal modo si manifesta un corrugamento a pieghe tortuose, pel quale avviene che dove la curvatura dell'asse stratigrafico è più brusca, i più profondi terreni sono più fortemente dislocati e sono con ripiegamenti a ginocchio addossati contro le curve della serie mesozoica prevalente lungo il versante meridionale della depressione betica. Avvenuta l'abrasione, che esportò quasi totalmente i terreni mesozoici dalla sierra Morena, ne venne quell'apparenza di una frattura, che i geologi francesi e spagnuoli sono d'accordo nel riconoscere come prima ed antichissima cagione dell'avvallamento betico e persino come un limite approssimativo dei mari paleozoici e mesozoici. Siccome la mancanza dei terreni mesozoici nella sierra Morena non è assoluta, e dobbiamo fare larga parte alla abrasione, la quale, è noto come dalla massima estensione delle Alpi centrali abbia esportati tutti i terreni, compresi amplissimi lembi di eocene, così non possiamo concedere nè una così alta antichità nè il carattere di una semplice frattura per salto all'incontro delle due accennate direzioni lungo le falde della sierra Morena; scorgendovi piuttosto lo strozzamento di una strettissima sinclinale, di cui la gamba settentrionale sia stata arrovesciata e pigiata per sbieco sopra la gamba meridionale, più depressa, in cui si conservano i terreni più recenti. Siccome questo accidente tectonico erasi già manifestato in epoca miocenica, ammettiamo che la catena settentrionale possa essere stata limite al golfo miocenico; forse anche alla lontana ad un golfo eocenico. Ma già a questo punto la ricostituzione della orografia si fa incerta e crediamo che si possano commettere i più gravi errori volendo risalire ad epoche più remote.

Fissando poi con qualche maggior dettaglio l'andamento della serie mesozoica nella porzione orientale della provincia di Jaen [1] si vede che a sud dell'asse della

[1] Lucas Mallada, *Reconoscimiento geológico de la provincia di Jaén.* Boll. Com. d. Mapa. XI. 1. 1884.

supposta frattura i terreni secondarî formano una ruga arcuata, lungo il confine colla provincia di Granata, accennando così ad un graduato passaggio dall'una all'altra delle accennate direzioni. Secondo l'asse di questa piega arcuata, dove fu più profonda l'abrasione, affiora una striscia del pari arcuata di terreni triasici, limitati da aspre catene di monti calcari; ed è appunto in corrispondenza a questa abrasa anteclinale che si raccolgono presso a Gazorla le prime origini del Guadalquivir. Epperò, se vi fu frattura, questa non può essere che una accidentalità di una assai stretta sinclinale, arrovesciata a sud, di cui la gamba o dirò meglio il fascio di curve meridionale si è allineato a nord-est, e si è mantenuto più depresso che il fascio di curve settentrionale, più elevato e più profondamente denudato. Per esprimerci con un confronto, ci pare di scorgere una piega simile a quella della valle retica, a cui corrisponde il lago di Garda, più pigiata e con uno scorrimento obliquo delle formazioni su uno dei lati della piega; la nostra idea si può scorgere rappresentata anche dallo schizzo annesso alla carta geologica (Tav. I$^a$). A favore di questa interpretazione dell'importante accidentalità, che determinò il bacino betico, addurremo anche il fatto che in provincia di Jaen i terreni paleozoici più distintamente che gli azoici accennano colla loro direzione a levante di serbare traccia dell'andamento originario dell'ansa, che noi supponiamo compressa e lungo il suo asse probabilmente infranta, secondo un piano o varî piani diretti a levante ma obliqui rispetto alla verticale ed inclinati a nord. Una condizione analoga si osserva nella Valsugana e nella Valle del Ferro sulle Alpi orientali ([1]).

Si potrebbe scorgere in questo incontro di due direzioni quasi normali sulle due sponde della valle betica anche il soprapporsi di due successivi corrugamenti; il primo avvenuto dopo il paleozoico od in epoca carbonifera, il secondo dopo l'eocene; nè vogliamo del tutto escludere anche questa complicazione, la quale è riconoscibile anche nella catena alpina. Ma nei suoi dettagli il fenomeno è certamente molto complesso; perchè, a cagion d'esempio, il trias nella valle del R. Biar, in provincia di Siviglia, si interna nella massa della sierra Morena con direzione da sud a nord ed i lembi carboniferi, di cui vedremo in appresso, vi accennano ad una orientazione orografica per quell'epoca con rilievi da levante a ponente. Però il corrugamento più efficace nel determinare l'orografia di questa, come delle altre regioni del globo, fu senza dubbio

([1]) Tra gli scritti, che meglio contribuirono a svolgere l'idea dei corrugamenti orogenetici secondo linee curve, contro all'ipotesi del sopraporsi nella stessa catena di sollevamenti diversi, a cui si volevano riferire le varie direzioni dei terreni, vanno certamente annoverate due Memorie dell'illustre signor senatore Giuseppe Scarabelli (*Sulla probabilità che il sollevamento delle Alpi siasi effettuato sopra una linea curva.* Firenze 1866. — *Sulle cause dinamiche delle dislocazioni degli strati negli Apennini.* Atti Soc. it. di sc. nat. Vol. VIII. Milano 1866). Anzi ci pare che in questi scritti meglio che in altri, anche più recenti, si tenti di spiegare le secondarie contorsioni e l'andamento a spezzate delle singole sezioni e dei contrafforti della catena, e si gettino le basi di uno studio orogenico della valle padana, considerandosi, come da pochi venne fatto, simultaneamente i due versanti di essa. La nostra interpretazione della stratigrafia andalusa si accosta alle idee dell'illustre geologo; noi però ammettiamo possibile una plasticità molto maggiore in queste anse di corrugamento, in grazia di una minutissima rottura delle formazioni, che ne erano affette; e crediamo altresì che molti particolari orografici ed idrografici, piuttosto che ad accidentalità del sollevamento, debbansi alla straordinaria efficacia della abrasione. Ad esempio, nella grande ansa retica noi vedremmo una prova di tale plasticità; nella profonda voragine del Garda, un effetto di questa abrasione.

quello iniziatosi allo scorcio dell'eocene, che obliterò in gran parte gli effetti dei corrugamenti precedenti, se pure ne avvennero con così profondo raggrinzimento. Questo corrugarsi delle formazioni stratificate dopo l'eocene fu abbastanza sollecito, quivi come altrove; stantechè il miocene marino già rappresenta un golfo modellato dalla qui accennata piega e vastissime aree della penisola iberica furono occupate da laghi negli ultimi due periodi terziarî. Lo ammettere poi nella penisola iberica, così larga, queste curvature per pieghe svolgentisi sopra zone contorte; l'immaginare che esse siansi pigiate, infrante, scheggiate; e l'idea che i varî frammenti abbiano scorso obliquamente l'uno sull'altro, nel volgere dei tempi posteocenici, ci sembrano modi di vedere che corrispondono così alla complicata tectonica andalusa, come al carattere di ampiezza della penisola iberica, in confronto colla penisola italiana; nella quale, questo contorcimento e questo arricciamento di pieghe avvennero a preferenza nella zona settentrionale.

Coll'ammettere poi che parallelamente alla valle del Guadalquivir siasi stabilito un fascio di fratture, noi entreremmo nelle idee del signor Mac-Pherson, che avrebbe rilevato appunto tali fratture nella sierra Morena, parallelamente all'andamento geografico della catena, il quale non corrisponde alla direzione delle rocce scistose e cristalline colà prevalenti. All'egregio autore inoltre appartiene pure il concetto di interpretare come una serie di uniclinali arrovesciate a sud la tectonica delle formazioni azoiche e paleozoiche della Spagna, che noi accogliamo con molta maggiore persuasione che non l'altra sua idea di una frattura betica, iniziatasi prima dell'epoca carbonifera (1).

Alla mancanza di una varia suscettività agraria di quelle uniformi montagne della sierra Morena in provincia di Jaén suppliscono sino ad un certo punto la ricchezza e la abbondanza dei giacimenti minerarî, tra i quali sono celebri quelli di Linares, di S. Heléna e della Carolina. Una zona granitica, che poi si continua e si espande in provincia di Cordova, si attenua appuntita a Bailen, presso a Linares, poi riappare con altro affioramento a nord di S. Heléna, alternandosi il granito con degli scisti micacei. Questo è porfiroide, roseo o grigio, con filoni di oligisto, di quarzo grasso e di felsite; in contatto cogli scisti e coi dicchi, esso è assai decomposto. Il signor Mallada considera in rapporto col granito anche un porfido quarzifero, che emerge dal trias a sud-ovest di Arquillos ed a ponente di Siles, alle prime origini del Guadalquivir. La zona granitica è poi accompagnata ai due lati da scisti grigio-verdicci, di varia compattezza, al contatto col granito chiastolitici e ricchi di ossido di ferro; oppure attraverso a gradazioni di grovacche, passanti a conglomerati porfirici ed a puddinga rossa quarzosa; queste rocce sono riferite al cambriano. Il siluriano, con rocce analoghe e con scisti più quarzitici e più tenaci, ha presentato i fossili caratteristici a Peña Blanca ed a Ventas de Cardenas; accidentalmente comprende calcari saccaroidi e dolomie gessifere, ma il sullodato geologo è incerto sull'epoca di queste ultime.

Nella provincia di Cordova (2) il granito, coi medesimi caratteri ed accompagnato

(1) Mac-Pherson, *Estudio geológico y petrografico de la provincia de Sevilla.* Bol. Com. d. Mapa. Madrid VI. 1. 1879.

(2) L. Mallada, *Reconoscimento geológico de la provincia de Cordoba.* Bol. Com. d. Mapa. VIII. 1. 1880.

dagli stessi scisti cambriani, passa dal R. Zujar al R. las Yeguas per Hnojosa del Duque, Pozo-blanco e Vilanueva e lo attraversano dei frequenti dicchi di porfido quarzoso, che poi forma delle forti masse alla Coronada ed a Vilaviciosa, allineate nello stesso senso che il granito e le rocce cambriane. Ove mancano granito e porfidi, queste rocce si appoggiano con discordanza sopra dei micascisti e dei gneiss. Il siluriano, ancora più fossilifero che in provincia di Jaen, si presenta al colle del Castano, a nord di Belmez ed a S. Eufemia, e vi si aggiungono dei lembi assai ricchi di scisti e di calcari devoniani, del pari assai fossiliferi ed impregnati di vene, di druse e di arnioni di fosfato di calce. Il terreno paleozoico più importante in provincia di Cordova è poi il carbonifero, col ricco bacino di Belmez-Espiel, nell'alta valle del R. Guadiato; con calcari assai fossiliferi alla base, e nella porzione produttiva con argilloscisti ricchi di bella flora, con puddinghe ed arenarie e vario numero di banchi di litantrace, potenti sino a m. 1,25, attivamente coltivati. La formazione carbonifera è allineata colle altre formazioni più antiche, ad onta della discordanza di loro soprapposizione a queste.

Pel tratto occidentale della sierra Morena, in provincia di Siviglia, uno studio assai dettagliato del signor Mac-Pherson (1) ha fornito tale abbondanza di notizie da parerci conveniente di farne qui cenno, anche perchè si tratta di nozioni e di concetti, che ponno trovare applicazione e confronto nello studio ora appena iniziato delle formazioni cristalline della Sardegna e dell'arcipelago toscano.

Un vastissimo paese ondulato lentamente raggiunge lo spartiacque dalla Guadiana, meno elevato dei dossi che formano quel versante settentrionale della valle betica; come è il caso di molte catene, costituite di formazioni più recenti di quelle della sierra Morena. L'ossatura ne è granitica e l'autore, ritenendo questa roccia eruttiva, deve poi ammetterne l'eruzione in epoca arcaica, pel fatto che ciottoli granitici fanno parte dei conglomerati cambriani e siluriani. Scisti, conglomerati e grovacche rappresentano il cambriano superiore, più sviluppati verso levante e più elevati dei monti granitici perchè meno erodibili. Le rocce granitiche prevalgono nella parte centrale, attraversate da porfidi; e in corrispondenza alle valle del torrente Biar un lembo triasico si innesta, a parere dell'autore, in una dislocatura che fu poi allargata dall' erosione in tempi pretriasici; fatto sta che la direzione di questo lembo triasico diverge sensibilmente da quella delle rocce più profonde e che inclina verso il Guadalquivir in vicinanza alle falde, accennando così alla posizione, che dovrebbero presentare quivi le rocce mesozoiche se non fossero state così profondamente abrase. Una più antica discordanza si avverte altresì tra le rocce cambriane e gli scisti a *Posidonomya Becheri* del carbonifero medio, che poi si sviluppano maggiormente in provincia di Huelva ed in Portogallo. Verso ponente tornano a svilupparsi gli scisti cristallini, con sieniti e con diabasi, in continuazione di quell' ampia zona di rocce cristalline massicce, che dalla provincia di Siviglia per una serie di allineati affioramenti prosegue sino alla valle del Tago. Frapposte tra le filladi ed i graniti, queste diabasi, insieme ad una lente sienitica e con altra di granito a ponente dall'accennato lembo triasico del Biar,

(1) Mac-Pherson, *Etudio geológico y petrografico de la provincia de Sevilla.* Bol. Com. d. Mapa. VI. 1. 1879

si direbbero far parte della stessa massa delle sieniti, che quivi rimpiazzano il granito, se il loro contatto con queste non fosse assai netto e senza gradazioni.

Le rocce arcaiche stratificate della provincia di Siviglia sono distinte in due sistemi: il più profondo con scisti micacei, talcosi ed amfibolici e grossi banchi di calcare saccaroide; il superiore con scisti lustri simili a quelli della sierra Nevada. Una zona di scisti gneissici si interpone tra i micascisti ed il granito; quello contenendo due miche e frequenti aghi di rutilo. I calcari azzurrognoli, rosei o verdicci sono infiltrati di serpentino e contengono grani di peridoto, in parte serpentinizzato, cristalli di pleonasto, di attinoto, di amfibolo e fibre di asbesto. Da questa descrizione sembra di scorgere la serie delle rocce cristalline dei dintorni di Varallo, in Val Sesia.

Il cambriano discorda dalle rocce precedenti, ma ad esse rassomiglia colle sue rocce scistose; nei calcari offerse un *Archeocyathus marianicus*, determinato dal Roemer; e si ritiene che in parte esso corrisponda alla zona a graptoliti della provincia di Huelva. I ciottoli dei conglomerati alla base del cambriano sono stipati, compressi e distorti. Agli scisti cambriani e siluriani si alternano delle arcosi, formate da tritume di cristalli feldispatici e cloritici, con apatite e pirosseno e delle diabasi; queste però si osservano in dicchi attraverso agli scisti ed in colate, alternate con questi; sono quindi attribuite ad un fenomeno eruttivo, contemporaneo alla sedimentazione di quegli antichissimi terreni. Banchi di saccaroide meno potenti che nella serie azoica si associano ad enormi amigdale di ferro magnetico e di siderose manganesifero. Del carbonifero si descrivono tre lembi, dei quali uno coltivato a Vilanueva del Rio; e sono giudicati dall'autore sino dalla loro origine spettanti a distinti bacini. Tutti riposano con discordanza sulle rocce più antiche ed offersero belle impronte di filliti e di tronchi. Mancando il calcare inferiore, che si presenta più a levante, l'autore ammette che all'aurora del carbonifero quest' area fosse di già emersa.

Toltone il lembo triasico del Biar, con arenarie e conglomerati alla base e con marne, calcari e dolomie cariate più in alto, mancano totalmente i terreni mesozoici in questo tratto della sierra Morena; così l'eocene. Il miocene si compone di marne azzurre, di molasse e calcari grossolani a clipeastri, colle argille sempre più potenti quanto più lontane dalla falda marianica, che dal trias in poi, secondo l'autore, e sicuramente dopo l'eocene segnò ad un dipresso il limite del mare. Prescindendo anche dalla ipotesi della efficacia di una supposta eruzione granitica sull'allineamento nord-ovest delle curve nelle formazioni azoiche della sierra Morena, e dalle altre idee sulla mutua azione che le rocce cristalline ponno avere esercitato, troviamo di molto interesse i particolori litologici, che su questa formazione espone il dotto autore; tanto che ci permettiamo di esporne in nota un breve sunto. Tornando sul fatto della disposizione tectonica, che più da vicino interessa l'argomento di questo scritto, anche se il lettore troverà di anteporre il nostro modo di vedere quanto all'origine della divergenza nella direzione delle formazioni sulle due sponde della valle betica, non mancherà di ammettere col signor Mac-Pherson che, secondo l'asse di questa valle, evvi un profondo disturbo stratigrafico, il quale non può essere stato senza effetto nella trasmissione dei moti sismici da sud a nord, cioè in senso normale alla valle medesima (1).

(1) Il sig. Mac-Pherson distingue le rocce massicce della sierra Morena in *acide* (graniti, sieniti, protogino, porfidi felsitici e quarzosi) e *basiche* (diabasi e dioriti); delle prime antichissimi i graniti,

Sul versante meridionale della valle del Guadalquivir un'ampia zona di terreni mesozoici, con scarsi lembi di nummulitico, con aspre sierre calcari e con limitati bacini miocenici, decorre sino alla provincia di Cadice; e tra le particolarità stratigrafiche ricorderemo solamente che i fossili del trias medio si trovano con qualche abbondanza nella provincia di Cordova, e che tra i piani fossiliferi giuresi quelli ad *Harpoceras bifrons* e *Terebratula erbaensis*, ricoperti da calcari a *Ludwigia Murchisonae*, furono recentemente constatati dai geologi francesi, signori Bertrand e Kilian, nelle sierre Elvira e de las Hojas, presso Granata (1); che i piani a *Terebratula diphya* ed *Ammonites transitorius* alle sierre de Luque, Zucheros, Cabra, Cercabuy in provincia di Cordova, di Segura, Cazorla, Valdepeñas e Castillo de Lucubrin, in provincia di Jaen, hanno fornito al sig. Mallada abbondante materiale per pregevoli

abbondantemente attraversati dai porfidi, i quali talora formano così fitto intreccio di dicchi da obliterare la roccia incassante; questa poi si fa più quarzosa in contatto al porfido, o più talcosa passando al protogino. Normalmente il granito è bianco, con due feldispati e mica biotite; l'ortose è talora roseo e di grosse dimensioni, presentando al microscopio lamine insinuate di plagioclasio. L'apatite è abbondantissima, in cristalli fino ad $^1/_{10}$ di millimetro; le inclusioni liquide nel quarzo sono abbondanti, talune rappresentando dei cristalli negativi del minerale che le comprende e sempre abbondano in esse i cubetti di cloruro sodico. Le sieniti ed i graniti amfibolici sono dall'autore ritenuti come effetto di una trasformazione della mica in amfibolo e contengono in abbondanza fibre di rutilo, apatite, magnetite ed iserina. Alcune libelle in inclusioni liquide nel quarzo di queste sieniti si muovono assai lentamente; il che viene attribuito a viscosità del liquido per abbondanza di cloruro di magnesio, mentre il cloruro sodico è precipitato in cubetti. Queste sieniti contengono anche sfeno e per abbondanza di ossidi di ferro raggiungono la densità di 3,05. I porfidi quarziferi sono dall'autore spiegati come un prodotto dell'arricchimento in silice del granito e di una graduale risoluzione del feldispato in una pasta omogenea; epperò i dicchi di questi porfidi sarebbero di secrezione. Le inclusioni liquide del porfido sono quasi sempre scevre di cloruro sodico. Questi porfidi poi offrono numerose gradazioni dal granito porfirico alla felsite, oppure alle pegmatiti, in alcune di queste avvertendosi l'epidoto, che si ritiene altro prodotto di alterazione del granito originario. Al contatto colle rocce basiche di Castillana, sulla destra del Biar, si osservano delle pistacciti di rara bellezza. Verso la provincia di Huelva i porfidi si fanno invece amfibolici, cloritici, augitici; altri hanno struttura sferulitica. Alcune amfiboliti a grossi cristalli di oligoclasio, con augite, sarebbero considerate come l'estremo di variazione dei porfidi e sono accompagnate da filoni di oligisto.

Le rocce basiche sono a preferenza afanitiche, con augite e diallagio, passando ad eufotidi; di densità fino a 2,85; spesso alterate, con passaggio dal pirosseno alla clorite od al serpentino, con epidoto e con feldispato intorbidato. Numerose varietà ferrifere, assai dense e tenaci, formano dicchi ed interstrati nelle rocce cambriane; nè manca il serpentino in ampio dicco, attraverso al porfido del Castillo de las Guardias, con bastite, di densità 2,82; e l'autore lo riconobbe identico a quello della Serrania di Ronda, applicandovi la nota ipotesi dell'alterazione di una roccia peridotica.

Le rocce acide, a giudizio dell'autore, avrebbero fatta eruzione prima del cambriano, spostando i sedimenti azoici; le basiche a più riprese sino al carbonifero, modificando le rocce acide, le quali o per l'aggiunta di silice si sarebbero cangiate nella serie di varietà, che ha per estremo i porfidi afanitici; oppure, per diminuzione progressiva della silice, avrebbero invece fatto passaggio alle sieniti ed alle dioriti. Come poi le rocce basiche abbiano potuto indurre questa duplice e contraria modificazione sulle rocce acide, è tra le cose che rimangono inspiegate in questa serie di ipotesi ingegnose, che per altro sono in armonia colle idee ora prevalenti tra i litologi. Ben lontani dal voler aprire una discussione inopportuna, osserviamo che se vi è regione da paragonarsi alle adiacenze d'Ivrea e di Biella per la varietà delle rocce granitiche, sienitiche e porfiriche, questa è certamente il tratto occidentale della sierra Morena.

(1) Comptes rendus de l'Ac. d. sc. 18 janv. 1886.

monografie. La creta, oltre alle più diffuse forme neocomiane, offre delle rudiste, delle nerinee e degli echini, e nei suoi piani superiori è spesso calcarea e dolomitica, come nella nostra penisola dal Pescara al Crati e nell'Istria; pur presentando in talune plaghe la natura arenacea e copiose ostree, come nella Sicilia orientale, nella Calabria e nell'Algeria. Dell'eocene in provincia di Jaen compaiono gli strati inferiori, pressochè con sole nummuliti; in provincia di Cordova si aggiungono a questi, più in alto, dei calcari e delle marne a *Serpula spirulaea,* con bella fauna di echini. Il miocene, assai sviluppato, si compone alla base di marne scure, alternate con calcari giallicci ed in alto di molasse e di sabbia della complessiva potenza di 250$^{m}$, che però rapidamente diminuisce presso gli affioramenti delle rocce più antiche e più anticamente emerse; tra i fossili numerosi distinguonsi la *Pholadomia alpina* ed i *Clypeaster altus, taurìcus* e *Partschi* dell'elveziano. A quanto afferma il sig. Mallada, manca il miocene lacustre, che invece è molto sviluppato nell'ampio bacino di Granata, dove, alle falde settentrionali ed occidentali della sierra Nevada si raccoglie il R. Genil, che noveràmmo tra i principali confluenti di sinistra del Guadalquivir.

Sulla valle del Genil, le ultime e più recenti notizie si devono ai signori geologi della Commissione francese, che esplorarono a lungo quella regione (1), già nota per le Memorie dei signori Drasche e Tarin. Il trias nelle adiacenze di Loja presenta numerosi affioramenti di rocce diabasiche, le quali però non mancano tra le rocce giuresi e perfino tra le eoceniche nella prossima valle del R. Grande. Marne screziate e banchi di gesso con fonti saline rappresentano la costituzione normale del trias; mentre i terreni giuresi, cretacei ed eocenici mantengono i caratteri, che già abbiamo veduto, e con essi proseguono più a levante fino alla spiaggia mediterranea. Secondo Silverstop e Tarin, a sud di Loja affiora l'eocene, con fossili del piano di Biarritz; ma su questo versante prevalgono piuttosto i terreni miocenici. Nelle parti più depresse sono molto sviluppate delle marne lacustri gessifere, che i signori Bertrand e Kilian riferiscono al messiniano medio; più in alto si riscontrano il tortoniano e l'elveziano, perchè l'emersione dell'ampia conca del Genil fu progressiva, come assai bene lo dimostra anche la conformazione orografica, con un duplice sistema di grandiose terrazze, le più elevate e più profondamente incise costituite dai terreni miocenici più antichi. La formazione gessifera del messiniano probabilmente è coeva coi calcari d'acqua dolce ad ossami di *Ipparion* nella provincia di Terruel, nella Spagna orientale; le marne contengono *Melanopsis impressa, Lymnea Forbesi, Hydrobia etrusca, Planorbis solidus.* Questa formazione avrebbe chiuso la serie dei depositi terziarî nella conca di Granata; mancando i rappresentanti del pliocene marino, che si presenta lungo la spiaggia di Malaga ed allo sbocco della valle betica coi medesimi caratteri che nella valle del Rodano, nella Liguria e nella valle Padana. I terreni miocenici marini del vallone di Granata, che dai signori Bertrand e Kilian sono riferiti all'elveziano, consistono di molasse scure gessifere, passanti a conglomerati con *Ostrea gingensis, O. digitalina, O. Velaini;* e più in alto di molasse e calcari a litotamni, con *Pecten scabriusculus, Terebratula sinuosa* e briozoi. Sono le rocce che noi osservammo sotto Alhama, tagliate per oltre ottanta metri dal torrente omonimo, ed appoggiate sopra

(1) Comptes rendus de l'Ac. d. sc. 20 juin, 1885.

l'affioramento di calcari giuresi, che sta a sud della fonte termale. Vi distinguemmo anche una glauconia a litotamni ed a balani, con spondili a radioli di cidariti. Ad Antequera, Pradon, Escuzar, Beznar, Montefrio e Turron di Taléra si raccolgono fossili in buon numero ma non bene conservati e le nostre raccolte ad Alhama non furono abbondanti, essendo quivi bensì la roccia un impasto di avanzi organici, ma occorrendo tempo e minuziose ricerche per potersene trarre degli esemplari determinabili. Il tortoniano di Dudar ed Albuñuelas, nelle sue molasse interposte ai conglomerati, offre qualche maggiore opportunità di raccolta; in alcuni strati di molassa azzurrognola incisi da una valletta a nord-est del paese di Albuñuelas abbiamo raccolto, oltre al *Cardium hians* citato dai geologi francesi, numerosi esemplari di *Turritella Archimedis, Arca diluvii, Pecten Reussi, P. substriatus, Ostrea digitalina, O. coclear, Isocardia subtransversa* e si citano anche di quei dintorni il *Pecten cristatus, Nucula nucleus, Dentalium inaequale, D. Bouei, Chenopus pes-graculi, Ancillaria obsoleta, Terebra fuscata.* Le ostree abbondano nei piani superiori, anche nei lembi di conglomerato appiccicati sulle rocce scistose e calcari del paleozoico al passo del Gitano. per Otivar, a 1250$^{m}$. Per quanto stretti sieno i legami tra il pliocene ed il tortoniano, stante la differenza litologica e altimetrica di questi lembi colle argille azzurre piacentine di Malaga, non crediamo di mantenere l'idea, che abbiamo esposto nella relazione preliminare, e concordiamo coi geologi francesi nel riferire al tortoniano anche quei depositi litoranei; tutto infatti porta a credere che l'emersione della conca di Granata sia accaduta prima del pliocene. Del pari accettiamo l'opinione dei sullodati geologi che il conglomerato dell'Alhambra, ritenuto quaternario dai signori Drasche, Tarin e Botella, sia piuttosto tortoniano ed equivalga alle masse di roccia analoga ma ad elementi calcari, che si accompagnano a ponente sin presso a Loja e che presso la stazione di Illora comprendono un banco di madrepore. Presso Jaena, sotto al gesso messiniano, furono osservati dei letti arenacei a *Cerithium mitrale* e *C. vulgatum,* riposanti con discordanza sulle filladi; accennando così al prepararsi con una delta, che si estendeva nel golfo miocenico, quella orografia maremmana, che precedette la definitiva emersione della valle granadina.

Non sarà inutile osservare che qualche cosa di consimile avveniva nell'area prealpina, a mattina del bacino abduano, e nelle ampie depressioni del Danubio e della Sava; ed anche in quelle regioni apenniniche, nelle quali si può nettamente distinguere un orizzonte tortoniano, si hanno spesso dei conglomerati e delle molasse nettamente distinte dagli apparati litoranei del pliocene inferiore. Per conseguenza, la sommersione pliocenica nell'area mediterranea è stata meno estesa di quanto sembrava risultare da associazioni stratigrafiche, appoggiate sulla unità di una formazione subapennina. Rimane poi l' importante differenza tra alcune regioni, le quali, come l'Andalusia, dal pliocene in poi furono elevate assai più di quanto ora compaja, per essersi dopo sommerse; ed altre, come la Toscana, l'Umbria, il versante adriatico e pressochè tutta la regione meridionale d'Italia, ove l'altitudine delle spiagge plioceniche si è mantenuta, almeno a tratti, assai rilevante, sorpassando talora i mille metri.

Il fiume Genil sbocca nel Guadalquivir a Palma del Rio, tra Cordova e Siviglia; a valle della sua confluenza, il versante sinistro della valle betica presenta la prevalenza dei terreni terziarî, dei quali l'eocene spesso si adagia con discordanza sul trias.

Un'altro pregevolissimo lavoro del sig. Mac-Pherson (1) somministra in proposito importanti notizie e noi ne estrarremo quanto basti a completare alla meglio questa rapida descrizione dell'Andalusia. Il suolo rapidamente vi si deprime dalla sierra del Pinar (1740$^{m}$) ad un ondulato terrazzo a circa 700$^{m}$; sul quale però più a sud-ovest si inalza la sierra de la Gitana a 1124$^{m}$, tra le due valli del Guadaranque, che mette nel Mediterraneo a ponente di Gibilterra, ed il R. Barbato, che dopo aver ristagnato nella laguna di Janda, si avvia all'Atlantico presso al capo Trafalgar. Detto terrazzo degrada poi in un terreno collinesco, con rocce mioceniche ed eoceniche, da cui sporge però la rupe liasica di Gibilterra (2), dove furono raccolte tra altre specie la *Spiriferina tumida* e la *Terebratula tetraedra*. La Sierra del Pinar consta di calcari liassici, che ricoprono degli argilloscisti calcari, oscuri, forse infraliasici e verso l'alto passano a strati più marnosi ad *Harpoceras bifrons*. Nella Sierra di Endrimal (1432$^{m}$), a sud-est del Pinar, sopra il lias avanza un lembo di scisti ad aptici e di marmi mandorlati, ed al Borruco abbondano fossili del piano di Stramberg con altri del piano a *Terebratula janitor* nei banchi appena soprastanti. Delle marne con ammoniti piritizzati del neocomiano trovansi poi presso a Conil, dove evvi un rinomato giacimento di solfo, con cristalli non meno belli dei nostri di Sicilia e di Romagna. Il giura inferiore e la creta media e superiore sembra che facciano difetto. L'eocene è composto alla base d'un calcare nummulitico, più sopra da sabbie incoerenti, da arenarie e da calcari grossolani, e presso Medina-Sidonia da argille scagliose gessifere. Secondo il sig. Botella, l'eocene, dopo aver contornato la spiaggia attorno alla rupe di Gibilterra dal capo di Tarifa fin quasi ad Estepona, affiora in ampia striscia da nord-ovest a sud-est sotto due vasti lembi laterali di miocene, che

(1) Mac-Pherson, *Bosquejo geológico de la provincia de Cádix*. Cadice, 1872.

(2) Il signor Hochstetter (*Reise der Fregate Novara*, II B. 1867) fornisce una buona descrizione della penisola di Gibilterra, che crediamo opportuno di compendiare.

La penisola si inoltra per due miglia e mezzo dal mare, innalzandosi in media a 1300 p. ingl. ed è collegata al continente soltanto per una assai bassa linea di sabbia. Di natura calcare, ha pareti dirute e sul lato orientale a precipizio, con grotte e con poca vegetazione; degrada meno aspramente verso Gibilterra, che sta ad ovest, secondo l'inclinazione prevalente degli strati. Questi però sono assai poco evidenti nella massa più profonda, mentre in alto per interstrati argillosi si fanno più appariscenti, ma anche si contorcono e presso la vetta del dosso O'Haras si rizzano quasi verticali. Il calcare è compatto, cristallino, a frattura ceroide, con larghe vene e con geodi di nitidi cristalli di calcite. I fossili sono assai rari e male conservati; consistono in crinoidi, terebratule, rinconelle, spiriferine, avicule e varie forme turriculate di carattere giurese; Vernenil credette scorgervi lo *Spirifer tumidus* e la *Rhynchonella tetraedra*. Secondo il geologo austriaco, la rupe di Gibilterra rappresenta il resto di una formazione calcare, che faceva parte di una catena tra l'Affrica e l'Europa prima della formazione del Mediterraneo in epoca terziaria; il monte Simia (*Abyla* degli antichi) ne rappresenta la continuazione sulla sponda Marocchina, e sul continente vedremo come questo stesso terreno riappaja nella Serranìa di Ronda. L'inclinazione della roccia sembra all'autore doversi non già ad un sollevamento ma a sommersione, che fu seguita da un periodo di lenta emersione, attestata tuttora da terrazzi, assai distinti sino a 650 piedi e da banchi quaternari con livelli di foladi sino circa a 150 piedi. Si ritiene di origine marina anche un deposito di sabbia rossa, quarzosa, che si allinea presso a poco sopra la spiaggia e riappare ad Algesiras. Le grotte sono a più livelli; la più bassa presso il palazzo del Governatore a 60 piedi. Sulle rupi di Gibilterra abitano gli unici rappresentanti viventi dell'ordine dei quadrumani in Europa (*Macacus innuus*).

costituiscono appunto l'accennato terrazzo, più elevato della regione collinesca. A S. Lucar de Barameda furono raccolti dei fossili del tortoniano, determinati dal Bajan. Il pliocene, con molasse e calcari grossolani abbondanti di pettini, viene descritto dettagliatamente per la penisola, all'estremo della quale si eleva Cadice e passa inferiormente ad una marna azzurra ritenuta miocenica. L'alluvione quaternaria trovasi profondamente incisa dagli attuali corsi d'acqua, e contiene dei ciottoli di quarzite, roccia che manca ai rispettivi bacini idrografici; tantochè il signor Mac-Pherson, anche perchè presso alla spiaggia atlantica sonvi dei colli più elevati che entro terra, ponendo mente all'esistenza dei fiordi cantabrici ed agli estuarî del Tago, della Guadiana e del Guadalquivir, non può negare un alto significato alle tradizioni della scomparsa Atlantide, e suppone uno o più scoscendimenti recenti. Il fare la storia di queste oscillazioni posterziarie della costa spagnuola non è cosa da pigliarsi alla leggera; essendovi delle indubitabili tracce di lidi marini quaternarî, sollevati o rimasti emersi, come osservò già il La Marmora presso a Cadice e presso Gibilterra (1) fino all'altezza di $10^{m}$. Ma che sia prevalso il movimento negativo, sembrami fuori di dubbio; poichè ai citati argomenti si aggiungono la conformazione del fondo del Mediterraneo, la orografia delle Baleari e la esistenza nell'isola Alboran di alluvioni trachitiche, le quali devono certamente provenire da qualche rilievo più o meno prossimo, che fu sommerso.

Premendoci di abbreviare questa sommaria descrizione della regione più meridionale dalle penisola iberica, non possiamo nemmeno dilungarci, come saremmo tentati a fare, sul terreno ofiolitico della provincia di Cadice, con salse numerose nelle stagioni piovose, con argille scagliose, con diabasi composte di oligoclasio, diallagio ed augite, in affioramenti innumerevoli, particolarmente presso Medina-Sidonia, Chielana, Borruco, Puerto Real, Alzar, Alcalà, Sierra d'Algibe, e con gessi solfiferi di straordinaria potenza; un tutto insieme che mirabilmente ricorda le condizioni dell'Apennino meridionale.

Siffatto terreno poi si continua nella provincia di Malaga, forse compare in quella di Almeria e riaffiora nell' isola di Iviza, delle Baleari, allineandosi colla direzione delle formazioni mesozoiche, che abbiamo indicato nello schizzo annesso alla tavola geologica. Forse la natura e l'origine di queste formazioni, qualora avendole esaminate personalmente potessimo con qualche argomento sostenere alcune considerazioni teoriche non del tutto consone alle idee del signor Mac-Pherson, ci porterebbero ad indagare come sia avvenuto il primo manifestarsi della attività endogena nell'area mediterranea. Ma saremmo bene audaci se con sì piccola scorta di osservazioni osassimo spingerci così a ritroso in un campo, che già si abbuia al limitare dell'epoca contemporanea. Epperò continueremo, ancora colla scorta di altri lavori dell' infaticabile geologo, la nostra rivista nella Serranìa di Ronda, quasi interamente compresa nella carta che presentiamo (Tav. I$^{a}$).

Il tratto che a prima vista maggiormente colpisce è la massa enorme di serpentino, che attraversa con direzione di nord-est questa regione tra il Guadiaro ed il Guadalhorce, colla lunghezza di 42 chilometri e colla larghezza di 20. Alla forma

(1) A. La Marmora, *Observations géologiques sur les îles Baléares*. Mem. Accad. d. sc. di Torino, t. XXXVIII, 1855.

lenticolare di questa massa si modella l'andamento tectonico di tutte le formazioni dal carbonifero all'eocene, questo compreso. La valle del torrente Guadiaro, che scende da nord nel Mediterraneo, separa una regione occidentale, dove si dispiegano gli accennati caratteri orografici della provincia di Cadice, da un paese a sinistra, che si estende fino all'ampio anfiteatro di Malaga e che presenta la stessa varietà di formazioni, che, a cagion d'esempio, si avverte nelle Alpi liguri. Il rilievo principale è costituito da calcari mesozoici, che si adagiano sopra scisti e sopra lenti di saccaroide, appoggiate al serpentino; e questo rilievo è duplice per una faglia intermedia, parallela alla catena, alla quale corrispondono le due valli del Turon, che mette nel Guadalhorce e del Genal, che mette nel Guadiaro, a pochi chilometri dalla spiaggia. La sierra de *Las Plazoletas* (1966$^{m}$) nella cresta meridionale, rappresenta il vertice della regione; e la faglia longitudinale è resa manifesta dalla jutaposizione del nummulitico agli scisti ed al calcare saccaroide di epoca pretriasica; l'eocene è sollevato fino a 1300$^{m}$. Questo calcare saccaroide nei primi scritti del signor Mac-Pherson, veniva considerato come una prova del metamorfismo dei terreni secondarî, ma l'autore stesso lo considerò in seguito come azoico; potrebbe essere anche paleozoico, se a grandi distanze hanno valore le analogie di serie almeno pei terreni non fossiliferi. Il serpentino, oltre al costituire la detta massa principale, che per secondarî affioramenti si avanza sino quasi al Guadalhorce, a levante di Caratraca, presenta poi una diramazione verso sud-est-est, con altro vasto affioramento, che termina appuntito presso la spiaggia alla Sierra di Mijas, estendendosi sopra Alhaurin e ricomparendo con piccola massa a nord di questa borgata. Accompagnano la serpentina o ne sono poco discosti dei vasti ammassi di ferro ossidato e minerali di nikel a Marbella, Puerto de Robledal e Istan; e si vorrebbero collegate colla roccia magnesiaca, supposta eruttiva, anche le fonti minerali di Cesares, Manila e Caratraca. A sud della grande massa serpentinosa, si osservano scisti gneissici, gneiss, granuliti e scisti micaceo-talcosi, talora granatiferi; presso Torrox sono indicati dei veri graniti, che insieme ai pochi gneiss, sarebbero gli scarsi rappresentanti di quella formazione scistosa-cristallina, che ricopre le rocce più profonde nella sierra Morena e nella Guadarama. Sonvi anche delle rocce amfiboliche e delle diabasi, che presso Benalmadena formano un lungo dicco, tra gli scisti (1). Alcuni scisti argillosi vennero distinti dai più antichi e mentre si appoggiano presso Alhaurin al serpentino, sopra Marbella accompagnano una lunga zona di arenarie e di conglomerati triasici, che segue la stessa direzione est-sud-est del ramo meridionale della massa serpentinosa. Notisi che in entrambi questi rami i calcari saccaroidi stanno a nord, cioè sopra al serpentino, le rocce gneissiche e granulitiche soltanto a sud, cioè sotto; di più, secondo la Commissione ufficiale dei geologi spagnuoli, gli scisti si veggono passare sotto al serpentino presso Carratraca. Epperò, senza voler precisare la posizione tectonica di questa massa, per il che sarebbe occorso un esame dettagliato e paziente, possiamo però escludere che si tratti di enorme iniezione di una massa eruttiva, biforcata verso oriente. Ci sembra invece che tale biforcazione corrisponda

(1) Mac-Pherson, *Memoria sobre la extructura de la Serrania de Ronda.* Cadiz, 1874. — *On the origin of the serpentin of the Ronda mountains.* Madrid, 1876. — *Relacion entre las formas orográficas y la constitucion geológica de la Serrania de Ronda.* Madrid, 1881.

piuttosto all'incontro di due pieghe, l'una diretta a nord-est, che lentamente arcuandosi si confonde col massimo rilievo della sierra Nevada e l'altra, che diretta a sud-est-est termina bruscamente al capo Cala-Buras, a sud-ovest di Malaga. Non crediamo poi che sia soltanto un'apparenza di stratificazione quel tal quale parallelismo, che presentano le ondulazioni per erosione sulla denudata massa serpentinosa; nè vorremmo escludere che sieno piuttosto affioramenti di interstrato che lembi residui quei limitati affioramenti di scisto e di calcare saccaroide, che si avvertono nel mezzo dell'area serpentinosa, in analogia a quanto fu constatato da uno di noi per la massa poco meno vasta di serpentino pretriasico della Liguria occidentale. Poco persuasi dell'origine eruttiva delle masse serpentinose in genere, nè parendoci una tale origine dimostrata per la massa in discorso, non accompagneremo il sig. Mac-Pherson nelle ipotesi, che egli avanza, di una prima permanenza della massa lavica sotto i depositi azoici; poi di una emersione di questa lava allo stato di un impasto cristallino, peridotico, idratatosi in seguito; della sua salita ad un'altitudine molto maggiore della attuale, seguìta da uno spostamento di tutta la serie di quella regione secondo un piano inclinato a sud, nel definitivo assetto tectonico della catena betica; nonchè di uno scoscendimento per susseguenti, assai recenti fratture. Però non facciamo meno conto delle interessantissime osservazioni, che l'autore espone sui rapporti tra la conformazione orografica di quella regione e la stratigrafica sua struttura, e della importante scoperta da lui fatta, che in varî punti di quella massa serpentinosa esista una roccia peridotica assai più tenace, più dura e di colorito più chiaro, la quale al microscopio si mostra composta di olivina con venature più o meno fitte di serpentino; questa roccia viene riferita alla *dunite*. Nelle porzioni di roccia, che si suppongono rimaste, non si sa come, nello stato originario, le granulazioni di olivina sono riunite da una pasta vitrea con picotite. Nella parte mediana delle masse maggiori di serpentino, nelle varietà che si suppongono meno alterate, spesseggiano i granuli di ferro magnetico e cromato; anzi l'autore attribuisce ad una estrema divisione di questi minerali il colore del serpentino e ne spiega la provenienza per ossidazione del ferro contenuto nell'olivina. Male si intende come il contatto tra l'olivina e il supposto prodotto di sua alterazione sia sempre assai netto; tantochè sarebbe per lo meno altrettanto logico il supporre che l'olivina si fosse ingenerata in un magma magnesiaco amorfo; se pure occorre proprio di dubitare che la roccia siasi formata così come la vediamo per fenomeni contemporanei od appena conseguenti al suo depositarsi. In alcune sezioni sottili, il peridoto è visibile ad occhio nudo; in altri campioni l'intreccio delle venature è così fitto e la massa peridotica è così ridotta che si ha la struttura normale a maglie del serpentino. Delle venature poi si distinguono due ordini; le più recenti di colorito più intenso e meno ricche in ferro magnetico. Il serpentino senza olivina offre alcune sferoidi schiacciate ed un colorito rubiginoso. Avendo l'autore in una più recente pubblicazione abbandonato l'idea che le dolomie saccaroidi soprastanti al serpentino rappresentino un metamorfismo, da questo esercitato sui calcari, non occorrerà che noi ci dilungiamo nel confutarla; rileviamo però l'importanza della scoperta dell'olivina nel saccaroide di Marbella, che l'autore deve poi spiegare come un effetto di ricomposizione del minerale, che imagina alterato per dare origine al serpentino. Per lo scopo del presente scritto, basterà che sia ammesso che non può esistere alcuna diretta relazione tra le manifestazioni dell'attuale

attività endogena e questa enorme massa serpentinosa; potendosi al più concedere che la sua presenza abbia causata qualcuna delle fratture, che decorrono ai lati della medesima. Quanto abbiamo detto a proposito delle rocce diabasiche del terreno gessifero della zona caditana vale maggiormente per questa così appariscente particolarità della Serranía di Ronda.

Procedendo verso oriente, ci troviano tra i monti di Malaga e nella valle del Guadalhorce, il quale prima di raccogliere le acque del lago salato di Fuente de Pedra percorre la valle trasversale di Antequera e dopo si getta in una stretta gola, seguìta dalla ferrovia, dove la serie e la posizione delle formazioni si presenta colla massima evidenza. Combinando la descrizione geologica di questa provincia del sig. Domingo Orueta (1) e quanto è segnato nella carta del sig. Botella con quelle osservazioni che noi stessi abbiamo potuto stabilire nel breve nostro soggiorno, diremo che la cresta mesozoica della Serranía di Ronda si continua colle sierre del Cañeto, di Orsezicar e di Carratraca fino al Guadalhorce; oltre la chiusa da questo fiume percorsa essa cresta presenta le vette calcari di Abdalagis (1100$^{m}$), del Torcal, di Cabras, Paucedo, Marchamonas, toccando l'altitudine di 1378$^{m}$ al Camorro Alto, nella sierra di Chimineas; più a levante, la cresta medesima si allarga in un vasto intreccio di dossi calcari, che contornando l'alto bacino del Guadalhorce si spinge ad attraversare presso Loja il corso del R. Genil. L'ondulata bassura dove stagna l'accennato lago, reso salato dalle acque, che dilavano il non discosto terreno ofiolitico, è interotta da mediocri sporgenze di calcari mesozoici, quali le sierre de Alhameda, de la Camorra e del Humilladero; ed appena a levante di essa, il Guadalhorce attraversa a nord di Antequera una estesissima pianura terrazzata, dove stagna l'altro piccolo lago di Herrera. Altro allargamento pianeggiante più a monte si stende avanti ad Archidona, separato dalla pianura di Antequera dalla sierra calcare de los Enamorados. La cresta mesozoica del Abdalagis e del Torcal è orlata a nord ed a sud da due zone laterali eoceniche, le quali si fondono alla sella di Puertollano, lasciando però sbucare dai calcari marnosi dei dirupi mesozoici, detti *las Oreijas de la Mula*. La bizzarria di forma di quei ruderi di calcari appartenenti, a quanto pare, al giura superiore è descritta coi più vivaci colori. Al Torcal di Antequera i signori Bertrand e Kilian raccolsero molte specie titoniane e poco sopra le più caratteristiche del neocomiano (2) e presso Salinas, a levante di Archidona, trovarono il lias medio con *Terebratula Aspasia* e *Spiriferina rostrata* e poco sotto un calcare oolitico e con quelle stesse nerinee, analoghe di forma alle specie del lias nell'Umbria e nella Sicilia, che noi osservammo nel calcare su cui posa il diruto castello di Velez-Malaga. Che esista la creta media e superiore non pare avvertito; ma taluni calcari rosati, in strati assai contorti, che noi osservammo presso Periana sotto le rocce eoceniche, rassomigliano talmente alla scaglia rossa del Veneto da farci ritenere che il passaggio dal secondario al cenozoico sia anche in quella regione meno improvviso di quanto concordano a ritenere i geologi spagnuoli. Pel caso nostro importa di osservare come sul versante meridionale dell'accennata cresta ripetute faglie portino l'eocene a justaporsi a lato del mesozoico, e persino

(1) D. D. Orueta, *Bosqueio fisico y geológico de la region septentrionale de la Provincia de Malaga*. Bol. Com. d. Mapa. t. IV. 1. 1877.

(2) Comptes rendus de l'Ac. d. France. 1886. I. Janvier.

a lato degli scisti paleozoici, come nella Serranìa di Ronda; questo accade lungo il tratto dalla valle del Guadalhorce sino a Colmeñar. Il trias, sotto forma di arenarie e conglomerati rossi e di calcari dolomitici compatti o cariati, affiora dall'eocene o tra questo e gli scisti, quasi indipendente dall'andamento dei più recenti terreni secondarî. Presso Malaga i conglomerati alle base assumono pel colorito grigiastro, per l'abbondanza di mica e per l'alternanza con argilloscisti micacei un aspetto assai analogo alle rocce permiane delle Alpi orientali.

Una frattura, o per lo meno un assai pigiato contorcimento, all'origine del R. di Guaro presso Alfernate, porta un lembo eocenico in mezzo alle rocce secondarie; e più a nord, oltre alla cresta calcare, si insinua tra queste il più vasto lembo di erodibili terreni di Vilanueva del Rio e di Vilanueva del Trabuco, in una conca ove si accolgono le prime origini del Guadalhorce, e d'onde sporgono ai lati del rio tre altri affioramenti di roccia mesozoica, al Sasso del Platero e presso al secondo dei detti villaggi.

Della struttura delle montagne della parte superiore del R. di Velez, che furono centro al terremoto del 25 dicembre 1884, diremo più tardi; bastando ora l'accennare come in quelle sierre Tejeda, di Jatar ed Almijara, fino al Guadalfeo, si stendano dei calcari azoici, paleozoici e forse anche triasici, fortemente arricciati sopra una massa di scisti micacei, amfibolici ed epidotici. I geologi spagnoli parlano di fucoidi cambriani, quivi riscontrati; ma non sono tali fossili da potersi definire sicuramente per essi una formazione. Per la sierra Tejeda le rocce amfiboliche ed i micascisti gnessici sono esclusivi al versante sud-ovest, dove abbian segnato l'affioramento delle rocce azoiche medesime, che spuntano nella depressione di Malaga e nella Serranía di Ronda sotto agli scisti paleozoici e la serpentina; potendosi questa approssimativamente ritenere parallela alle rocce amfiboliche.

Proseguendo in provincia di Granata, accenneremo brevemente alla struttura della sierra Nevada, alle falde occidentali della quale trovammo raccolte le acque del fiume Genil, mentre dal versante meridionale scendono per più rapidi pendii i confluenti del Guadalfeo, del Rio di Adra e del R. di Almerìa. Le fonti, dalle quali attingiamo le seguenti notizie, sono specialmente i due lavori dei signori Drasche e Tarin (1).

Già abbiamo detto che conviene distinguere il rilievo principale della Sierra Nevada, lungo il quale si allineano verso nord-est le vette principali, ed una catena litoranea, meno elevata ma distinta per un intermedio avvallamento, colle sierre di Lujar (1890$^{m}$) e Contraviesa, dette complessivamente *las Alpujarras*; l'avvallamento dovuto a rocce scistose, accoglie i paesi di Orgiva e di Ugijar e manda le acque a levante al R. Adra ed a ponente al Guadalfeo. Il rilievo principale della sierra Nevada presenta le seguenti vette, assai vicine e di altitudine non molto differente; da sud-ovest a nord-est, il Cerro del Caballo (3078$^{m}$), il Picacho de Veleta (3398$^{m}$), la Combre de Mulhacen (3481$^{m}$), l'Alcazaba (3314$^{m}$), ed il Cerro di Chullo (2611$^{m}$), dove la catena rapidamente si abbassa ai rilievi mesozoici, però ancora assai aspri e che toccano i duemila metri alla sierra di Gador. La massa principale di questa montagna risulta di

(1) R. Drasche, *Bosquejo geológico de la zona superior de Sierra Nevada*, Bol. Com. d. Mapa V, VI. 2. 1878. — I. Gonzalo y Tarin, *Reseña fisica y geológica de la provincia de Granada*. Ibidem, VIII, 1. 1881.

scisti argillo-micacei, spesso abbondanti di granati. Sebbene abbiano spesso apparenza cristalloide, il sig. Drasche esclude che esistano veri gneiss, quali invece sono indicati dai signori Tarin e Mac-Pherson. Sonvi talcocisti e calcari saccaroidi anche presso alla vetta, dove il sig. Botella ha osservato altresì delle rocce amfiboliche e sembra esista una stretta sinclinale. Nel barranco di S. Juan, a levante di Granata, evvi un noto giacimento di serpentino, d'onde si estrassero i materiali ornamentizî impiegati dai Mori in una coi saccaroidi della provincia di Almería per abbellire la rinomata Alhambra. Tre zone di serpentino sono anche indicate lungo il sentiero del Peñon de S. Francisco, sotto alla massa di saccaroide di cui questo monte è formato. A giudicare del profilo dal sig. Drasche, la tectonica di questa montagna è delle più semplici: una vôlta di argilloscisti, coi resti di un rivestimento per amigdale di calcare saccaroide; e tra le due formazioni, nel versante sud, una zona di filladi micacee più recenti, che affiorano in particolare nella accennata depressione di Orgiva e di Ugijar; le vette, dirute verso nord, sembrano frammenti di un rivestimento della serie più recente. Però sono indicate più varietà di calcari e certamente una così vasta formazione di prevalenza scistosa dovette essere foggiata a meno semplice motivo tectonico; ma per molto tempo non sarà facile di districarlo in una sterilissima regione, alla quale l'accesso è poco agevole e dove la dimora è triste quanto incomodo il viaggiare. Queste stesse rocce cristalloidi con direzione nord-est proseguono nelle sierre de Baza e de las Filabres, in provincia d'Almerìa. Tutto attorno alla falda occidentale della sierra Nevada si svolgono questi scisti filladici, con amigdale calcari, che il sig. Tarin riferisce al siluriano mentre il sig. Drasche lasciava indeterminati, però associandoli alle rocce della sierra di Gador; il sig. Botella considera queste e quelle come permiane e può darsi che parzialmente queste opinioni sieno tutte accettabili. La sierra di Lujar è anche calcare, la Contraviesa scistosa; ed il Guadalfeo, nella sua rapida discesa dal Sospiro del Moro al Mediterraneo presso Motril, passa a più riprese dall'una all'altra formazione. Gli scisti sono talcosi, varî di colorito e presso Ugijar il sig. Tarin indica dei conglomerati quarzosi, simili a quelli di Malaga; quindi, almeno per questo tratto, sarebbe verosimile la determinazione del sig. Botella. Se anche a settentrione le rocce scistose o calcari soprastanti agli argilloscisti potessero riferirsi al paleozoico recente, la successione ai terreni mesozoici oltre il Genil, di cui abbiamo visto per le provincie di Cordova e di Jaen, sarebbe assai più semplice e regolare (1).

(1) Le opinioni sull'età dei terreni pretriasici dell'Andalusia non sono meno varie che pei terreni analoghi delle Alpi, stante la mancanza di fossili, che pure a non grande distanza abbondano nelle formazioni sicuramente determinate come siluriane, devoniane o carbonifere nella sierra Morena. I signori geologi componenti la Commissione spagnuola pei terremoti del dicembre 1884 riferiscono al laurenziano non solo gli scisti gneissici e micacei della massa centrale della Nevada, dei monti di Malaga e di Ronda, ma anche i calcari saccaroidi e le rocce talcose ed amfiboliche od epidotiche, che li accompagnano. Le filladi argillo-micacee, che essi affermano essere spesso chiastolitiche, riferiscono dubbiosamente al cambriano e dicono abbastanza frequente un *Palaeophycus*, che certamente non può possedere molto valore cronologico. Secondo questi signori un gneiss tormalinifero compare al Cerro del Caballo ed i micascisti granatiferi sono abbondanti nella valle del Guadalfeo; ma quale ne sia l'epoca non affermano. Le serpentine colle rocce scistose che le comprendono sono dette azoiche; gli scisti più recenti, detti in sito *launas*, sono lasciati indeterminati. Il sig. Mac-Pherson

Quanto alla tectonica generale delle formazioni antiche nella sierra Nevada, è evidente la curvatura verso nord-est, che subisce l'allineamento di esse e quella biforcazione delle rocce più recenti alle falde della elevata catena, per circondare l'affioramento degli argilloscisti gneissici, che sporgono con area elissoidale. Parrebbe che una sporgenza del sottosuolo azoico abbia determinata la rottura e poi l'abrasione delle formazioni più recenti; e contro questo nucleo di terreni scistosi, probabilmente non molto elastici e sollevati a considerevole altitudine, vedremo come siasi poi prontamente attutito il movimento sismico del terremoto andaluso.

Alle falde immediate della sierra Nevada manca l'eocene; però un lembo di nummulitico venne indicato dai signori Collomb e Verneuil oltre Motril, alle falde della sierra di Lujar. Invece i conglomerati miocenici, con arenarie e con molasse, e la formazione gessifera hanno grande sviluppo; rimanendo però assai dubbia la determinazione di quaternarie, che il sig. Tarin ha assegnato alle alluvioni profondamente terrazzate dell'altipiano di Guadix mentre riconobbe come plioceniche le analoghe della depressione tra Baza e Huescar, che fa seguito all'altipiano di Guadix secondo il prevalente allineamento di nord-est dei tratti orografici e stratigrafici di quella regione. Lo sviluppo delle alluvioni terziarie e quaternarie alle falde di quelle montagne è straordinario, nè il distinguerle deve essere agevole; le une e le altre rappresentano la grandiosità del fenomeno erosivo, subìto da quel rilievo per opera delle correnti e delle meteore; parendo escluso che in quella catena di forma così piramidale e con valli che pel tratto montano si mantengono parallele, abbia mai assunto proporzioni ragguardevoli l'espansione glaciale. La profonda incisione delle conoidi quaternarie dei torrenti, che hanno la loro origine anche nelle regioni più elevate della sierra, dimostra d'altra parte l'antichità delle conoidi stesse ed esclude che un vasto apparato di ghiacciaî scendesse anche solo all'altitudine dei passi principali. Enormi *marmitte di giganti* attestano, secondo il sig. Drasche, l'abbondanza delle pioggie quaternarie su quella catena; la quale, per quanto grandi sieno state le modificazioni orografiche posglaciali dell'area mediterranea, non poteva essere molto discosta dal mare e doveva determinare una prima assai abbondante concentrazione di vapori; aggiungendosi così

(*Sucesion estratigráfica de los terrenos arcaicos de España*, Madrid 1883) pigliando come tipo della serie la successione che si avverte nella sierra Guadarama, distingue alla base una zona di *gneiss glandulare*, che alla descrizione e per averlo visto presso all'Escurial ci ricorda il gneiss di Antigorio; più in alto distingue un intreccio di gneiss e di granito, di rocce granatifere, amfiboliche, pirosseniche e di calcari saccaroidi, al quale ponno anche sostituirsi degli scisti fortemente mineralizzati per andalusite, staurotide, sillimanite, rutilo, fibrolite, oppure degli scisti micacei e talcosi; passando tutte queste rocce per gradazioni più o meno lente agli scisti quarzitici del siluriano. Nella Andalusia di questa serie non affiorerebbe la porzione basilare, uniformemente gneissica; ma comparirebbero le varie *facies* dei terreni cristallini recenti, riuniti in un complesso, che molto ricorda la sintesi, in parte vera, del compianto Gastaldi pei terreni analoghi delle Alpi occidentali. Siccome questa riunione va al presente appurandosi, nel senso di essere considerati come paleozoici recenti alcuni terreni scistosi o calcari, che si ritennerò azoici; così è probabile che anche per l'Andalusia e pel resto delle aree pretriasiche della Spagna la serie del sig. Mac-Pherson possa venire semplificata. Ad ogni modo l'analogia tra le rocce andaluse sottostanti ai conglomerati quarzosi di Malaga e quelle delle Alpi tra la Sesia ed il Ticino non può essere più perfetta, come ebbe a riconoscere lo stesso sig. Mac-Pherson, che nello scorso estate ha percorso le montagne circostanti al Sempione.

una causa locale al carattere del clima quaternario, che fu così bene dimostrato dallo Stoppani (1).

Oltre il R. Adra si stende all'angolo occidentale della Spagna la vasta provincia di Almerìa, della quale si posseggono pregevoli descrizioni geologiche dei signori Cortázar, Donayre, De-Botella, Monreal, Calderon; queste ultime con assai minuti particolari litologi sulle rocce eruttive del Capo di Gata.

Nella parte settentrionale della provincia di Almerìa, al confine con quelle di Murcia e di Granata (2), si eleva il cerro Gordo (1542$^{m}$), diramazione della sierra Sagra (2598$^{m}$); più a sud, separate dal precedente per la valle di Maria, decorrono verso levante le sierre di Periate (2039$^{m}$) e di Maria, formate come quello di calcari mesozoici; diramandosi poi dalla seconda il cerro di Gordos ed il cerro o *Muela* di Montreviche (1567) assai distinto per la sua forma a frammento di altipiano, riposante sopra una massa di più erodibile terreno scistoso. Parallela a queste due catene scorre verso levante passando per Valez-Rubio la valle di Chirivel, che per la Saragonera confluisce nel R. di Segura; ancora più a sud decorre altra catena di terreni scistosi, più bassa ma non meno continua, colle sierre di Oria (1300$^{m}$), de las Estancias (1442$^{m}$) e del Viento (1306$^{m}$). Da queste montagne scendono le acque del R. Almanzora per ampio bacino in gran parte occupato da terreni terziarî, ove è posta la città di Huércal-Obera, che fu rovinata dai terremoti del 1863 e 1864. In questa ampia regione collinesca si elevano con varia direzione dei dossi di calcari triasici e di scisti, sin presso al mare; quivi sorge il cerro Aguillon, all'estremo settentrionale di un rilievo, che con brevi interruzioni si continua verso sud fino al Capo di Gata. Il sig. di Cortázar, seguendo le idee dei geologi francesi, riteneva che gli scisti della catena tra il Chirivel e l'Almanzora fossero rocce triasiche modificate; sono filladi argillose, talcose, micacee oppure quarziti con esigui filaretti di antracite, alternate con banchi di saccaroidi azzurrognoli, di cipollino o di dolomie cariate. Al cerro Limaría si avvertono anche gli scisti granatiferi; alla sierra di Enmedio e sopra Jerabín abbondano giacimenti di minerali di ferro, tuttora coltivati; il colorito assai vario come per le marne del trias, la diversità dalle rocce azoiche delle regioni finitime e l'idea dell'azione metamorfosante di un supposto sottrostrato di rocce diabasiche, delle quali si scorgono molti ma assai ristretti affioramenti, hanno condotto quei geologi all'accennato riferimento. Ma il sig. Botella considera gli scisti della sierra de las Estancias come precarboniferi e gli altri scisti dei minori rilievi tra il terziario del R. Almanzora, come permiani. Le rocce cristalline sono poi dioriti, porfidi amfibolici ed afaniti, con quarzo, zeoliti, clorite ed oligisto, talora pur esse con granati; e si ritenne che la loro eruzione fosse seguìta da un'attività gaiseriana, colla formazione degli estesi giacimenti gessiferi, che aggiungono a quel complesso di rocce un'altra analogia col permiano inferiore delle Alpi venete. È rimarchevole la presenza nella sierra di Maria, tra le rocce giuresi, di un vasto ammasso trachitico, analogo alle rocce del capo di Gata.

Non manca però il trias normale, con marne variegate gessifere e con belle geodi

(1) A. Stoppani, *L'êra neozoica*. Vallardi. Milano, 1880.

(2) D. de Cortázar, *Reseña física y geológica de la region norte de la provincia de Almerìa*. Boll. Com. d. Mapa. II. 1875.

di quarzo rubiginoso, con acque salate alle fonti de los Gorullos, Saladilla e las Peñiscas; ed in alto con dolomie bituminose, ricche di filoni ferriferi, cupriferi e cobaltiferi della sierra del Castillo. Il giura-lias, con rocce calcari, nelle catene più settentrionali misura 800$^{m}$ di potenza ed è coronato da una zona oolitica; il titoniano e la creta non sono menzionati. L'eocene invece è molto sviluppato e viene descritto come discordante dal mesozoico e composto di macigno, di marne variegate, di argille assai fossilifere e di calcari marnosi soprastanti; quindi assai analogo all'eocene delle nostre provincie meridionali. I fossili raccolti alla Guadalupa, al cerro de la Cantéra, al Molino del Cubrero, al cerro Alfaetar ed alla Peñiscas spettano, al pari di quelli delle provincie di Jaen e di Cordova, al piano di Biarritz e quindi all' incirca alle nostre marne di Priabona. Al miocene furono riferite delle marne azzurre, delle molasse e delle puddinghe; le prime con banchi di gesso, le seconde con abbondanti *Clypeaster* e le ultime con grosse ostriche; queste rocce misurano varia potenza, sino a 230$^{m}$ e sono sollevate sino a 490$^{m}$, a Puertoloba. A differenza dalla valle di Granata e dalla massima estensione della valle del Guadalquivir, questa regione settentrionale della provincia d'Almerìa e più a sud tutta la spiaggia fino al capo di Gata presentano terreni pliocenici, con marne e molasse alla base e con conglomerati in alto, dello spessore complessivo da 80 a 100$^{m}$; si sviluppa da Huércal-Obera fino alla spiaggia. I conglomerati pliocenici contengono dei massi talora di quattro metri di diametro. Vasti depositi alluvionali, potenti da 20 a 40$^{m}$, riposano sopra un letto di argilla ocracea; si osservano anche a grande distanza dagli attuali corsi d'acqua e sono leggermente inclinati a sud, accennando probabilmente al senso, secondo cui avvenne un movimento posglaciale dell'area mediterranea.

Nella porzione centrale della provincia di Almerìa (1) prosegue il suo corso il R. Almanzora, per gettarsi in mare nel golfo di Vera; a monte raccoglie la confluenza del R. di Cantoria, che separa le falde della catena de Las Estancias dalla sierra de los Filabres, lunga 20 chilometri, diretta verso levante e che tocca l'altitudine di 2137$^{m}$ al cerro di Rimar. Presso al mare, alla sierra di Aguillon fa continuazione quella di Almagrera, celebre pei suoi ricchi giacimenti di galena argentifera. Tra questa sierra e quella di Almagro si avvalla la depressione di Pulpi, dove incominciano a comparire le rocce trachitiche. Già abbiamo detto che nella sierra de los Filabres si continuano le rocce scistose variegate cogli annessi calcari saccaroidi della zona basilare della sierra Nevada, e comprendono banchi di ferro ossidato o spatico, assai potenti alle Cañedicas de la Serena e presso Bedar. Dalle cave di marmo statuario di Machael provennero le colonne e gli stipiti, che ornano l'Alhambra. La cristallinità di questi marmi e l'aspetto degli scisti sembrarono sicuri indizî di un' azione metamorfica, esercitata da numerose amigdali delle già citate rocce diabasiche. La sierra Almagro presenta rocce triasiche normali, simili alle già descritte per la regione settentrionale di questa provincia; mancano le formazioni mesozoiche più recenti e l'eocene; il miocene, sollevato sino a 825$^{m}$, si presenta ancora con molasse a pettini e clipeastri. Il pliocene marino non è esplicitamente indicato.

(1) L. Monreal, *Apuntos fisico-geológicos referentes a la zona central de la provincia de Almerìa*. Bol. Com. Mapa. V. 2. 1878.

Ancora più a sud, ripigliando la catena litoranea presso lo sbocco del R. Adra, troviamo di rimarchevole la sierra di Gador, aspro rilievo dolomitico, spoglio di vegetazione, riarso da un clima affricano ma contornato da lussureggiante vegetazione, grazie all'abbondanza delle fonti allineate al contatto della massa dolomitica cogli scisti talcosi, che formano il basamento della catena. Il signor Botella (1) indica tra questi scisti dei gneiss micacei, dei micascisti granatiferi, amfibolici, tormaliniferi, dei marmi saccaroidi e più in alto dei conglomerati con quarziti; un complesso di rocce, che ricordano una nota fisonomia del verrucano alpino. L'egregio geologo riferisce una parte di questi scisti al protozoico e volle scorgervi le suddivisioni del Laurenziano, del Montalbano, del Taconico e del Cambriano; considerando poi come permiano il calcare dolomitico, che riposa, però con discordanza, sugli scisti coll'intermezzo presso Alcoléa di scisti carboniosi, di conglomerati quarzosi e di arenarie grigie del pari quarzose. Per tale discordanza, per la natura delle rocce basilari e specialmente pei fatti rinvenimenti di fossili del Trias medio, come afferma il signor Tarin, per alcune località della sierra di Gador crediamo meno sicura la determinazione del signor Botella; accordando anche qualche valore all'analogia di quella formazione colla dolomia triasica metallifera delle Prealpi. La ricchezza in giacimenti piombiferi di quella sierra è molto rilevante, porgendo essa occupazione a più migliaja di minatori ed operai con una media produzione annua di almeno sette milioni di lire. Mentre noi ci asteniamo di affermare in base a semplici analogie se permiana o triasica sia quella porzione della sierra di Gador in cui si annidano potenti e contorti ammassi di gesso, non ometteremo di ricordare che vi esistono delle fonti termali alle temperature da 32° a 45°, ad Alicun, alla Seca e ad Alhama. E ricorderemo parimenti che quasi al piede della sierra Nevada, presso Vicar, evvi un affioramento di andesite analogo a quelli di sierra di Maria, del Capo di Gata e delle Baleari. I terreni neocenici (l'autore non dice se miocenici o pliocenici) salgono sino agli 800$^{m}$ e contengono bivalvi, echinidi ed ossami di balenottere. Diremo a suo luogo dei terremoti, che hanno commosso la regione centrale della provincia di Almerìa.

Eccoci finalmente all'angolo sud-est della penisola iberica, ove in tempo geologicamente non lontano accadde per varie zone allineate da nord a sud una abbondante ejaculazione di rocce cristalline. Vediamo di alcuni più interessanti particolari, giovandoci delle due Memorie dei signori Donayre e Calderon (2). La sierra litoranea di Almagrera, che dicemmo poco sopra rinomata pei suoi giacimenti di minerali argentiferi, si abbassa in una regione collinesca estesa dalla foce dell'Almanzora alla foce del R. de Aguas, a levante di Sorbas. Quivi la costa di nuovo si rileva colla sierra Cabrera (950$^{m}$), alle falde meridionali della quale incomincia la formazione trachitica, di cui già incontrammo qualche lembo nella valle di Pulpi, tra le due sierre di Almagro e di Almagrera. Dopo breve tratto di suolo collinesco, terziario, interrotto da molte emersioni di trachite, si eleva proprio all'angolo sud-est

(1) F. De-Botella, *Reseña fisica y geológica de la region sud-ovest de la provincia de Almerìa.* Boll. Com. Mapa. IX. 2. 1882.

(2) F. Donayre, *Datos para una reseña fisica y geológica de la region sud-est de la provincia de Almerìa.* Boll. Com. Mapa. IV. 2. 1877. — Calderon y Arana, *Estudio petrográfico sobre las rocas volcánicas del Capo de Gata.* Ibidem. IX. 2. 1882.

della penisola iberica la sierra del Capo de Gata, tutta trachitica, lunga 24 chilometri, coll'altitudine di 513$^{m}$ al Cerro de Garbanzal, deserta, arida, solcata da numerosi letti di torrenti, che scaricano nel mare le ora scarse acque di pioggia. In direzione quasi normale a questi rilievi litoranei ed alla suaccennata sierra di Gador, decorre a levante del R. di Almerìa la sierra di Alhamilla, che tocca l'altitudine di 1446$^{m}$ al Cerro di Culataivi; è lunga 36 chilometri e piglia nome da una fonte termale, che sgorga alle sue falde sud-ovest a 461$^{m}$, colla temperatura di 53°, 5, mineralizzata da cloruri di magnesio, di sodio e di calcio, da carbonati e solfati terrosi e da acido carbonico libero. La sierra Cabrera e la Alhamilla constano poi di scisti talcosi variegati, che il signor Donayre riferisce al cambriano e ritiene alterati dalle diabasi e dalle trachiti; mentre il signor De-Botella nella sua pregevole carta li distingue come permiani, crediamo più a ragione. Contengono marmi cipollini, oficalci, talcoscisti con granuli e vene di quarzo ed in alto prevalgono degli scisti giallicci, violacei, rossigni, indi dei calcari brecciati, dolomitici, di vario colorito, con filoni di ferro manganesifero e con amigdale di gesso. Alla Rambla del Puerto abbondano altresì dei granati. Il miocene sembra che quivi faccia difetto, riferendosi al pliocene l'ampia estensione di marne rossicce e giallognole, coperte da conglomerati e da calcari grossolani o cavernosi, che costituisce le colline sino a 600 metri di altitudine, con fossili abbondanti, in specie nelle marne. Le alluvioni quaternarie, spesso cementate, sono incise per 40$^{m}$. Le relazioni tectoniche delle trachiti coi sedimenti terziarî sono ancora poco note; per modo che il signor Calderon dichiara che i dati sono ancora insufficienti per determinare l'epoca di emersione, che il signor Donayre riteneva con dubbio come posterziaria ed in rapporto col sollevamento del pliocene.

Parallela alla sierra di Gata decorre più a ponente, più breve e molto più stretta, quasi un dicco denudato, l'altra sierra detta la Serrata (410$^{m}$); e molto entro terra, quasi alle falde della sierra Alhamilla presso Nijar, si eleva a 393$^{m}$ lo Hoyazo, singolare cono o residuo di camino trachitico, tronco, con una specie di cratere sventrato, che si direbbe alla figura un vero vulcano, se la sua base non fosse di scisti granatiferi e le pareti esterne non constassero di calcare pliocenico, fossilifero, punto alterato.

L'allineamento delle masse trachitiche verso nord-est-nord pare evidente, e se ne contano oltre una ventina; ma sembra che le lave si sieno espanse sopra un' area assai ristretta attorno a cadaun centro. I conglomerati eruttivi ed i tufi sono assai scarsi; alcuni di questi ultimi contengono fossili marini microscopici, ma non si dice nemmeno se animali o vegetali o di quale classe. È da credersi che se quelli furono dei vulcani paragonabili ai posglaciali e quaternarî, ogni traccia di apparato subaereo sia stata abrasa e rimanga qualcosa di consimile a quello scheletro di vulcano, che sono i colli Euganei. Le brecce trachitiche sono alternate con lave basaltiche, evidenti alla Punta de los Genovesos. Il gesso, l'allume, le silice in tutte le sue forme ed il quarzo ametista attestano un' attività gaiseriana, conseguente alla emissione delle trachiti; non meno degli abbondanti filoni metalliferi, dei quali è invero da ammirarsi la ricchezza e la varietà in specie minerali. Si citano: blenda, galena, calamina, cerussite, baritina, oligisto, wulfenite, diallogite, pirolusite, in ganga costantemente silicea, che il signor Calderon attribuisce all'alterazione del feldispato della trachite. Questa alterazione sarebbe stata più profonda nella Serrata che nella catena trachitica principale.

Le trachiti si raccolgono nei seguenti gruppi: trachiti, lipariti, trachiti non quarzifere, daciti od andesiti amfibolico-quarzose, andesiti micacee, andesiti amfiboliche, andesiti augitiche, ed infine una nuova varietà di lava vitrea, che il signor Calderon chiama *limburgite*. L'olivina è frequente ma in poca quantità, l'apatite è scarsa, l'oligisto immancabile e spesso assai abbondante. In complesso queste rocce sono meno acide delle vere trachiti e meno basiche dei basalti. Dal molto minuzioso suo studio litologico l'autore è condotto alle seguenti conclusioni:

Mentre nel distretto vulcanico di Olot (Catalogna, presso Gerona) prevale la natura basaltica, così nelle lave come nelle rocce frammentizie; mentre nelle eruzioni della Mancha, secondo gli studî del signor Quiroga, si ebbero lave nefeliniche; la regione del Capo di Gata si distingue per abbondanza di svariate rocce, le quali, scostandosi dal carattere delle più settentrionali, ponno ridursi ai due tipi di lave sanidino-amfiboliche precedenti e di oligoclasico-augitiche più recenti; essendo poi scarso nelle une e nelle altre il peridoto, con analogia ai distretti vulcanici dell'Ungheria, dell'Alvernia, ed aggiungiamo anche della Toscana e degli Euganei.

Quanto poi alla causa della successione dei due accennati tipi di lave trachitiche ed augitiche, sembra che essa consista in una differenziazione meccanica e chimica, compiutasi nell'interno dei singoli camini vulcanici; essendo constatato un graduato passaggio dall'uno all'altro tipo di rocce per ciascuno dei centri eruttivi.

Queste lave non presentano alcuna analogia col granito, perchè possiedono sempre una pasta vitrea; invece somigliano assai ai porfidi quarziferi. La ulteriore silicizzazione delle lave sarebbe stata accompagnata da analoga azione, esercitata sugli scisti paleozoici presso al contatto colle prime; anzi le sezioni sottili mostrano in questi dei piccoli cristalli di sanidino.

L'anologia litologica colle rocce trachitiche, che trovansi in ciottoli all'Isola Alboran (1) è molto forte per le varietà porfiroidi. Però l'olivina è in quelli più abbondante. Tali ciottoli appartengono ad un' alluvione, che si eleva sino a 15 metri sul mare; ma il sottosuolo è costituito di marne e calcari fortemente inclinati; l'isola è contornata di scogli, che ne fanno l'approdo assai pericoloso. Il capo Tre Forche, il punto più vicino della costa affricana, è di scisti paleozoici con vasti lembi di molasse mioceniche; ma tra l'isola di Alboran e quel capo sprofondasi una depressione di 1700$^{m}$, ed una profondità di oltre settecento metri separa l'isola stessa dalla spiaggia di Adra, che ne dista quasi cento chilometri. Siccome questa enorme profondità rende poco probabile che per quanto grandi sieno stati i cangiamenti orografici del Mediterraneo fossevi un tempo continuità idrografica tra il Capo di Gata e l'isola Alboran, e d'altronde le trachiti non sono precisamente le stesse, è molto probabile che i ciottoli trachitici partissero da un rilievo, il quale 40 chilometri più a levante sarebbe tuttora attestato da un rialzo del fondo marino sino quasi fior d'acqua; come ho indicato nello schizzo con alcune curve batimetriche, desunte dalla carta del signor Botella. Notisi che questo rilievo si allinea precisamente col Capo di Gata, secondo la direzione nord-est-nord, che i dossi trachitici mantengono da questo capo sin oltre la foce del R. Almanzora.

(1) M. D. Dávila, *Isla de Alboran*. Bol. Com. Mapa. III. 1876.

Più a levante e più a nord prosegue ancora con analoga direzione la zona vulcanica con trachiti di Cartagena e del Mar Menor, mostrando come per la Spagna, non meno che per la Sardegna, per l'Italia e per la penisola greca la direzione delle fratture vulcanogeniche non si debba punto confondere con un asse teorico del bacino mediterraneo (1). Una certa comunanza nella progressiva migrazione da nord a sud dell'attività vulcanica, da quando comparve in epoca terziaria, si può intravedere per tutte queste regioni; ma tra questa intuizione ed una dimostrazione scientifica ci corre abbastanza per consigliarci ad andare molto guardinghi nel volere riunire in un'associazione piuttosto geografica che geologica le manifestazioni vulcaniche nell'area mediterranea. Intanto osserviamo che l'allineamento tectonico delle formazioni sedimentari anteriori al miocene è attraversato quasi ad angolo retto da questa zona di eruzioni trachitiche della Spagna e dell'Algeria; ma che d'altra parte dei dicchi andesitici esistono nella sierra di Maria, alle falde meridionali della sierra Nevada ed alle Baleari. Invece, ad un allineamento parallelo, o quasi, a quello delle formazioni sedimentari accenna la disposizione delle numerose fonti termali e minerali di Caratraca, Alhama, La Malá, Alicun de Ortega, Lanjaron, Portugos, Zujar, ed altre in provincia di Albacete e Murcia. La temperatura ne varia da 20 a 50° e sono pressochè tutte mineralizzate da cloruri, da acido carbonico e da solfuro d'idrogeno.

In una recentissima communicazione dei sig. Ch. Barrois ed Alb. Offret all'Accademia francese (2) si fa cenno delle condizioni stratigrafiche dell'Andalusia, in rapporto coi terremoti e si ammette senza alcun dubbio che le due masse di terreni cristallini della serranìa di Ronda e della sierra Nevada abbiamo delimitato a ponente ed a levante l'area di maggior scotimento. Osserviamo che il movimento si è verso entrambi i lati gradatamente attenuato, invadendo o non toccando le aree di affioramento delle rocce più profonde e e cessando di essere rovinoso a grande distanza dalle maggiori elevazioni. Al più si potrebbe affermare che a Cartama ed Alhaurin, verso la serranìa, ed a Murchas alle falde della Nevada il moto sia stato più violento in confronto di località anche meno lontane dall'epicentro: forse per maggiore veemenza delle onde quivi riflesse. Quando poi i sullodati geologi asseriscono l'esistenza delle fratture trasverse, per le quali sarebbe tagliata e dislocata la catena Betica, e contano tra queste una supposta faglia da Zaffaraya a Motril ed altra non meno ideale in corrispondenza della chiusa del Guadalhorce, non facendo alcun cenno delle fratture con tanta evidenza dimostrate dal signor Mac-Pherson, nè delle altre che sono perpendicolari al corso del detto fiume, nè della troncatura (che non è già un ripiegamento) della massa dei monti di Mijas, a noi sembra che essi affermino assai più di quanto si possa dimostrare. Riteniamo altresì inesatta la coincidenza delle grandi vallate di Granata, di Malaga e di Guadix con linee di faglia; perchè queste depressioni corrispondono anzitutto a sinclinali; ed anche il supposto allineamento della ideata frattura di Malaga coll'isola di Alboran ci sembra che non possa avere alcun valore dal punto di vista delle manifestazioni endogene, poichè abbiamo veduto come alla detta isola non

(1) Ricordiamo come sulla costa africana, a sud-est dell'isola di Alboran ed a sud-ovest di Oran, siavi un'ampia regione trachitica con numerosi affioramenti tra rocce mioceniche marine, appoggiate con discordanza ai terreni cretacei e giuresi.

(2) Comptes rendus, 7 juin 1886, p. 1311.

si trovino che dei ciottoli di trachite, mentre il sottosuolo è di rocce stratificate. Quanto poi all'allineamento della depressione di Guadix colla zona delle rocce trachitiche del capo di Gata, osserviamo che l'asse maggiore di quella depressione, continuantesi con quello dell'altra di Huescar, converge verso nord-est colla zona trachitica di Gata e di Cartagena, la quale abbiamo veduto allinearsi piuttosto col suaccennato rilievo a levante dell isola Alboran.

Perciò dall'edificio teorico d'onde i signori geologi francesi desumono *l'equilibrio* instabile della porzione malaghese della catena Betica e la *predestinazione* ai terremoti delle supposte fratture di Malaga, di Motril e di Guadix (che poi non sarebbe punto dimostrata nè dalla storia sismica dell'Andalusia nè dai particolari del fenomeno di cui ci occupiamo) a noi pare che non emerga molta evidenza di prove alle ipotesi delle cause esclusivamente meccaniche del terremoto. Siccome in fatto di fratture deve esisterne un numero sterminato, ed è appunto a tale condizione che avvenne il molle ripiegamento degli assi stratigrafici, quale ci risulta dalla esposta rivista della geologia andalusa; così riesce impossibile senza uno studio pazientissimo precisare l'andamento di alcune di esse. Però se badiamo alla forma dell'area sismica, ci persuadiamo che il suo massimo diametro corrisponde approssimativamente all'asse stratigrafico delle formazioni mesozoiche ed eoceniche e che l'epicentro non cade in alcuna delle fratture ideate dai sullodati geologi. Vedremo come assai più della tectonica del sottosuolo abbiano influito la natura e la struttura delle rocce, che direttamente sostenevano i fabbricati, nel determinare i particolari del moto sismico; sempre però subordinatamente alla distanza dell'epicentro. Gli accidenti che sembrano avere avuto qualche peso, non diremo nella produzione e nemmeno nella trasmissione del movimento, ma nella delimitazione dell'area più fortemente scossa sono: la frattura del Guadalquirir, la brusca rottura a levante della catena di Mijas e la risvolta relativamente brusca dell'asse stratigrafico alle falde meridionali della sierra Nevada.

## II.

### Prosecuzione dell' allineamento tectonico della provincia di Almeria in quelle di Murcia e di Alicante; cenni geologici sulle isole Baleari.

L'accennata direzione della zona trachitica non toglie la continuità del proseguimento sino alla spiaggia tra Alicante e Valenza, e più a levante sino alle Baleari della direzione dei terreni mesozoici e parzialmente anche dei più antichi, che abbiamo scorto nella valle Betica e lungo tutto il litorale andaluso, sino dall'angolo sud-ovest, in provincia di Cadice. Abbiamo veduto come a nord della sierra Nevada, nelle sierre Sagra e Segura, le rocce mesozoiche si presentino in ripetuti corrugamenti; tanto da farci pensare ad un' ansa, che in origine girasse tutto attorno all'asse dell'attuale vallata betica, poi fosse rotta, pigiata e deformata per scorrimento della parte settentrionale a ridosso della meridionale. Ora dobbiamo notare che, lungo il litorale andaluso da Estepona al Capo di Gata affiorano quasi esclusivamente terreni antichi, e che i triasici affiorano assai estesi tanto a nord come a sud della Sierra della

Segura; e per quanto lascia scorgere il mantello delle rocce mioceniche, lo stesso duplice affioramento del trias avviene a nord ed a sud dei lembi cretacei e giuresi nelle provincie di Alicante e di Murcia e sulla spiaggia, appunto presso Alicante e presso Valenza. Ne consegue che quelle stesse formazioni che contornano a levante ed a sud la depressione betica, si rialzano nuovamente a mezzodì, dando luogo ad un altro allineamento di rughe, che procede verso nord-est nella direzione della porzione meridionale dell'ansa corrispondente al bacino betico. Questo allineamento di curve delle formazioni mesozoiche ed eoceniche in provincia di Valenza si incontra con altro, forse contemporaneo, che ha una direzione quasi normale al primo, attraversando per isbieco la penisola iberica da Alicante al Golfo di Biscaglia. Ne risultò la formazione del bacino lacustre miocenico, che secondo il signor Botella si estendeva dalla catena di Guadarama fin presso Albacete e si aggiunse così nuova cagione alla ampiezza della penisola spagnuola.

La conformazione del fondo mediterraneo a levante del Capo di S. Antonio mostra evidentemente la continuità orografica tra le Baleari e la penisola, per un rilievo che si deprime al massimo sino a 800$^{m}$, tra profondità a nord ed a sud che toccano o sorpassano i duemila metri. Come pure si scorge che il rilievo delle isole Columbreti (1) vulcaniche, con alcuni coni bene conservati, è abbracciato dalla curva batimetrica di 100$^{m}$, assai lontana dalla costa e frastagliata da Terragona al Capo S. Antonio. È anche rimarchevole il fatto che in Minorca la direzione della formazioni si è

(1) Recenti studî del sig. Vincent (*Annal. de la Soc. Esp. de Hist. Nat.* I. XV, 1885) hanno fornito interessanti particolari sulla natura delle rocce vulcaniche di questo gruppo di isolette e di scogli, che piglia il nome dalla abbondanza delle serpi nell'isola maggiore; prima non si aveva che una breve notizia del capitano Smith (*Journal of the Royal Geographical Society of London*, I. 1830-31) ed una buona carta dell'ammiragliato inglese. Compendiamo queste notizie come elementi di confronto colle rocce vulcaniche del Capo di Gata.

Il centro dell'isolotto principale dista 67 chilometri da Castellon de Plana, presso Valenza. Sono quattro gruppi di isole e scogli: a nord la Columbreta mayor, col monte Colibre all'estremo settentrionale, foggiato a campana, e verso mezzogiorno con due piccoli coni vulcanici meglio conservati, detti Mammeolibre. Quest'isola è un cratere sventrato ed invaso dal mare, che vi forma la riparatissima baia di Puerto Tofino, con fondo da 10 a 40 metri. A ponente, lungi un miglio geografico, sorge il secondo gruppo coll'isolotto maggiore foggiato a sella e detto Malespina ed altri più piccoli, chiamati Bauzà, Espinoza, Valdès e Navarete. A 5,560 metri dal m. Colibre sorge il Galiano, a forma di un grosso voliero, e lo circondano gli scogli Cerquero, Baleata, Churruco e Luyado. Tra i gruppi Malespina e Galiano sorgono l'isolotto Ferrer e lo scoglio dirupato Joquin; tra Ferrer e Malespina evvi lo scoglio Fidalgo e verso ponente il banco Lopez. Tutti questi rilievi sono vulcanici e, secondo l'autore, sottomarini; la vegetazione vi è abbondantissima, di olivastri, mirti, geranie e opunzie Le rocce sono *scorie basaltiche* e *tufi palagonitici*.

Le *scorie basaltiche* sono cavernose, grigie, con disseminati piccoli cristallini di augite e molta magnetite; risultano essenzialmente di plagioclasio, olivina ed augite. Sebbene lo Smith abbia menzionata la fonolite allo scoglio Ferrer e la trachite all' estremo sud della Columbreta mayor, l'autore non ne vide alcun saggio, però ne ritiene probabile l'esistenza. Nella roccia basaltica i cristallini di augite mostransi al microscopio corrosi per azione del magma basico e rotti; la pasta vitrea penetra nelle corrosioni; alcune volte i cristalli sono incolori, più spesso verdicci e pulverulenti. L'olivina in tutti i saggi mostrasi prevalente all'augite; è chiara, incolora, con molte inclusioni di magnetite e con granuli circondati da arrossamento per limonite. Il plagioclasio offre la geminazione dell'albite ed i caratteri ottici della labradorite; i maggiori cristalli sono di anortite e comprendono

bruscamente cangiata, volgendo a sud-est, con una rapida risvolta, la quale è seguita da tutte le curve batimetriche sino a 2500$^{m}$; dimostrandosi con ciò come la tectonica del bacino mediterraneo debba di necessità presentare quegli stessi contorcimenti degli assi stratigrafici, che vengono dimostrati dall'esame dei tratti più saglienti della tectonica nelle aree sporgenti dal Mediterraneo o che a questo delimitano il bacino. A noi pare che il voler dividere un fenomeno unico, sebbene assai complesso, riferendo gli allineamenti tectonici di massimo significato orogenetico a più epoche di corrugamento, quando siamo di fronte a mari vastissimi nell'eocene ed a bacini lacustri assai ampî nel miocene per questa medesima area mediterranea, sia un volere complicare dannosamente quei fatti, ai quali poi dovrà, a suo tempo, il geologo domandarsi la ragione dell'attuale topografia dei fenomeni endogeni. Ma questo tempo, ove non si voglia far troppo a fidanza sopra ipotetici sistemi di fratture, è molto lontano e non ci proponiamo di certo di affrontare problemi così elevati. Limitiamoci a raccogliere quanto i signori Thós, Vidal, Molina, Hermite ed altri hanno scritto delle isole Ibiza, Formentera, Majorca e Minorca, che sono le principali delle Baleari.

Ibiza è contornata da minori isolette e da scogli assai numerosi; tocca i 475$^{m}$ al monte Atalayesa, ha conformazione alpestre ma abbonda di fonti, occorrendone una sottomarina nel porto di S. Antonio, che va annoverata tra le altre prove di una sommersione, subìta da questa regione mediterranea. La serie dei terreni vi è abbastanza numerosa; infatti affiorano in tre aree distinte le dolomie grigie, metallifere per giacimenti di cerussite e di galena, che furono riferite al trias; seguono altre dolomie liassiche, quindi degli scisti grigi assai potenti, ricchi di fossili oxfordiani della zona ad *A. trasversarius;* in particolare poi è sviluppata la creta, con calcari marnosi e compatti del neocomiano e con altri più tenaci a requienie, ostree, *Janira Morrisi, Nautilus neocomiensis,* riferiti all'urgoniano. L'eocene è indicato con dubbio; il miocene, assai meno esteso di quanto è segnato nella carta del signor Botella, compare in due lembi, alle estremità sud-ovest e nord-est dell'isola, con ligniti, conglomerati e calcari arenacei; si continua con interstrati marini sino al tortoniano. Del pliocene

anch'essi delle inclusioni di magnetite. La pasta vitrea, incolora o verdiccia, contiene molte secrezioni microlitiche di labradorite e di augite di seconda consolidazione, granuli e trichiti di magnetite.

Dei *tufi palagonitici,* alcuni offrono una distinta struttura clastica, per lapilli e frammenti di cristalli pirossenici, compresi in una pasta vitrea; altri più uniformi, con un colorito gialliccio, caratteristico per queste rocce. Contengono fino al 13 % di acqua. La palagonite circonda dei cristalli di olivina, di augite, di plagioclasio, di magnetite e di picotite, e comprende altresì delle geodine con zeoliti; essa poi, trasparente, gialliccia, presenta secrezioni aciculari di feldspato e zeoliti fibroraggiate di mesotipo e di stilbite. Contiene delle inclusioni gazose, irregolarmente disseminate, sferiche od elissoidali, a contorno oscuro; sonvi inclusi del tutto opachi. L'autore non ignora che il Penk, opponendosi all'opinione del Waltershausen e del Rosenbuch, ritiene la palagonite una miscela di varie scorie basaltiche e non già un minerale distinto; ma pur ammettendo che essa sia formata per sedimentazione e decomposizione di tali scorie, deve riconoscersi il suo aspetto caratteristico non meno che la singolare composizione chimica, distinta per l'abbondanza del carbonato calcare (33 %), degli alcali e dell'acido fosforico. Quale sia l'epoca di queste rocce, quali i rapporti colle altre rocce eruttive della Spagna, delle Baleari, della Sardegna e della Sicilia, quale la storia di questo scheletro di vulcano, in cui pare di scorgere qualcosa di simile ad Ischia, sembra che l'autore intenda di far noto in ulteriore pubblicazione.

non si fa cenno; quindi esso o manca oppure presenta carattere continentale. Al quaternario spettano conglomerati ed alluvioni ocracee, con conchiglie terrestri; ed è importante il fatto che i primi contengono dei ciottoli di *diorite* e di *granito,* rocce che mancano non soltanto all'isola ma a tutte le Baleari ed alla spiaggia orientale spagnuola. Di rocce cristalline si menzionano soltanto delle ofiti, accompagnate da gesso ed esclusive delle aree cretacee; l'analisi microscopica le dimostra somiglianti a quelle che abbiamo visto nella provincia di Cadice e perciò aumenta il nostro sospetto che si tratti in complesso della medesima formazione ofiolitica, che si sviluppa nei terreni eocenici e cretacei dell'Apennino. L'isola Formentera dal signor Vidal è descritta come formata esclusivamente di terreni quaternari, ma tocca l'altitudine di 192$^{m}$ alla Mola; il signor Botella vi indica invece tutto miocene, e potrebbe trattarsi infatti di una formazione paragonabile ai vasti talus, che circondano la sierra Nevada.

In Majorca e Minorca la serie dei terreni è ancora più complessa che in Ibiza; il compianto Hermite ne scrisse in un bel libro, dove raccolse tra le altre anche le importanti osservazioni fatte dal Lamarmora. Majorca ha forma di quadrilatero del diametro massimo di 92 chilometri; presenta un rilievo quasi isolato nella parte meridionale al Puig de Randa (672$^{m}$), ma la catena principale decorre presso alla spiaggia nord-ovest, composta di tre creste, delle quali la mediana tocca l'altitudine di 1463$^{m}$ al Puig de Torellas; in questa catena sono scavati i passi, che dalla detta spiaggia conducono a una depressione longitudinale, che decorre da Palma a Puebla, occupata da terreno quaternario. L'acqua difetta assai ed il terreno è molto aspro.

In Minorca evvi minore varietà di suolo, ma pure si avverte una depressione longitudinale dal seno di Mahon al golfo di Algairas; anzi il primo è un vero fiordo e come tale esso porge altro argomento a riprova della prevalente sommersione posterziaria, la quale, come si è detto, non esclude parziali e locali emersioni attestate da panchine fossilifere. Anzi può anche darsi che queste rimangano a testimonio di una emersione quasi totalmente elisa da più recente sommersione, avvenuta in epoca posglaciale e non estranea alle più remote tradizioni della nostra razza.

Le alture di Minorca si spingono a 340$^{m}$; assai meno difesa dai venti, quest'isola presenta una vegetazione boschiva assai misera. Ad essa sono esclusivi i terreni scistosi, arenarei e calcari, riferiti al devoniano in base a fossili vegetali ed a bella fauna, scoperta e determinata dal sig. Hermite; mancano questi terreni in Majorca, ma evvi probabilità che affiorino in mare di fronte al seno di Estellencs, dove il trias trovasi più sollevato che in alcun altro punto dell'isola ([1]). La potenza del devoniano in Minorca non è minore di mille metri.

Il trias compare in entrambe le isole colla potenza complessiva di 500 metri; alla base con conglomerati ed arenarie rosse ad *Equisetum arenaceum*, come a Malaga, più sopra con marne gessifere iridate e con calcari a *Ceratites, Lingula, Halobia Lommeli,* come nelle prealpi e nella Sicilia. La serie giurese conta dei piani non meno fossiliferi che nell'Andalusia; incomincia con calcari alquanto marnosi del lias inferiore a *Spiriferina rostrata* e *Rhynchonella tetraedra;* segue con calcari più o

([1]) Hermite, *Études géologiques sur les iles Baléares.* Paris, 1879. — S. Thós, *Islas de Ibiza y Formentera.* Boll. Com. Mapa. III. 1876. — L. M. Vidal y E. Molina, *Reseña fisica y geológica de las Islas Ibiza e Formentera.* Ibidem. VII. I. 1880.

meno compatti sino al titoniano, assai fossilifero, ed al neocomiano, che pur presenta taluni fossili del più recente strato giurese, dall'autore compreso tra i terreni cretacei.

L'eocene manca in Minorca; in Maiorca incomincia alla base con depositi lacustri a *Melania Duthiersi* e *Clausilia Beaumonti*, con scaglie e coproliti di cocodrillo, dello spessore di circa 70 metri e vi appartengono i banchi lignitici, scavati a Benisalem; prosegue con marcata discordanza, per calcari nummulitici del piano di S. Giovanni Illarione e si chiude coll'orizzonte a *Serpula spirulea*, al quale non manca l'elegante echino *Coelopleurus equis*, che trovasi nel Vicentino. Queste rocce eoceniche marine hanno uno spessore di 150$^{m}$. Il miocene poi, coi suoi calcari a *Clypeaster portentosus* e *Pyrula condita* alla base, cogli altri arenarei a *Pecten Besseri* e colle molasse a *Cerithium pictum* e *C. rubiginosum* alla sommità, della potenza complessiva di 200$^{m}$, corrisponde alla serie del vallone di Granata non meno che alla successione nella Liguria, nel Piemonte e nel Veneto. Il pliocene è lacustre ed è rappresentato da un tenue deposito di calcari silicei a *Melania tuberculata*, a levante di Palma. Il quartenario infine, costituito da un calcare grossolano marino, assai impiegato nelle costruzioni, si innalza sino a m. 80; accennando, secondo il sig. Hermite ad un sollevamento dopo una sommersione, oppure a una vicenda contraria, come noi riteniamo più probabile.

Non mancano dicchi di roccia cristallina, in Majorca attraverso le rocce giuresi, in Minorca tra gli scisti devoniani; e sono melafiri analoghi ai permiani dei Vosgi ma contenenti peridoto, basalti col minerale stesso assai alterato, porfiriti oligoclasche ed andesiti giargonifere; un complesso di rocce, che può riferirsi alle trachiti di Capo di Gata. Notiamo come le andesiti prevalgono in Minorca presso alla curvatura, che abbiamo rilevato nell'allineamento caditano-balearico. Le Baleari ebbero violenti terremoti negli anni 1660, 1749, 1775, 1827, 1835, 1851-52; questi ultimi in Majorca, descritti dal sig. Bouvy [1] presentarono una direzione parallela all'asse orografico dell'isola, ebbero il centro a due leghe da Palma e si continuarono per oltre un anno, preceduti spesso da forti detonazioni; la prima scossa fu sussultoria e disastrosa, osservandosi negli edificî delle fratture orizzontali e taluni ornamenti in pietra schiantati dai loro sostegni per salto verticale.

## III.

### Di alcune particolarità litologiche e stratigrafiche delle regioni più fortemente scosse dal terremoto del 25 dic. 1884.

Se le precedenti notizie sulla costituzione geologica dell'Andalusia e delle regioni finitime ponno bastare a far conoscere, per quanto occorre nello studio del fenomeno sismico che è argomento di questo scritto, i tratti fondamentali e meglio accertati della tectonica di quelle contrade, non dobbiamo però tacere di alcuni particolari poco importanti per la storia geologica, e forse perciò meno contemplati dagli altri osservatori, ma che si connettono strettamente colle varie modalità di veemenza e di localizzazione delle scosse.

[1] Boll. Soc. géol. de France. 2 Sér. V. X. p. 359.

Della posizione della pluralità dei paesi danneggiati, in riva alle incisioni praticate dai torrenti, abbiamo detto di sopra e ne parlarono anche gli altri, che descrissero questo terremoto. Ma non vediamo fatta menzione dello stato di fratturazione, nel quale per precedenti assai più forti terremoti, crediamo di data quaternaria, trovansi i terreni terziarî, sollevati con debolissima inclinazione, su cui stanno Alhama, Arenas del Rey, Jatar, Albuñuelas ed altri. È una fratturazione poco profonda, assai minuta e meno efficace sull'andamento stratigrafico delle formazioni terziarie, che ne sono affette; ma appunto per questo carattere deve avere portato un più dannoso effetto nella manifestazione superficiale del moto sismico. Lo schizzo, che riproduciamo alla tavola terza, preso da Alhama guardando a sud-est verso la confluenza del R. Caliacon nel Tajo de Alhama, dà un'idea di questa conformazione, che poi si scorge più o meno evidente in tutte le sezioni appena un poco profonde dei dintorni della città. L'erosione ha contribuito assai a produrre e ad esagerare questo disordine, che è maggiore appunto presso ai solchi delle correnti e massimo nelle porzioni isolate, che sono comprese tra la confluenza di due burroni. Albuñuelas trovasi esso pure colle tre sue frazioni sopra un terreno così fratturato e scosceso, essendo precisamente tra due corsi d'acqua, profondamente incassati nei conglomerati e nelle molasse tortoniane. Jatar invece riposa, a quanto ci parve, sopra una vasta formazione di travertino commisto a terreno ocraceo, posto sui conglomerati e sulle molasse fossilifere; e la massa del travertino è tutta infranta e dislocata. Alcaucin, Periana, Canillas de Aceituno riposano sopra brecce e travertino, del pari infranti e che pel terremoto furono di nuovo per lunghi tratti spaccati. La formazione del travertino, ai cui piedi, presso il contatto delle marne ed arenarie eoceniche colla scaglia cretacea sottoposta, sta il paese di Periana è molto estesa e si presenta anche più a levante nell'altipiano, che abbiamo delineato nella tavola annessa; si accompagna sin quasi ai Bagni, per oltre cinque chilometri e deve essere stata commossa violentemente, come lo dimostravano le frequenti fratture freschissime ed il disordine dei massi superficiali. Questi tavolati di travertino presso Periana riposano sopra le rocce argillose ed arenacee contorte e sopra i calcari marnosi scagliosi cretacei, fortemente arricciati; sono sotterraneamente minati dall'idrografia profonda, che si è stabilita al contatto del travertino colle rocce meno permeabili; sono infranti da tutti i violenti terremoti, che avvennero dall'epoca di loro formazione, e può ognuno immaginarsi con quanta veemenza e con quale complicazione di urti vi abbia agito la forte scossa, che iniziò i terremoti da noi studiati.

A Canillas de Aceituno il conglomerato e la breccia riposano in parte sul calcare paleozoico, in parte sullo scisto; si può distinguere una porzione più antica e più compatta sotto alle case più meridionali del paese, che relativamente soffersero meno, da una massa più recente, imperfettamente cementata, più vicina al torrente, che determinò la posizione dell'abitato; e quivi le rovine furono straordinarie.

A Velez-Malaga abbiamo un lembo ristretto di molasse terziarie, appoggiato in parte sullo scisto paleozoico ed in parte sul calcare giurassico assai inclinato, mostrando poi questo alla base un'arricciatura di calcari marnosi variegati, probabilmente triasici. Esistevano quindi le peggiori condizioni perchè la scossa riuscisse, come lo fu difatti, assai più disastrosa in confronto non soltanto di Torre del Mar, che è sulle alluvioni,

ma anche delle frazioni disseminate per la valle sin presso al contatto degli scisti colla massa terminale calcarea della Sierra Tejeda, dove la scossa, anche per le accennate condizioni locali dei villaggi, fu non meno fatale.

Cacin, dove il terremoto causò grandi rovine, è posto nella parte più bassa di una profonda incisione, praticata dal Rio omonimo nelle rocce lacustri, mioceniche, costituite da calcari, da arenarie e da argille alternanti tra loro e formanti un insieme assai eterogeneo e poco consistente, in cui il movimento sismico deve facilmente essersi trasformato in violenti movimenti delle masse parziali.

Il Turro, che ha sofferto molto meno di Cacin, è posto sopra un conglomerato abbastanza compatto a grossi elementi, di rocce cristalline e calcari.

Accenneremo alle condizioni speciali del sottosuolo per qualche altro dei paesi colpiti dal terremoto nello studio particolareggiato della distribuzione dei danni. Le nostre gite non furono abbastanza numerose per rilevare in tutta l'area di questo terremoto simili particolarità affatto locali; ma le osservazioni fatte ci abilitano a concludere che oltre alla maggiore o minore distanza dall'epicentro, la natura e la struttura del terreno, che immediatamente sosteneva gli abitati, ebbero una forte influenza nella misura del disastro. Aggiungiamo anche il riflesso che l'enorme sviluppo dei travertini e dei conglomerati a cemento assai compatto ed abbondante, di epoca posterziaria, sui due versanti della Sierra Tejeda, con analogia a quanto si osserva attorno ai monti calcari del nostro Apennino, attesta una attività endogena per emanazione di acido carbonico incomparabilmente più pronunciata di quanto al presente si osservi; e che la fratturazione e dislocazione dei terreni terziarî e posterziari, che andarono di pari passo collo stabilirsi dell'attuale idrografia, dimostrano d'altra parte una attività sismica incomparabilmente più energica della attuale e che può avere influito sulla conformazione orografica della penisola Iberica e delle isole che la circondano.

---

## PARTE SECONDA

### STORIA DEI TERREMOTI ANDALUSI DELLE EPOCHE PASSATE.

Pur troppo i terremoti disastrosi non sono un fenomeno nuovo per l'Andalusia e per le altre provincie della Spagna meridionale. Basti dire che dal mille in poi trovammo notizie di 18 terremoti disastrosi o rovinosi, che ebbero il loro centro nell'Andalusia; e molti altri certamente ne avvennero rimasti a noi ignoti, poichè poche sono le ricerche fatte sino ad oggi sulla storia sismica della penisola iberica. Il lavoro di maggiore importanza finora pubblicato su questo argomento è una Memoria del sig. Alexis Perrey, il quale nel 1847 ha raccolte, ordinate e discusse con buona critica quante notizie gli fu possibile sui terremoti iberici (1). Più tardi il sig. Cassiano

(1) A. Perrey, *Sur les tremblements de terre de la péninsule ibérique* negli Annales de sc. physiques et nat. de Lyon. Lyon 1847.

del Prado di Madrid, in una sua *Relazione* fatta al governo spagnuolo sui terremoti che colpirono l'Almeria nel 1863, aggiunse come appendice un *Catalogo dei terremoti nella parte sud-est della Spagna dal 1518 al 1863* (1). Molte notizie nuove ed interessanti sui terremoti iberici si trovano pure in un erudito articolo pubblicato recentemente a Barcelona dal signor Josè Fiter é Ingles in occasione del terremoto del 25 dicembre 1884 (2). Il Mallet nel suo grande *Catalogo generale dei terremoti* (3) poco aggiunge per riguardo alla Spagna ai fatti menzionati dal Perrey.

Per compilare il seguente *Catalogo dei terremoti andalusi* abbiamo usato dei materiali raccolti dai citati autori, e di più abbiamo consultato diverse storie e cronache spagnuole, e parecchi trattati generali dei terremoti del Secinara, del Bonito, del Buoni ecc., nei quali trovammo molti fatti finora non registrati dagli storici dei terremoti iberici. Nel *Catalogo*, oltre dare la storia dei terremoti che ebbero il centro nell'Andalusia, menzioneremo brevemente almeno la data dei più violenti terremoti delle regioni limitrofe (Almeria, Murcia, Portogallo meridionale), per poterne più facilmente rilevare i rapporti cronologici e topografici.

*Terremoti andalusi anteriori al mille.* — Pochissimi fatti ci sono noti intorno ai terremoti andalusi anteriori al mille. Per tutti i tempi anteriori all'êra volgare non possiamo citare che due date. Josè Fiter (op. cit. citando Teixidor, Mem. de la Academia di Ciencias nat. y artes de Barcelona) accenna ad un terremoto sentito nella Andalusia, nella Murcia, nella Catalogna e nell'Aragona nel 1030 av. Cr., ed un altro che nel 500 av. Cr. cagionò grandi disastri sulle coste del Mediterraneo e specialmente nei Pirenei.

Il Bonito (*Terra tremante*, Napoli, 1691, pág. 407) parla di terremoti generali nella Spagna, ma senza citare località speciali, nell' 881 e nel 955 d. Cr.

## I.

## Terremoti andalusi posteriori al mille.

1081. Terremoti considerevoli in Spagna (Perrey). Non è citata nessuna località particolare.

1170. Averroe (nei *Comm. super Arist.* lib. 2 meteor cap. 2) racconta che nell'anno 566 di Maometto, corrispondente al 1170 dell'èra volgare un terremoto disastroso colpì l'Andalusia occidentale. Precedettero tuoni straordinarî, ai quali fece seguito la prima scossa per cui perirono molte persone. La terra si spaccò presso Cordova, nella località detta Anorma, e ne escì una materia simile a cenere ed arena. Le scosse forti replicarono in Cordova per un anno e nòn cessarono totalmente se non dopo tre anni circa. Le scosse furono più violente ad occidente che ad oriente di Cordova. Agostino Niso Svessano (*Comm. super Arist.* l. 2 comm. 172) scrive che per il terremoto del 1170 una regione intera venne trasportata in mare con gli

(1) Cassiano del Prado, *Los terremotos de la provincia de Almerìa*, nella Revista minéra di Madrid, t. XIV. 1863 e t. XV. 1864.

(2) Josè Fiter é Ingles, nella Crónica comercial de Barcelona, Numero extraordinario, Febrero 1885.

(3) *Reports on the facts and theories of earthquakes.* London, 1850-1858.

uomini e gli animali, e per un mese restò a galla, ma alla fine si sommerse totalmente. Questo racconto, per quanto inverosimile nei suoi particolari, fa supporre che sia avvenuto qualche grande scivolamento del suolo, per cui precipitarono in mare uomini e case.

1179. Secondo il Bonito (op. cit.) la Spagna patì per i terremoti.

1293. Vi furono terremoti in Spagna (Perrey).

1343. Terremoti rovinosi in Spagna, specie a Cordova e Siviglia (Bonito).

1344. Terremoto disastroso in Portogallo (Bonito).

1353. Secondo il Bonito il terremoto fece gravi danni in Spagna.

1356 agosto 24. Terremoto rovinoso nel Portogallo, ed in altre parti della Spagna, specialmente in Siviglia dove caddero le palle che stavano sulla torre di Santa Maria, e rovinò la torre della chiesa di San Salvatore (Guttierez, *Hist. de casi meravigliosi*) Ortis de Zuniga (*Ann. Eccles. y seculares de Sevilla*) riferisce questo terremoto andaluso del 24 agosto all'anno 1396 dell'êra spagnola che corrisponde, secondo l'*Art de verifier les dates*, al 1358 dell'êra volgare. Si tratta certamente d'uno stesso fatto, perchè è riferito con identiche circostanze; ci mancano però argomenti per sapere quale delle date sia da preferirsi. Alla fine di settembre ed in principio di ottobre vi furono in Spagna grandi terremoti, per i quali in Cordova ed in Siviglia rovinarono molti edificî e perirono molte persone. Secondo il Villani il terremoto si sentì in Toscana ma senza danni (Villani, *Istorie* lib. VI, cap. 84).

1357 maggio 14. Verso le 7 od 8 ore ant. un altro terremoto disastroso colpì Siviglia e Cordova (Perrey, ed *Hisp. illustr.* t. 1$^{us}$, 563). Nel Buoni (*Dialogo del trem.* Ferrara, 1571) questo terremoto è riportato, crediamo per errore di stampa, al 1557.

1408-1431. In questo periodo molti terremoti, tra cui parecchi disastrosi, nella Spagna nord-est specie in Catalogna: solo quello del 24 aprile 1431 si è sentito fino a Granata (Bonito, op. cit.)

1492 gennaio. Nei *Registri parocchiali* della chiesa de los Martires in Malaga abbiamo trovato scritto all'anno 1581: « Io vidi ricordato in una carta di un reggitore scritta al Re cattolico un terremoto (di Malaga) del 1492 in gennaio ».

1504 aprile 5. Venerdì santo tra le 9 e le 10 ant. terremoto disastroso in Andalusia. A Siviglia e Cormona rovinarono numerosi edificî e perirono molte persone. Vennero danneggiati anche altri paesi lungo il Guadalquivir, specie da Alcalà del Rio in su, come a Cantillana e Tocina. Il terremoto si estese sino in Castiglia. Le scosse replicarono meno forti nell'estate. Seguirono pestilenze, carestie e grandi pioggie (Zurita, *Anales de Aragon* t. V, p. 5; Ortis de Zuniga, op. cit.; Bonito e Perrey).

1518 novembre 9. Terremoto disastroso in Almerìa (Cassiano de Prado, op. cit.).

1522 settembre 21. Terremoto disastroso in Almerìa, sentito in Andalusia orientale e nel regno di Fez (Africa) (Bonito, op. cit.).

1523 ottobre 20. Scosse disastrose nel regno di Granata ed in Africa; città ingoiate; isolette sprofondate, monti disradicati. Le scosse replicarono più volte (Bonito, Perrey).

1526 giugno 4. Terremoto a Turpiana (Almerìa?) (Cassiano del Prado, l. c.).

1531 e 1551. Due terremoti disastrosissimi in Portogallo.

1540 ottobre. Terremoto in Spagna. Manca la località (Perrey).

1550 aprile 19. Terremoto spaventoso in Almerìa (Cassiano del Prado, l. c.).

1558-1559 e verso il 1568. Scosse rovinose in Almerìa (Cassiano del Prado, l. c.).

1581 giugno 18. Verso le 8 ant. terremoto disastroso in provincia di Malaga. Nei *Registri parocchiali* già citati (v. sopra anno 1492) trovammo scritto: « Domenica 18 giugno (1581), giorno dei Martiri alle 8 ant. fu un terremoto il più forte e spaventoso che mai s'è visto. Nessuna casa andò illesa da spaccature ed altri danni: caddero molte pareti ovvero le tegole, e le più danneggiate furono quelle più alte, come la casa del Vescovo e quella del ricevitore Pietro Zapata .... A quest'ora il capitolo stava in la Chiesa de los Martyres ed era sul pulpito il predicatore, quando si sentì il popolo come una sol voce gridare che la Chiesa cadeva .... I cantori saltarono abbasso dalla tribuna invece di scendere le scale .... Tutto il popolo fuggiva .... Il terremoto durò dieci minuti *(sic)*, e dicono che in questo poco tempo la terra tremò 3 volte. Per tutta la settimana la gente dormì fuori delle case .... Nella Chiesa de los Martyres si aprirono molte spaccature nell'altare maggiore, e necessitarono 20 settimane per i ripari .... Io vidi ricordato in una carta di un reggitore del Re cattolico un terremoto del gennaio 1492. Ma il terremoto presente fece maggiori danni e fu maggiore degli altri. Si seppe che lungo la costa il terremoto giunse ad Estepona, e non fino a Gibilterra, ed a levante fino a Cartagena, e per terra fino a Toledo; e tutto nel medesimo giorno, e quasi nella medesima ora. In alcuni paesi fu più forte che a Malaga, come si dice di Antequera e di Velez, in altri meno. In cima alla porta del carcere cadde la testa dell'aquila delle armi reali di pietra, e rovinò una parte del muro della porta maggiore e delle muraglie della città e dell'Alcazaba. Nel 1580 tra le ore 9 e le 10 ant. del 10 ottobre venne una pioggia che mai non s'era vista ».

1589. Cordova patì grandi danni per un terremoto che gettò a terra magnifici edificî (*Hispania,* sive *de Regis Hispaniae regnis et opibus* Comm. Ludg. Bat. 1629. J. Alvarez de Colmeñar, *Ann. d'Espagne et de Portugal*, Amst. 1741).

1597 e 1598. Due terremoti disastrosi a Lisbona (Perrey).

1661 (nell'anno) terremoto in Spagna. Manca la località (Perrey).

1679 in settembre. A Malaga, scossa (Perrey).

1680 mercoledì 9 ottobre. Verso le 7 e $^1/_4$ ant. terremoto disastroso a Malaga. Prima del terremoto l'aria ed il mare in calma perfetta, il cielo sereno. La scossa fu verticale e tanto forte come non ve ne fu mai dopo quella della morte di G. C. (Così in un documento pubblicato dal sig. Pasqual de Gayangos nel giornale l'Andalucia, *Numero unico* pubblicato in Madrid nel 1885 a beneficio dei danneggiati del 24 dicembre). Cadde la Torre ed il convento della SS. Trinidad Calcedos, cadde la Chiesa del Carmen Descalzo e la torre di S. Juan e le merlature del forte de Gibralfaro e la Alcazava. Insomma non vi fu Tempio nè Torre, nè muro che non sia stata demolita o danneggiata più o meno fortemente. Gran parte del popolo fuggì ai campi, perchè le case che restarono in piedi minacciavano rovina. Il terzo giorno soffiò un gran vento (chiamato Terral), che non recò nessun danno; onde la gente prese animo a ritornare nelle abitazioni. In Malaga furono 1250 le case crollate o rimaste inabitabili, fino a che non venne atterrata la parte minacciante rovina (1). Le parrocchie di S. Juan.

(1) Secondo una relazione più dettagliata furono 416 le case distrutte, 734 quelle rese inabitabili e 3377 quelle danneggiate più o meno gravemente.

de los Martyres e del Sacrario furono quasi distrutte. Furono rovesciate di preferenza le mura dalla parte del mare. Vi furono 250 feriti e solo 70 morti perchè, in generale, ebbero tempo di fuggire in istrada. A Velez-Malaga la terra si aprì ed inghiottì il torrente vicino, e poi congiungendosi lanciò le acque in alto con grandissima violenza. Si sentirono forti rumori sotterranei. Il terremoto fu molto violento a Cordova e si sentì pure verso le 7 ant. a Madrid, all'Escuriale ed altrove nella N. Castiglia. Si avvertì sensibilmente fino a Segovia, dove per poco non si capovolse il Calice al Padre Rettore di quel Collegio. Le rovine si estesero fino a 12 leghe all'intorno di Malaga. Più lontano non vi furono disastri. Fuori del Malaghese vi furono lesioni negli edificî, ma nessuna disgrazia personale. Il giorno di San Michele vi fu un diluvio di pioggia che distrusse tutte le viti ed i frutti. A Malaga le navi che erano in mare vennero levate in alto e spinte fuori dalle acque; e poco prima della scossa i pesci abbandonarono l'acqua saltando sulla terra o sulle navi. Nel medesimo anno apparve una spaventosa cometa (*Histoire. gén. d'Espagne tiré de Marianna* e *Relacion veridica de la lastimosa destrucción que padeció la ciudad de Malaga por el espantoso terremoto sucedido en 9 octubre 1680*). Il Perrey riporta in agosto 1680 un terremoto in Spagna specialmente a Malaga, citando la *Dresdner geol. Anz.* del 1756. Ma riteniamo si tratti del grande terremoto del 9 ottobre.

1712 febbraio 2 al maggio 21. Dodici scosse a Jaen in Andalusia (Perrey).

1721 marzo 24. Terremoto disastroso a Majorca (Perrey).

1722 dicembre 22. Terremoto disastroso in Portogallo (Perrey).

1732 gennaio 10. A Siviglia scossa leggera, poi altra che cagiona qualche lesione negli edificî (Perrey). Secondo l'ing. Noguès questo terremoto fece rovinare la cupola della cattedrale di Siviglia (*Nature*, 17 jan. 1885).

1748 ottobre 6. Nella notte terremoto in Granata (Cassiano del Prado, l. c.).

1750 agosto. A Gibilterra terremoto (Perrey).

1752 aprile 28. Terremoto rovinoso in Portogallo (Perrey).

1755 novembre 1. Terremoto disastrosissimo di Lisbona, il quale fu tra fortissimo e rovinoso a Cadice, Siviglia, Malaga, Granata, ecc. A Malaga si sentì prima un forte rombo e subito dopo una scossa violenta. Le persone riunite nella chiesa de los Martyres per la Messa solenne si misero a gridare spaventate « Misericordia Señor ». La scossa replicò, tre volte nello spazio di 8 a 10 minuti. Nella città di Malaga ed in tutta la diocesi molti edificî rimasero lesionati, ma nessuno rovinò, nè vi ebbe alcuna disgrazia personale (*Note ms. di D. Diego Fern. Medina esistenti nell' Archivio parocchiale de los Martyres di Malaga*). A Granata il terremoto non arrecò gravi danni, e tuttavia lesionò in tal modo la chiesa collegiale del Salvador che i canonici la abbandonarono e non vi ritornarono che nel 1758 (*Relazione del terremoto nel Regno di Portogallo* Milano, Agnelli 1755). A Cadice i danni maggiori furono cagionati dal *maremoto* che seguì dopo la scossa, poichè il mare gonfiandosi inondò la città, e fece perire annegate molte persone.

1755 novembre 2. Alle 7 ant. a Gibilterra scossa forte, senza danni. (Anonimo, *Degli orrendi tremuoti che nei mesi di nov. e dic. del 1755* ecc. Venezia 1756).

1755 novembre 4. Alle 2 pom. scossa a Gibilterra. Disseccano le fontane e dopo 4 minuti zampillano più di prima. Nel giorno, scosse forti nell'Andalusia sentite a

Madrid ed in tutta la Spagna, eccettuata la Catalogna (Perrey ed Anonimo, op. cit.). Il centro di queste scosse del 4 non è più in Portogallo, ma nell' Andalusia.

1755 novembre 5. Altra a Gibilterra più forti delle precedenti.

1755 novembre 8. Scosse rovinose a Lisbona ed a Siviglia (probabilmente è una replica del terremoto di Lisbona) (Perrey).

1755 novembre 19. A Gibilterra scossa violenta (Perrey).

1755 novembre 27. Verso le 11 e $^1/_2$ ant. scossa di 5 o 6 minuti (*sic*) a Malaga preceduta da forte rombo. Fu violenta anche a Cordova ed altrove nella Spagna meridionale. A Malaga il mare si avanzò sulla spiaggia, e nella mattina del 30 nov. vi fu una tormenta spaventosa (Note ms. di don Fernandez de Medina già citate sopra. — Anonimo, op. cit.). Josè Fiter (l. c.) cita anche Velez Malaga, Torrox, Estepona tra i paesi scossi dal terremoto negli ultimi di novembre.

1761 marzo 31. Scossa rovinosa in Portogallo (Perrey).

1763 ottobre 11. Scossa violenta a Lisbona sentita leggermente a Cadice (Perrey).

1767 luglio 16. A Malaga terremoto che cagiona la rovina di non pochi edificî (Josè Fiter, l. c.).

1768 giugno. Nel mese a Gibilterra una scossa forte. Nel giugno 9 parecchie scosse forti a Lisbona (Perrey).

1772 aprile 5-6. Scosse nel Lisbonese sentite a Cadice, S. Maria, S. Lucar ecc. (Perrey).

1773 aprile 12. Terremoto disastroso a Tangeri, sentito a Cadice (scossa violenta est-ovest), a Rota, Porto S. Maria, a Malaga ecc. Nell'Osservatorio di Cadice i pendoli si fermarono sulle 5 h. 15 m. 40 s. ant. (Perrey).

1775 ottobre 16. A Malaga, scossa (Perrey).

1776 giugno 6. Alle 5 ant. a Gibilterra, scossa (Perrey).

1777 luglio 4, 5 h. 35 pom. A Malaga due scosse da 8″ a 10″ dirette nord-sud (Perrey).

1778 giugno 7. Tra mezzodì ed 1 h. pom. a Granata scossa fortissima.

1778 novembre 7. Alle 8 h. 30 pom. a Guadix scossa forte (Perrey).

1778 novembre 13. Alle 8 h. 30 ant. a Granata scossa fortissima che si ripetè alla sera e varie volte per molti giorni seguenti. Il popolo si atterrì e si rivolse a Dio con preghiere, e si serrò la casa de Comedias destinandola ad altro oggetto (Cassiano del Prado, op. cit.). Secondo Perrey nel 13, 14, 15 a Granata vi furono 24 scosse con lesioni leggere agli edificî.

1785 maggio 5. A Granata scossa (Perrey).

1786 gennaio 13. Terremoto rovinoso o disastroso ad Albuñuelas, con danni a Motril, Salobreña ed altrove (C. Martinez, *Los temblores de la tierra* pag. 39, Malaga, 1885). Ad Albuñuelas ci dissero che esistono memorie di questo terremoto negli archivî di Granata.

1790. Nella notte dell' 8 ottobre alla 1 e $^1/_4$ terremoto disastroso ad Oran. Risentito fortemente ad Almeria, Cartagena, Malaga ecc. (Cassiano del Prado, op. cit.). Secondo il Perrey nei giorni 8, 9 e 10 ottobre vi furono scosse in Africa e nella Spagna meridionale per cui rovinarono parecchie case a Santa Fè (Granata), ed il mare fu assai agitato a Cartagena.

1801 giugno 19. Poco dopo le ore 12 terremoto violento a Granata sentito con maggior forza a Santa Fè, Atarfe, Pinos, Chanchina ed altri paesi della Vega. In Atarfe rombo sotterraneo molto spaventoso (Cassiano del Prado, op. cit.).

1802 gennaio 17. A Torrevieja terremoto rovinoso (Cassiano del Prado, l. c.).

1802 novembre 8. Scosse alla punta meridionale della Spagna (Perrey).

1802 dicembre 11. Alle 8 h. 15 m. pom., e nel 12 verso 2 h. notte scosse abbastanza forti al Peñon (presso Granata?) (Cassiano del Prado, l. c.).

1804 gennaio 13. Alle 5 h. 53 m. pom. a Motril scossa rovinosa cominciata con trepidazione ossia verticale, continuata con ondulazione est-ovest. Le scosse replicarono alle 9 h. 5 m., alle 12 h. 5 m., alle 3 h. 20 m. della notte, ed alle 6 h. 8 m., alle 9 h. 4 m., alle 12 h. 3 m., alle 6 h. 6 m., alle 7, alle 11, alle 12 h. 5 m., del giorno 14, come pure alle 3 ant. e 4 h. 15 m. ant. del 15. Come si vede, le scosse presentarono un periodo di 3 ore circa. Le scosse furono accompagnate da rombo sotterraneo. Tutte le case furono lesionate ed alcune quasi interamente rovinate. Le vittime umane solo due; perciò il 13 gennaio d'ogni anno si canta ancora oggidì nella cattedrale di Motril un *Te Deum* per ringraziare Iddio del pericolo scampato. Alle 5 h. 6 m. pom. del 13 scossa a Granata di 2″ di durata, diretta nord-sud, ovvero, secondo altri, sudest-nordovest, replicata nella notte alle 12 h. 15 m. In Granata suonarono da sè le campane, e vi furono alcune lesioni nella Cattedrale e nella Chiesa de las Augustias. Sebbene questo fenomeno sia riportato alle 5 h. 6 m. da Perrey e da Cassiano del Prado, pure credo si tratti del medesimo terremoto sentito a Motril alle 5 h. 53 m., dove ebbe il suo centro, e che si sentì con forza minore a Granata. Questo terremoto fu pure violento più che a Granata su tutta la costa marina ad Adra, a Velez, a Malaga ecc. Il mare si ritirò dalla costa per circa 22 veras. La scossa del 13 si sentì a Melilla (in Almerìa?) dove screpolarono varie case; a Berja (dove le scosse replicarono fino al 24 agosto), a Colmeñar dove gli abitanti fuggirono dalle case, ad Olvera (regno di Siviglia) dove non fece danni, solo produsse generalmente una certa indisposizione nello stomaco. Si sentì pure al Peñon (presso Granata), e fino ad Aranjuez ed a Madrid. Il 6 febbraio si scriveva da Motril che ivi le scosse continuavano, una o due per giorno, con rombi sotterranei. Una se ne sentì la notte dal 5 al 6 verso un'ora meno forte delle altre, ma preceduta da rombo maggiore. Parve diretta ovest-est. Fino al 17 febbraio continuano le repliche tra Motril ed Almerìa, senza recare nuovi danni (Cassiano del Prado, op. cit., e notizie avute da noi da persone di Motril e di Colmeñar).

1804 gennaio 21 al 22. Alle 12 e alle 3 scosse a Malaga, alle 5 ant. altra fortissima con rombo, sentite a Velez e nella Murcia (Perrey).

1804 febbraio 16. Verso le 6 ant., e nel 1° marzo a Malaga ed a Motril, parecchie scosse (Perrey).

1804 febbraio 17. Verso le 4 h. 30 m. pom. a Granata scossa lieve (Cassiano del Prado, op. cit.).

1804 agosto 20. A Malaga, alcune scosse sentite a Madrid (Perrey). Forse è il medesimo terremoto che verso sera del 20 agosto fece escire spaventati dalle case gli abitanti di Rochetta (Almerìa).

1804 agosto 22. Alle 3 h. 30 m. pom. ad Albuñol scossa violenta, durata 50″, con direzione nordest-sudovest. Per alcuni giorni repliche meno forti. Si sentirono

molti rumori sotterranei come lontane scariche d'artiglieria, senza scossa sensibile (Cassiano del Prado, l. c.).

1804 agosto 25. Alle 8 h. 30 m. ant. in Almerìa e nell'Alpujarras, terremoto disastroso col centro probabilmente presso Dalias, dove i morti furono più di 267 e tutte le case rovinarono. A Berja vi furono 45 morti e molti feriti, sebbene la scossa disastrosa sia stata preceduta di poco da una scossa leggera, per cui molti escirono sulla strada e si salvarono. Verso occidente fino a Motril vi furono danni; più oltre si sentì fino a Malaga, ma senza danni, almeno notevoli. Sentito anche fino a Cartagena ed a Madrid.

1804 settembre 16. Nell'Atarfe, alle falde di Sierra Elvira, alle 6 ant. detonazione sotterranea come scarica d'artiglieria molto spaventosa; replicò alle 2 pom., poi alle 9 pom. più forte; tutti escirono dalle case. Tra queste tre si sentirono 14 altre detonazioni minori. Non si avvertì nessum movimento di terreno. Aumentò assai il volume delle acque che sgorgarono intorno, e si fecero torbide.

1804 settembre 23 al 26. Altre scosse rovinose a Berja ed altrove nell'Almerìa. Si sentirono anche a Granata. Le acque sorgenti sono aumentate ed in un sito del principio della Vega (detto Setoman) si apersero nuove sorgenti (Cassiano del Prado, l. c.).

1806 novembre. In principio parecchie scosse a Granata con lesioni negli edifici. In un villaggio le case rovinarono (Perrey). Sentito fortemente anche in Santafè (*Los terremotos de Andalucia*, Informe de la Comision ecc. Madrid 1855).

1817 marzo 18. Al piede meridionale dei Pirenei terremoto disastroso (Perrey).

1821 ottobre 8. Scosse violente nella Murcia; ne replicarono 30 o 40 in 26 giorni (Cassiano del Prado, l. c.).

1822 luglio 29. All'1 ant. a Granata scosse con lesioni di parecchi edificî. Replicano la notte 29 al 30 (Perrey).

1822 settembre 29. Alle 5 h. 56 m. a Cadice scossa ond. est-ovest, di 2″, sentita ad Algesiras ed a Cordova (Perrey).

1823 gennaio 10. Scosse rovinose in Murcia, Alicante, Cartagena (Perrey e Cassiano del Prado, l. c.).

1824 agosto 1 e 2. A Granata otto scosse (Perrey). Ad Archidona c' è memoria di un forte terremoto accaduto nel 1824. A Pinos del Valle vi furono scosse molto forti nel 1823 e nel 1824. A Nerja vi è memoria d'un terremoto sensibile ma senza danni avvenuto nel 1823. Siccome la data (1824) comunicataci dal rev. Parroco di Archidona ci pare la più attendibile, riteniamo che anche i fatti di Nerja e di Pinos del Valle siano da riferirsi al 1824.

1826 aprile 21. Scossa in Granata, nel 22 altra scossa forte, poi repliche numerose fino al luglio.

1826 maggio 15. Alle 11 ant. a Granata scossa forte preceduta da vento; poi molte senza vento, poi nel 17 altra e dopo 20 minuti una seconda di 3″ con terribili muggiti sotterranei, le quali cagionano lesioni negli edificî. Nel giorno stesso e poi verso la fine del mese e in principio di giugno repliche leggere. Ad Alhendin ci raccontarono che per la scossa del 15 ruinò il campanile della Chiesa, sicchè si dovette farlo nuovo, e che le scosse replicarono per 4 o 5 mesi.

1826 luglio 4. Due scosse a Granata; nel 16 altre 3; nel 17 altre scosse. Alcuni abbandonano la città.

1826 dicembre 14. Tra le 4 e le 5 ant. a Granata una scossa con lesioni alle case; poco dopo altre quattro meno forti; poi alle 8 pom. altra violenta (Perrey).

1828 settembre 14 al 15. Scosse rovinose nella Murcia, seguite da repliche numerosissime (300 in 24 ore) nel giorno 15, ed altre più o meno numerose tutto l'anno, fino all' 11 marzo 1829.

1829 marzo 21. Nella Murcia terremoto disastroso, seguìto da repliche numerosissime fino al 26; poi quotidiane fino al 16 aprile. Vi furono 389 morti e molti feriti. A Granata si sentì un moto ondulatorio diretto est-ovest. Nel 18 aprile e nel giugno dal 10 al 15 altre scosse fortissime e fors'anche rovinose nella Murcia.

1829 settembre 10. Presso Granata tre scosse (Perrey).

1829 ottobre 19. A Granata alle 4 h. 30 m. ant. e nei dintorni scosse forti senza disgrazie personali e con rombi; nel 24 alle 4 h. 30 m. pom. altra scossa simile (Josè Fiter, l. c.).

1834 aprile 13. A Gibilterra, a Cadice, ad Algesiras, scossa leggera (Perrey).

1836 novembre 21. A Granata e dintorni scosse forti (Perrey).

1838 gennaio 15. Alle 5 h. 30 m. pom., 10 h. 20 m. e a 11 h. 15 m. parecchie scosse leggere a Gibilterra (Perrey). — Luglio 18 alle 11 h. 45 m. pom. a Gibilterra alcune scosse, e nel 19 alle 4 pom. e 8 h. e 45 m. pom. altre con direzione est-ovest (Perrey).

1841 agosto 4, sera. Due scosse forti a Siviglia e Malaga; nel 7 alle 10 h. 30 m. pom. a Siviglia ed altrove parecchie altre con rombi (Perrey). A Huelva nell'estate (4 o 7 agosto?) si sentì un terremoto alquanto forte, preceduto da forte rombo, seguìto da grande aumento dell' acqua nei pozzi (D. de Contrazar, *Discurso leido ante la R. Acad. de Ciencias* pag. 24).

1843 marzo 3. A mezzanotte scossa mediocre a Malaga (Perrey).

1846 gennaio 26, sera. A Granata scossa senza danni (Perrey).

1846 marzo 26. A Huelva una scossa (Perrey).

1847 luglio 28. Alle 11 h. 40 m. pom. a Siviglia scossa fortissima, oscillatoria di 2″ dalla quale vengono danneggiati alcuni edificî. Vi fu una casa rovesciata a Badajoz. A Jaen si sentirono due oscillazioni, a Madrid tre in direzione nord-est. Suonarono i campanelli e si spostarono alcuni mobili (Perrey).

1849 maggio 20. Alle 5 ant. a Granata scossa molto forte di 1″ circa, sentita in diversi luoghi della provincia. È la più forte dopo quella del 1804 (Perrey). A Santa Fè c'è memoria di un terremoto sentito nel 1848 (Informe de la Comision, ecc. pag. 76). Probabilmente è quello del 20 maggio 1849.

1851 maggio 14. Terremoto quasi rovinoso a Majorca.

1851 maggio 25. Scosse nelle provincie di Malaga e Almerìa ed in qualche punto delle coste africane (Perrey).

1852 settembre 11. A Mondoro (Andalusia) scossa assai forte (Perrey, *Mém. cour. de l'Acad. belg.* t. XIII p. 16).

1852 ottobre 13. Alle 4 h. 58 m. ant. a Malaga 4 o 5 scosse mediocri, poi dopo 6 m. altre senza danni. A Cadice si contarono 12 oscillazioni. Nel 20, di

mattina, scossa violenta senza danni ad Antequera (prov. di Malaga). Nel 25 e nel 30 altre scosse a Malaga di 7″ a 9″ senza rombi, con direzione nord-sud od ovest-est (Perrey).

1852 dicembre. Nel mese, scossa a Malaga.

1856 gennaio. Terremoto rovinoso in Algeria, sentito a Siviglia: nel 20 altra scossa in prov. di Siviglia. Nel 18 febbrajo a Granata scossa forte; poi ivi altra in aprile, poi nel 7 e nel 16 maggio scosse forti con rumori. Nel giugno 2 a Siviglia scossa forte diretta sud-nord con forte rumore. — Giugno 29 scossa a Granata, poi nel 30 ottobre altra forte. — Agosto 21 e 22 scosse disastrose in Algeria. — Settembre 1, scossa a Malaga (Perrey, *Mém. cour. Acad. belg.* t. VIII).

1857 aprile 20. A Malaga, scossa leggera (Perrey, l. c. t. X).

1858 novembre 11. Verso 7 h. 15 m. ant. scosse fortissime a Lisbona e rovinose a Setuval, sentite fino a Siviglia così fortemente da danneggiare molti edificî, ed a Madrid con forza mediocre senza recar danni. A Siviglia il movimento durò 27″ con direzione est-ovest, misto di oscillazione e di trepidazione (Perrey, l. c. t. XII).

1860 marzo 12. Alle 3 ant. a Malaga, Siviglia, Cordova, Jaen, ed in quasi tutta l'Andalusia terremoto forte che risvegliò tutta la popolazione. A Malaga cominciò con una trepidazione accompagnata da un gran rombo sotterraneo, a cui seguì immediatamente la scossa ondulatoria nord-sud, e poi due altre scosse appena sensibili. Complessivamente durò 20″. I mobili oscillarono. Nel luglio 14 a Jaen scossa (Perrey, l. c. t. XIV).

1860 settembre 22. In Almeria terremoto rovinoso. Nel 1860 e 1861 repliche numerosissime nell'Almerìa e nella Murcia (Cassiano del Prado, op. cit.).

1861 ottobre 13. A Malaga, scossa leggera (Perrey, l. c. t. XVI).

1862 agosto 22. Verso 5 h. pom. alle rupi de las Algamitas, a 5 leghe da Osuna (prov. Siviglia) terremoto violento, per cui a Villanueva rovinarono molte case. Vi furono 20 feriti (Perrey, l. c. t. XVI).

1862 settembre 20. A Granata terremoto con forte rumore (Perrey, l. c.).

1863 aprile 17. Alle 7 h. 55 m. ant. a Granata scossa di 4″ a 6″ con forti rumori sotterranei. Direz. sudovest-nordest. Restarono lesionate le case a Granata e ad Alhendin, come pure a Gojar, Ojijares. Ad Alhendin si aprirono crepacci nel suolo. Replicò leggermente verso le 4 pom., e poi altra più sensibile verso le 9 pom., la quale a Granata fu sud-ovest-nord-est. — A Capileira (sulla Sierra Nevada) vi fu un terremoto fra l' 8 ed il 10, il quale però, secondo Cassiano del Prado, è quello stesso del 17 aprile. Nel 20 aprile alle 6 ant. altra piccola scossa a Granata (Perrey, l. c. t. XVII).

1863 giugno 10. Terremoto rovinoso all'Almeria. Poi moltissime repliche; tra cui l' 8 agosto una forte sentita fino a Motril.

1863 ottobre 15. A Cordova (Spagna?) scossa leggera (Perrey, l. c.).

1864 gennaio 12. nella Murcia terremoto rovinoso. Agosto 16 e 17 a Granata due scosse leggere non sentite da tutti (Perrey, l. c. t. XVIII).

1867 settembre 9. Alle 2 ant. ad Ubèda (Andalusia), scossa forte durata parecchi minuti (Perrey, l. c. t. XXIV).

1868 aprile 22. Alle 6 ant. a Granata scossa breve e leggera (Perrey, l. c. t. XXIV).

1868 agosto. Terremoto nella Spagna meridionale, più forte ad Algesiras che a Gibilterra. Il centro parve presso lo Stretto (Perrey, l. c. t. XXII).

1869 agosto 18. Tra le 5 e le 6 pom. a Gibilterra ed a S. Rocco due scosse con direzione est-ovest (Perrey, l. c. t. XXIV).

1871 gennaio 28. Verso le 3 pom. terremoto in prov. di Granata, per il quale caddero parecchi fumajoli ad Alhendin ed a La Malà, e si spaccarono gli archi della Chiesa a Durcal. Sentita fortemente tanto a Granata che a Motril e leggermente a Nerja (Informazioni verbali da noi raccolte ad Alhendin ed a La Malà).

1880 ottobre 21. Alle 7 ant. in Spagna ed in Portogallo scosse di terremoto (De Rossi, *Boll. d. vulc. it.*, 1882).

1882 novembre 8. Nella Murcia scossa fortissima.

1883 in gennaio e nell' aprile. Scosse numerose nella Murcia, alcune rovinose (Giornali).

## II.

## Generalità sulla natura e sui rapporti dei fenomeni andalusi con altri fenomeni.

Se confrontiamo la storia sismica dell'Andalusia con quella delle altre regioni della penisola iberica, veniamo alle seguenti importanti conclusioni.

1° Le diverse parti della Spagna sono colpite in grado assai diverso dai terremoti: e precisamente questi sono molto più frequenti nelle regioni littorali che non in quelle interne, e più nelle meridionali che in quelle settentrionali. Infatti ecco come sono distribuiti i terremoti iberici *disastrosi, rovinosi e fortissimi* a noi noti dal 1100 in poi.

Nel Portogallo centrale e meridionale: 7 terremoti disastrosi, 8 rovinosi e 9 fortissimi.

Nell'Andalusia: 8 terremoti disastrosi, 10 rovinosi e 8 circa fortissimi.

Nella Catalogna: 3 terremoti disastrosi, 2 rovinosi e 4 fortissimi.

Nella Galizia, nel Leon, nella Nuova e Vecchia Castiglia nessun terremoto nè disastroso, nè rovinoso e solo alcuni pochi fortissimi. Nè si creda che questa ineguale distribuzione dei terremoti possa dipendere da difetto, ossia da ineguale distribuzione delle notizie storiche; poichè non è ammissibile che se Madrid, Toledo e Valladolid avessero sofferto gravi danni dai terremoti, la storia non ce ne abbia conservate notizie, come fece per Malaga, Granata, Cordova, ecc., città non più importanti delle prime.

Se si riflette che nel Lisbonese, nell'Almeria, nella Murcia e nella Catalogna sono sviluppate assai le rocce vulcaniche recenti terziarie e posterziarie, e che l'Andalusia, sebbene ne sia priva, confina però con regioni dove queste rocce abbondano, come sono il Capo di Gata, la Sierra Santa Maria; possiamo conchiudere che le regioni della penisola iberica più colpite dai terremoti: 1° sono prossime al mare; 2° sono vicine a centri vulcaniçi spenti da poco tempo.

In condizioni topografiche simili a queste si trovano pure le altre regioni europee più tormentate dai terremoti, cioè l'Italia centrale e meridionale, l'Arcipelago greco, l'Anatolia ecc.

Noi, adottando la classificazione dei terremoti proposta dallo Stoppani (1), chiameremo *perimetrici* questi terremoti, che scuotono regioni prossime al mare e non vulcaniche, ma vicine a vulcani attivi o spenti da non molto tempo.

Forse i terremoti disastrosi e relativamente localizzati di Olot e Castelfollit avvenuti nel secolo XV sono terremoti *vulcanici propriamente detti,* ossia hanno per centro i focolari stessi dei vulcani spenti di quelle regioni.

Anche le scosse molto localizzate e frequentissime di Torrevieja sono o di natura vulcanica o dovute a ripetuti sprofondamenti sotterranei.

2° La distribuzione topografica e cronologica dei terremoti iberici rivela l'esistenza di diversi centri sismici localizzati, ben distinti tra loro e indipendenti nella loro azione, sebbene non mancanti di una reciproca influenza nella loro attività. Per esempio, i grandi terremoti avvenuti negli ultimi cinquant'anni nella Spagna meridionale accennano all'esistenza di tre centri sismici distinti attorno alla Sierra Nevada. Infatti, i terremoti disastrosi del 1828 e del 1829 colpirono solamente la Murcia, non avendo cagionato nessun danno nelle vicine provincie dell'Almerìa, d'Alicante e dell'Andalusia. Nel gennaio 1883 si ebbero pure terremoti violenti e numerosi nella sola Murcia. Nel settembre 1860 e poi nel 1863 vi furono scosse numerosissime ed alcune rovinose speciali all'Almerìa, la quale fu pure il centro di disastrosissimi terremoti nel 1804. Infine, il grande terremoto del 25 dicembre 1884 poco si sentì nell'Almerìa e nella Murcia, mostrando di aver il suo centro a ovest della Sierra Nevada, nei monti compresi tra Malaga e Granata, dove ebbero pure origine i terremoti rovinosi malagheni del 1581 e del 1680.

3° Confrontando la distribuzione cronologica dei terremoti nelle diverse regioni iberiche da essi maggiormente visitate, risulta che l'attività sismica, considerata nelle sue più energiche manifestazioni, si trasportò da una regione all'altra a lunghi intervalli di tempo. Per esempio nel secolo XV i terremoti infuriarono nella Catalogna, rimanendo tranquille le provincie meridionali della Spagna e del Portogallo. Nel secolo XVI invece il Portogallo, l'Andalusia e l'Almerìa sono tormentate dai terremoti, mentre nella Catalogna non vi sono che scosse di poca importanza. Nel secolo XVIII il Portogallo è scosso da disastrosissimi terremoti, mentre l'Andalusia orientale, l'Almerìa, la Murcia e la Catalogna sono relativamente tranquille. Infine nel secolo attuale la calma è ritornata nel Portogallo e le burrasche sismiche infuriano nell'Andalusia, nella Murcia e nell'Almerìa. Ma anche l'attività sismica di questi tre centri relativamente vicini non fu contemporanea. Infatti il massimo sismico fu per l'Almerìa nel 1804, per la Murcia nel 1828-1829, per l'Andalusia nel 1884-1885.

4° Un fatto molto caratteristico dei terremoti della Spagna meridionale è il gran numero di scosse minori, che di solito seguono e qualche volta anche precedono la scossa massima di ciascun *periodo sismico.* Dopo il terremoto andaluso del 1170, le scosse si replicarono per 3 anni. Nella Murcia dopo la scossa rovinosa del 15 settembre 1828, seguirono 300 repliche in 24 ore, e poi scosse frequentissime per più di un anno. In Almerìa si replicarono scosse numerosissime dopo le scosse rovinose del 22 settembre 1860 e del 10 giugno 1863.

(1) *Corso di Geologia* t. I, pag. 436.

In questi periodi sismici non è costante la posizione della scossa *massima* del periodo rispetto alle altre. In generale il periodo sismico si apre con la scossa massima, preceduta però da qualche piccola scossa (1); seguono molte scosse minori, poi dopo pochi mesi ricomincia sulla medesima area un secondo periodo sismico, il quale si apre con una scossa che può essere anche maggiore della *massima del primo periodo,* e talvolta preceduta pure da piccole scosse. Questi periodi sismici doppî, ossia questo succedersi di due periodi sismici (de' quali il secondo è il più forte) a breve distanza di tempo sulla medesima area si verificò nell'Andalusia nel 1356-1357, nel 1522-1523, nel 1679-1680; nell'Almerìa (e nella parte più orientale dell'Andalusia) nel 1804, gennaio 13 ed agosto 25, nel 1860-1863; infine nella Murcia nel 1822-1823 nel 1828-1829.

5° Considerando la distribuzione cronologica dei terremoti in una data regione della Spagna, ovvero in tutta la penisola, non si scorge nessun ritorno periodico preciso dei massimi, nè decennale nè di altra natura, eccettuato però un certo ritorno approssimativamente secolare, bisecolare, o trisecolare. Per esempio tutti i grandi terremoti disastrosi del Portogallo dal 1300 in poi avvennero nei tre periodi 1344-1356, 1531-1550, 1722-1755; i quali distano il primo dal secondo di 175 anni, il secondo dal terzo di 172 anni. Nell'Andalusia orientale gli ultimi cinque massimi sismici principali (1581, 1680, 1786-1790, 1884) ritornarono a periodi poco differenti da un secolo. Nella storia dei terremoti andalusi c' incontrammo in un sol caso (nel gennaio 1804) in cui le repliche d'un periodo sismico si succedettero con un certo ritmo, cioè approssimativamente ogni tre ore per due giorni.

6° Confrontando la data dei terremoti iberici, notati nel catalogo generale del signor Perrey, colle stagioni, troviamo una preponderanza nell'autunno e nell' inverno in confronto dell'estate e della primavera. Infatti abbiamo:

Autunno (settembre, ottobre, novembre) terremoti n. 57
Inverno (dicembre, gennaio, febbraio) terremoti n. 53
Primavera (marzo, aprile, maggio) terremoti n. 43
Estate (giugno, luglio, agosto) terremoti n. 50

E complessivamente tra inverno e autunno n. 110 terremoti e tra estate e primavera n. 93.

Da un simile confronto fatto con terremoti dell'Andalusia e dell'Almerìa, notati nel nostro precedente *catalogo*, ci risulta che 152 giorni di scosse sono così distribuiti:

n. 47 nell'autunno
n. 46 nell' inverno
n. 27 nella primavera
n. 34 nell'estate.

Per cui tra inverno e autunno vi furono 93 giorni di scosse, mentre tra primavera ed estate solo 61.

7° Come abbiamo visto che i massimi sismici delle diverse regioni della penisola iberica alternano tra loro ad intervalli di tempo più o meno lunghi,

(1) Il medesimo fatto si verifica nei grandi terremoti italiani. Vedi: G. Mercalli, *Vulcani e fenomeni vulcanici in Italia,* pag. 342.

similmente troviamo che essi non coincidono, ma alternano coi massimi sismici italiani. Talora un massimo sismico spagnuolo dista di pochi mesi da massimo endogeno italiano. Così accadde nel 1785-1786, nel 1804-1806, nel 1822-1823, nel 1828-1829, nel 1883-1884. Più generalmente però l' intervallo tra i massimi sismici spagnuoli e quelli italiani è di parecchi anni; e ciò principalmente se si considerano i *massimi dei massimi*. Infatti negli ultimi secoli questi massimi sismici più notevoli si verificarono per l'Italia:

nel 1687-1688, nel 1693-1695, nel 1702-1703 nel 1729-1733,
nel 1781-1791, nel 1831-1832, nel 1835-1837 (1);

per la Spagna:

nel 1680, nel 1721-1722, nel 1755-1757,
nel 1802-1806, nel 1828-1829, nel 1860-1863, nel 1883-1885.

Sopratutto poi è notevole che il secolo XVII, mentre segna il *minimo* di attività sismica per la Spagna, è il secolo di *massima* attività endogena, sismica e vulcanica per l'Italia.

---

# PARTE TERZA

## I RECENTI TERREMOTI ANDALUSI (2).

### I.

### Forma, estensione e divisione in zone dell'area del terremoto.

L'area d'un terremoto suole essere divisa in diverse zone, dette *zone isosismiche*, in ciascuna delle quali il fenomeno si sentì con differente intensità. Chiameremo col Mallet *zona mesosismica* l'area di *massima intensità*, la quale di solito occupa una posizione centrale od almeno interna rispetto alle altre zone isosismiche.

*Area mesosismica.* — Quest'area nel terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 comprende tutti i paesi dove esso fu disastroso. Essa è un'ellisse, il cui asse maggiore misura circa 65 chilometri da Alfernatejo a Murchas, e l'asse minore circa 45 da Valez-Malaga al Turro (presso Cacin); ed ha quindi un'area di 2295 chilometri quadrati circa.

(1) Vedi G. Mercalli, op. cit. pag. 355. Tra questi massimi sismici italiani non mettiamo il 1883 perchè il grande terremoto ischiano del 28 luglio è un fenomeno vulcanico, e non trovò eco sulla penisola italiana con terremoti perimetrici di molta importanza.

(2) A. F. Nogués, *Les tremblements de terre du 25 déc. 1884 en Andalucie*, nella Nature di Paris 17 jan. e 7 fév. e 11 Avril. — E. Hebert, *Sur les trembl. de terre du midi de l'Espagne*, Compt. Rendus de l'Acad. de Paris 5 jan. 1885. — L. Gatta, *I terremoti di Spagna*, Nuova Antologia, 15 febbraio 1885. — G. Mercalli, *I grandi terremoti iberici*, Rassegna nazionale, aprile 1885. — *Cronica de los terremotos de Andalucia*, número extraordinario de la Cronica comercial de Barcelona, febrero 1885. — José Macpherson, *Los terremotos de Andalucia*, conferencia leida en febrero 1885 en el Ateneo de Madrid. — Rafael Garcia Alvarez, *Los terremotos de las provincias de Granada y Malaga*, nel Porvenir di Granata del 25 jenero 1885. — Don Federico de Botella, *Los terremotos de Malaga y Granada*, Madrid 1885. — Domingo de Orueta y Duarte, *Informe sobra los terremotos*

Questa ellisse è attraversata verso il mezzo e nel senso del suo asse maggiore dalle sierre Marchamona, Tejeda (2154 m.), Almijara (1831 m.) e di Las Guajaras. Le località scosse più violentemente sono situate sui due versanti settentrionale e meridionale di questa catena montuosa e quasi tutti a notevole altezza.

La forma generale dell'area mesosismica, non allontanandosi molto dalla circolare, fa argomentare anzitutto che il movimento sismico siasi propagato da un centro, irraggiando in tutti i sensi. Siccome però questo centro è situato, come dimostreremo più innanzi (v. tav. II), presso il foco occidentale dell'ellisse tra Zafarraya e Jatar, se ne argomenta pure che il movimento sismico si è propagato più facilmente verso est; mentre verso ovest a soli 12 chilometri da Zafarraya (ad Alfernate) il terremoto fu *rovinoso* ma non *disastroso* (1).

Questa forma dell'area mesosismica trova una spiegazione nella costituzione geologica della regione. Infatti ad est dell'epicentro presentano un enorme sviluppo gli schisti e i calcari cristallini paleozoici estendendosi fino alla valle del Guadalfeo. Orbene, è naturale che nella massa uniforme e compatta di queste profonde rocce cristalline il movimento sismico abbia a propagarsi facilmente, senza molte perdite e deviazioni. Invece ad occidente dell'epicentro, essendo le rocce cristalline antiche ricoperte da terreni giuresi, cretacei e eocenici, costituiti da rocce diverse, in generale meno omogenee e meno elastiche di quelle cristalline, è chiaro che il movimento sismico perderà rapidamente d'intensità per le difficoltà che incontra nel propagarsi, e verrà deviato per frequenti riflessioni e rifrazioni ogni volta che passa da una roccia ad un'altra di diversa densità.

La causa poi della forma generale ellittica dell'area mesosismica è in primo luogo la forma allungata dell'epicentro; in secondo luogo il fatto che nella Sierra Tejeda ed Almijara la direzione generale degli strati è ovest-nord-ovest; per cui il movimento sismico si propagò più facilmente in senso parallelo alla direzione stessa degli strati che non perpendicolarmente ad essi.

*Zona isosismica rovinosa.* — Questa zona comprende tutte le località dove il terremoto fece rovinare alcuni edificî ma in generale non totalmente, e non vi furono vittime umane. La forma di questa zona è pure un'ellisse coll'asse maggiore, diretto presso a poco est-ovest, di 115 chilometri circa di lunghezza. Termina ad ovest con Cartama, ad est con Orgiva, a nord con Loja e a sud è aperta, estendendosi in mare.

Questa curva non è concentrica a quella mesosismica, perchè contrariamente ad

*occuridos en el sud de Espana en dic. de 1884 y evero 1885*, Malaga 1885. — *Terremotos de Andalucia*, Informe de la Comision nombrada para su estudio dando cuenta del estado de los trabajos en 7 marzo de 1885. — M. Fouqué, *Explorations de la Mission chargée de l'étude des trembl. de terre de l'Andalusie*, Comptes Rend. de l'Acad. de Sc. de Paris, 20 avril 1885. — T. Taramelli e G. Mercalli, *Relazione preliminare sulle osservazioni fatte durante un viaggio nelle regioni della Spagna colpite dagli ultimi terremoti*, Rend. R. Accademia dei Lincei di Roma, 10 e 12 giugno 1885. — M. S. De Rossi, *Gli odierni terremoti in Spagna ed il loro eco in Italia*, Bull. del vulc. italiano, Roma, marzo 1885. — Cesareo Martinez, *Los temblores de terra*, Malaga, 1885.

(1) Nella nomenclatura usata comunemente dai sismologi moderni italiani, un terremoto si chiama *disastroso* quando c'è rovina di molti fabbricati e vittime, *rovinoso* quando c'è caduta parziale o totale di pochi edificî; *fortissimo* quando ci sono lesioni nei fabbricati, ma non gravi.

essa si sviluppa maggiormente ad ovest, e specialmente a sud-ovest, che non verso est. Pare che ad oriente, in corrispondenza all'alta valle del Guadalfeo, il movimento sismico abbia trovato un ostacolo alla sua propagazione nella Sierra Nevada. Abbiamo visto infatti che in essa la direzione degli strati cristallini azoici è quasi perpendicolare a quella delle formazioni stesse nell'area mesosismica; e di più che esiste una diversità d'inclinazione degli strati mesozoici ed eocenici nei due versanti dell'alta valle del Guadalfeo. Orbene, facilmente s'intende come in primo luogo questo brusco cambiamento di direzione negli strati possa essere accompagnato da fratture sotterranee, le quali si oppongono alla propagazione delle onde sismiche, meno il caso in cui la direzione di questa sia parallela a quella della frattura. In secondo luogo, il cambiamento di natura delle rocce e la differenza di direzione negli strati facciano deviare e ritornare indietro parte del movimento per fenomeni di riflessione. Questi movimenti, rimbalzati dalle rocce dell'alta valle del Guadalfeo, forse contribuirono a rinforzare ed a rendere più disastroso il terremoto verso l'estremità orientale della zona mesosismica.

*Zona isosismica fortissima.* — Questa zona è simile per la forma alla precedente; poichè come questa presenta uno sviluppo maggiore verso l'occidente, dove si spinge fino a Osuna, Cordova ad a Siviglia, mentre ad oriente termina prima di Almeria; a nord si stende fino a Jaen e a sud fino a Estepona. Naturalmente i paesi di questa zona più vicini a quella *rovinosa,* soffrirono maggiormente di quelli che si trovano al confine esterno di essa. A Granata, per esempio, l'intensità del terremoto fu tale che la maggior parte degli orologi da parete si fermarono, e cagionò lesioni agli edificî molto più notevoli che a Cordova e a Siviglia.

Verso sud-ovest il terremoto mantenne una certa forza, in modo da lesionare gli edificî nell'attraversare la sierra di Mijas e Bermeja. Al di là invece di queste montagne, per esempio a Gibilterra, non produsse quasi nessun danno [1]. La ragione di questo rapido decrescimento degli effetti dinamici del terremoto, passando da Estepona a Gibilterra, sta in ciò che nella valle del Guadajaro si sviluppano bensì terreni sedimentarî simili a quelli, che costituiscono altrove quest'area isosismica; ma tra essi e gli schisti paleozoici si stende la grande formazione serpentinosa della Serrania di Ronda, compresa fra banchi di rocce schistose; la quale eterogeneità di formazione, è facile comprendere come possa diminuire l'intensità del movimento sismico che le attraversa. Si aggiunga che Estepona è sul terreno pliocenico e Gibilterra sul calcare mesozoico, sul quale, a parità di circostanze, gli effetti dinamici del terremoto sono sempre meno sensibili che sul primo.

Lo sviluppo maggiore dell'area isosismica fortissima è nella direzione nord-ovest (tra Siviglia e Cordova), forse perchè ivi il movimento sismico incontrò un terreno più uniforme e meno dislocato che nelle altre direzioni. Giunta però al Guadalquivir, la zona fortissima cessa un po' bruscamente col generale mutamento che ivi presentano la direzione e la natura delle formazioni geologiche.

Fuori dell'Andalusia il terremoto del 25 dicembre si avvertì sensibilmente, senza però arrecare nessun danno, fino a Madrid e a Segovia verso il nord, fino a

[1] È notevole che anche il grande terremoto malagheno del 1581 fece sentire la sua violenza fino a Estepona e non fino a Gibilterra (v. sopra pag. 151).

Huelva, a Cárceres ed a Lisbona verso ovest, fino a Valenza ad est e fino al mare verso sud. Nella parte più settentrionale della penisola, per esempio in Catalogna, il fenomeno non venne avvertito (1). Ad Almaden, dove sono le famose miniere di cinabro, profonde 312 metri, la scossa fu abbastanza sensibile alla superficie, ma passò inavvertita nelle gallerie. A Madrid in alcuni posti della città il movimento fu sufficiente a far arrestare i pendoli di alcuni orologi; in altre parti della città, per esempio al r. Osservatorio astronomico fu meno sensibile. Nel teatro regio fuvvi grande spavento e s' interruppe la rappresentazione per un quarto d'ora.

In mare non si sa che alcuno abbia sentito il terremoto. Bisogna però notare che ben poca gente doveva trovarsi nelle acque tra l'Andalusia e l'Africa verso le 9 pom. del giorno di Natale. Anche sul vicino continente africano non ci consta che il movimento sia stato avvertito. Per il che l'area entro cui il terremoto fu sensibile è di circa 450 mila chilometri quadrati.

Fuori di Spagna si sentirono leggere scosse a Zernetz (Svizzera) verso le 11 pom. del 25 dicembre; ma evidentemente esse sono indipendenti dal terremoto andaluso. A Roma il professor De Rossi alle 10,15 pom. trovò al tromometro ondulazioni di eccessiva ampiezza, ed a Velletri gli istrumenti delicatissimi del prof. Galli segnarono una leggerissima scossa alle 10 pom. dello stesso giorno. Può essere che questi movimenti si sieno propagati fino dal centro sismico andaluso; ma chi può assicurarlo, quando si pensa che il medesimo prof. Galli notò a Velletri 104 scossette dal giorno 25 al 31 gennaio 1885, cioè in soli 7 giorni? La coincidenza potrebbe essere casuale (2). Con questo non intendiamo di negare qualunque rapporto tra i moti sismici andalusi e quelli dell'Italia centrale, come spiegheremo meglio più avanti, parlando *dei fenomeni concomitanti*. Anche le piccole perturbazioni, osservate negli apparati magnetici di Greenwich e di Willemshafen (3), ci sembrano fenomeni troppo isolati per potere concludere con certezza che siano veramente l'effetto dell'arrivo del movimento sismico andaluso fino a quei punti; mentre non si osservò la minima alterazione nelle curve magnetiche registrate dagli istrumenti pure delicatissimi del r. Osservatorio astronomico di Madrid, e dai numerosi osservatorî astronomici d'Italia e di Francia molto più vicini al centro di scuotimento (4).

(1) È notevole che anche il grande terremoto di Lisbona del 1 novembre 1755 non fu sentito in Catalogna. In Galizia però si sarebbe sentita la scossa del 24 dicembre (Cronica Comercial de Barcelona, febrero 1885). Forse in Catalogna non giunsero i movimenti sismici del 1755 e del 1884, perchè in quest'angolo nord-est della Spagna, tutte le catene montuose cambiano bruscamente la loro generale direzione.

(2) In questo dubbio veniamo confermati dall'esame delle ore in cui si avvertirono le scosse, come vedremo più avanti.

(3) F. Fouqué, *Explorations* ecc. pag 2.

(4) La Cronica commercial di Barcelona (febrero 1885) riferisce che, secondo il *Romsdals Budstikke* de Molde, il terremoto si sentì fino in Norvegia, essendosi esperimentata uno trepidazione nel paese di Lesjeskogen. Questi leggeri ed isolati movimenti sono da ritenersi, come quelli di Zernetz, di Greenwich e di Willemshafen, dipendenti da fenomeni locali. Se realmente il movimento sismico andaluso avesse attraversato tutta l'Europa, si sarebbe reso sensibile almeno in più di quattro punti!

## II.

## Descrizione della scossa disastrosa del 25 dicembre.

### 1. *Forma della scossa.*

#### a) *Nell'area mesosismica.*

Riporteremo colle parole stesse con cui ci vennero raccontate dai testimoni oculari le notizie della prima scossa.

A Ventas de Zaffaraya si sentì un rombo forte come tuono, e mentre esso perdurava sopraggiunse un violento sussulto cominciato con una brevissima oscillazione, poi una pausa di 1′ a 2″, infine un'ondulazione più forte del sussulto, sicchè le persone non potevano reggersi in piedi senza appoggiarsi. Il doppio movimento durò complessivamente 12″. Nella notte replicarono molte scosse precedute da rombo, il quale si sentì varie volte con grande spavento della popolazione, anche senza essere accompagnato da movimento sensibile del suolo. La componente verticale del movimento fu molto forte: tanto che un muro venne lanciato fuori dalle fondamenta profonde 40 centimetri (1).

Il canonico Blanchard di Jatar ci disse che ivi si avvertì pure il rumore sotterraneo come di carri in movimento, poi la trepidazione, poi l'oscillazione, per la quale si vide il suolo muoversi sensibilmente come le onde del mare. Il fenomeno durò complessivamente 50″.

Ad Alhama, ad Arenas del Rey e ad Albuñuelas il rombo sotterraneo, la trepidazione e l'ondulazione si succedettero pure nel medesimo ordine. A Jaena invece il movimento anche nella seconda fase della scossa parve prevalentemente sussultorio (2).

A Cacin il rombo sotterraneo somigliò a quello di carriaggi in movimento, e la scossa, secondo che parve al parroco, presentò tre fasi, la prima ondulatoria (cominciata leggermente e contemporaneamente al rombo), la seconda sussultoria, la terza di nuovo ondulatoria, ambedue più energiche della prima. Durarono circa 15 secondi.

Anche attraversando la Sierra Tejeda il movimento sismico non si alterò molto, poichè a Periana, ad Alcaucin, a Canillas d'Aceituno, a Competa, a Sedella, a Velez-Malaga si sentì da per tutto prima il rombo, come tuono, poi la trepidazione infine l'ondulazione, separata dalla prima da alcuni secondi di pausa (3), e più violenta di essa. Si videro gli oggetti saltare ad una certa distanza. A Velez però alcune persone avvertirono prima il movimento ondulatorio, poi dopo quello sussultorio. Ivi complessivamente il fenomeno durò da 15″ a 20″. A Velez il sussulto fu così violento da piegare leggermente alcune colonne in ferro di circa 1 dm. di diametro.

Ad Algarrobo la scossa fu pure duplice, ma parve ondulatoria in ambedue le fasi. Anche a Sedella, secondo le informazioni raccolte dal signor Orueta, le due fasi della scossa furono ondulatorie (4).

(1) *Informe* ecc. pag. 57.
(2) Dom. de Orueta, op. cit. pag. 36.
(3) A Canillas d'Aceituno non venne avvertita questa pausa.
(4) D. Orueta, op. cit. pag. 18 e 22.

b) *Nell'area isosismica rovinosa.*

Anche in tutta l'area isosismica rovinosa la prima scossa del 25 dicembre mantenne i caratteri testè descritti, eccettuata l'intensità minore e il graduale decrescimento del moto sussultorio in confronto dell'ondulatorio (1).

A Nerja e ad Almuñecar prima fuvvi il sussulto, misto però a movimento ondulatorio, poi uno o due secondi di pausa, poi l'ondulazione più forte del sussulto. A Lenteje l'olio d'un lumino venne lanciato in aria fino a due metri di altezza, in direzione un poco inclinata verso sud-est.

Anche ad Alhendin e a Durcal si avvertì distintamente prima il sussulto, poi un istante di pausa, poi l'ondulazione più lunga e più forte del sussulto, il quale tuttavia ebbe una certa violenza, poichè ad Alhendin una statuetta saltò fuori da una piccola punta dove stava infissa sur un altare della chiesa e a Durcal il saliscendi della porta escì fuori dal gancio e la porta si aperse.

A Colmeñar ed a Riogordo dopo il rombo sotterraneo, venne la trepidazione, poi, dopo un istante di pausa, l'ondulazione più violenta della trepidazione (2). A Colmeñar un signore, che stava giuocando al bigliardo, al principio della scossa vide saltare le palle sul piano di questo.

A Malaga il terremoto risultò di due scosse, separate da un brevissimo intervallo di riposo. Il sig. Orueta, il sig. Cesareo Martinez e altri asseriscono che ambedue le scosse furono ondulatorie. Invece, secondo il sig. dott. E. Villalobes (che, trovandosi in istrada, era in una condizione migliore per avvertire bene il fenomeno) il terremoto incominciò con un movimento leggero non distintamente nè ondulatorio, nè sussultorio, seguì una pausa, poi venne una scossa sussultoria, poi, dopo una seconda pausa, un'ondulazione. Anche il signor ing. Jona ritiene che le scosse sieno state tre separate da due brevissime pause. Il terremoto venne preceduto immediatamente da forti rumori sotterranei (dott. Villalobes). Ad alcuni parve più lunga la prima, ad altri la seconda fase della scossa.

Nel Collegio dei rev. padri Gesuiti del Palo, lungi pochi chilometri da Malaga, il terremoto cominciò con un rumore simile a quello di forte tempesta, a cui seguì un movimento sussultorio, che andò crescendo poi diminuendo fino a sembrare che cessasse (senza che realmente cessasse del tutto), riprese in seguito il moto ondulatorio che andò pure crescendo e poi diminuendo d'intensità. Nei vasi si vide l'acqua prima saltare poi riversarsi.

A Totalan alcuni non avvertirono il rombo ma solo il sussulto seguìto dalla ondulazione. A Cartama, secondo il parroco, al rombo sotterraneo seguì il movimento di trepidazione, ed in seguito quello di ondulazione diretto prima in un senso poi in un altro normale al primo. Altre persone invece, pure presenti alla catastrofe in diversa parte del paese, assicurano di avere sentito prima il movimento ondulatorio e poi quello di trepidazione.

(1) A Canillas d'Aceituno non venne avvertita questa pausa.

(2) Ad Archidona le tre fasi della scossa si succedettero nel medesimo ordine, ma la trepidazione parve ad alcuni più forte dell'ondulazione.

Possiamo dunque concludere che il grande terremoto del 25 dicembre si sentì nei diversi punti dell'Andalusia con intensità varia, ma con forma quasi costante. Dapertutto precedette il rombo sotterraneo, seguì immediatamente il moto misto di sussulto e di ondulazione, e poi, dopo una pausa di qualche secondo, in cui il movimento non cessò totalmente, ma divenne assai debole (1), sopraggiunse il movimento laterale od ondulatorio, in generale più forte e più lungo del primo. Quelli che si trovarono in migliori condizioni per osservare il fenomeno notarono che la prima fase sussultoria della scossa cominciò con un movimento leggero e non decisamente sussultorio (2), che alla maggior parte degli Andalusi passò inosservato. Percepì molto distintamente questa prima fase della scossa il signor parroco di Cacin, come si vede nella fig. 12, tav. IV, nella quale abbiamo riprodotto graficamente la forma della scossa nelle località dove ci venne descritta con maggiore esattezza. Da questi diagrammi si rileva pure che tanto nel primo periodo come nel secondo della scossa, l' intensità del movimento fu prima crescente fino a raggiungere un massimo, poi decrebbe.

c) *Fuori dell'area isosismica rovinosa.*

A Granada, a Güevejar, ad Alhaurin el Grande ecc., ed in genere, nei paesi più prossimi alla zona isosismica rovinosa, la forma della scossa non subì notevoli cambiamenti, oltre la diminuzione della intensità. Ecco, per esempio, come si sentì in Granata: « Erano le 9 e 10 pom., scrive un redattore del *Defensor* di Granata, noi ci trovavamo nella nostra redazione, e, all' improvviso sentimmo un rumore sordo e prolungato, che al primo momento attribuimmo ad un movimento della macchina da stampare. Poscia comprendemmo la realtà dal tremare dei cristalli e dalle oscillazioni della lampada dello studio, che cominciò a muoversi alla guisa di un pendolo, descrivendo da sud-ovest un arco di circolo che misurava circa da 10 a 12 gradi. Il primo moto fu oscillatorio, al quale seguì l'ondulatorio, durando il fenomeno 14 o 15 secondi. Tutta la casa fu sottosopra in guisa terribile. Quando giungemmo alla porta sulla via, durava ancora il moto ondulatorio. Sulla piazzetta c'erano varî gruppi di gente, fuggiti dalle case; alcuni emettevano strazianti grida, aumentando la naturale confusione prodotta dal fenomeno. Un confuso clamore, quasi, come il rumore del mare, si alzava dalla città ».

Allontanandosi maggiormente dal centro di scuotimento, il terremoto oltre diminuire d' intensità, perdette rapidamente la forma sussultoria, la quale in alcuni luoghi seguì invece di procedere il movimento ondulatorio. Ad Osuna, per esempio, ci dissero aver sentito il rombo sotterraneo, poi l'ondulazione ed infine la trepidazione. A Siviglia si sentirono due scosse separate da alcuni minuti secondi di intervallo. La prima fu ondulatoria; la seconda fu più forte della prima, e, secondo alcuni, terminò con trepidazione. A Cordova si avvertirono pure due scosse ondulatorie, divise da alcuni istanti di intervallo, e precedute immediatamente da rombo sotterraneo. Tanto a Siviglia che a Cordova, l' intervallo fu più lungo che nelle località vicine al centro di scossa.

(1) Questo ci venne attestato tra gli altri dal prof. Cavallero del Collegio del Palo (Malaga). È naturale che alla generalità delle persone sia parso come pausa o riposo un movimento leggero compreso tra due scosse violentissime.

(2) O per lo meno non percepito come tale per la sua relativa piccolezza.

Finalmente al di fuori dell'Andalusia, dove il terremoto non cagionò nessuna lesione neppure leggera agli edificî, la scossa fu solamente ondulatoria, non più distinta in due fasi e non preceduta da rombo. In tal modo, almeno per quanto ci è noto, si avvertì il fenomeno a Gibilterra, a Cadice, a Huelva, ad Almeria, ad Alicante, ad Almaden, a Madrid, a Segovia, a Valenza ecc. A Madrid, per esempio, il signor direttore dell'Osservatorio astronomico di San Fernando, trovandosi in camera solo ed in perfetta quiete, non avvertì altro che 3 o 4 oscillazioni di un candeliere situato sul tavolo, innanzi al quale stava seduto.

### 2. *Rombo sotterraneo.*

Quasi tutte le persone da noi interrogate cominciarono il racconto del terremoto col dire che anzitutto si sentì un *ruido espantoso*. Solo fuori dell'area danneggiata questo mancò.

Il rombo sotterraneo precursore venne paragonato a *cannonate* (ad Arenas del Rey, ad Jaena, ad Alhendin), a *carri in movimento* (ad Jatar, a Cacin, a Frigiliana. ad Alfernate, a Nerja, a Cartama, a Cordova), ad un *tuono lontano* od al rumore di *lontana tempesta* (a Ventas de Zafarraya, ad Alhama, ad Alcaucin, a Canillas d'Aceituno, a Colmeñar, a Totalan, a Malaga, al Palo ecc). È però da avvertirsi che in alcune località il rombo precursore parve ad alcuni lo sparo di cannonate, ad altri un tuono lontano, ad altri il rumore di carri in movimento.

Dopo la prima scossa, si avvertirono movimenti del suolo senza rombo, ovvero rumori sotterranei non accompagnati da scosse sensibili, come accadde, per esempio, ad Arenas del Rey, a Ventas de Zafarraya, a Frigiliana, a Velez-Malaga, al Palo ecc.; ma in generale le scosse furono accompagnate da rombo sotterraneo, il quale fu, come nella prima scossa sempre anteriore al movimento, ovvero in parte contemporaneo. Questa anteriorità del rumore sotterraneo bastò perchè molti avessero tempo di domandare a se stessi od alle persone con cui si trovavano, che mai fosse quello straordinario rumore, prima che cominciasse a rendersi sensibile il movimento del suolo. Così ci attestarono al Palo, presso Malaga, il prof. P. Cavallero, a Colmeñar il rev. parroco, a Malaga il sig. dott. Villalobes, a Cartama il rev. parroco. Si può quindi ritenere che in queste località il suono sia giunto almeno alcuni secondi prima della scossa.

Possiamo dunque concludere che nel presente terremoto la velocità di propagazione del suono nella crosta terrestre fu in tutte le direzioni maggiore della velocità di propagazione del moto sismico. In nessun luogo però si fecero osservazioni precise sul numero di secondi, di cui il suono giunse prima del movimento; sicchè non si potè averne dati esatti sul rapporto della velocità di propagazione dei due fenomeni; tanto più che nel presente terremoto non si ebbero neppure dati sufficienti per determinare la velocità di propagazione della scossa, come vedremo tra poco.

### 3. *Durata della prima scossa.*

Ci fermiamo alquanto sulla durata del terremoto, perchè essa è sempre un elemento molto difficile a determinare nei grandi terremoti, nei quali lo spavento toglie ai più la tranquillità necessaria per valutare la lunghezza del fenomeno.

Ecco anzitutto i dati raccolti da noi o da altri a questo proposito.

| | | |
|---|---|---|
| Ventas de Zafarraya | 12″ (senza il rombo) | nostre informazioni. |
| Jatar | 20″ (col rombo 50″) | » » |
| Alhama | 20″ | Orueta, op. cit. |
| Jaena | 25″ | » » |
| Albuñuelas | 20″ | nostre inform. |
| Cacin | 15″ | » » |
| Periana | 20″ | » » |
| Colmeñar | 15″ | » » |
| Velez-Malaga | 15″ a 20″ | nostre inform. |
| Sedella | 15″ | Orueta, op. cit. |
| Competa | 15″ | » » |
| Canillas d'Aceituno | 16″ | » » |
| Salares | 12″ | » » |
| Sayalonga | 20″ | » » |
| Algarrobo | 20″ | » » |
| Nerja | 20″ | nostre inform. |
| Totalan | 14″ a 16″ | nostre inform. |
| El Palo | 30″ (senza il rombo) | nostre inform. |
| Malaga | 3″ | Cesareo Martinez, op. cit. |
| | 8″ | Commissione spagnola |
| | 18″ a 20″ | dott. Villalobes |
| | 20″ | Orueta, op. cit. |
| Durcal | 15″ | nostre inform. |
| Nigüelas | 40″ | Commissione spagnola |
| Lanjaron | 16″ | » » |
| Motril | 16″ a 20″ | » » |
| Alhendin | 15″ | nostre inform. |
| Granada | 8″ | prof. Garcia Alvarez |
| | 15″ | nostre inform. |
| Antequera | 30″ | Commissione spagnola |
| Siviglia | 14″ a 15″ | nostre inform. |
| Albuñol (Almeria) | 10″ a 12″ | Commissione spagnola |
| Guadix | 15″ | » » |
| Osuna | 8″ a 9″ | nostre inform. |
| Jaen | 4″ | Commissione spagnola |
| Huelva | 8″ | » » |
| Ciudad Real | 4″ a 6″ | » » |
| Cazorla | 8″ | » » |
| Madrid | 3″ a 4″ | » » |

Per quanto vogliansi ritenere come inesatti ed incerti i dati precedenti, si vede però che essi sono abbastanza concordanti in questo che la durata della prima scossa (compreso il rombo precursore) fu in media di 15 a 20 secondi in tutta l'area danneggiata gravemente o leggermente, ed invece di pochi secondi in tutta l'area

non danneggiata ossia più lontana dal centro di scuotimento. Infatti la media della durata in 25 località dell'area danneggiata è di circa 20 secondi; invece la media della durata in 5 località fuori dell'area danneggiata è di 5″ a 6″. Risulta pure che gli effetti dinamici e disastrosi del terremoto non furono proporzionali alla durata, poichè si vede che questa entro tutta l'area danneggiata variò poco, ed in ogni modo le sue variazioni non mostrano nessun rapporto costante colle variazioni degli effetti disastrosi. Per esempio, a Malaga ed al Palo il terremoto fu più lungo che a Ventas de Zafarraya, dove fu più rovinoso.

Ammettendo circa 20″ per la media durazione della prima scossa nelle località danneggiate, ci scostiamo notevolmente dall'opinione della *Comissione spagnola* (1), del prof. Cesareo Martinez (2) di Malaga e di altri, i quali la ritengono molto più breve cioè di soli 3 o 4 secondi. È quindi necessario esporre le prove della nostra asserzione. Al quale scopo riferiremo quello che parecchie persone degne di fede ci attestarono di aver fatto durante la scossa, essendo questo il modo migliore per conoscerne indirettamente la durata.

Il rev. sig. parroco di Colmeñar stava all'uscio di una casa per escire in istrada, sentì un forte rumore, temette fosse una tromba di terra, poi sentì il suolo muoversi sotto ai piedi, mentre attraversava la via. Arrivato alla propria casa, discosta 7 od 8 metri dalla prima, si attaccò colle mani alla ferriata d'una finestra, e vi stette alcuni istanti perchè il movimento perdurava ancora. Uno di noi ha provato a ripetere sul luogo queste operazioni, e trovò che il terremoto (compreso il rombo) dev'essere durato almeno 15″.

Il rev. signor parroco di Alhendin stava seduto in una camera a pianterreno. Sentì il rombo, ed appena cominciata la trepidazione del suolo, si levò in piedi, andò alla porta, discosta due o tre passi dalla sedia, e, mentre toglieva la barra, avvertì il movimento di ondulazione. Quando egli fu all'aperto, l'ondulazione continuava ancora, e solo allora sentì suonare la campana della chiesa, ed il terremoto finì. Tutto questo evidentemente non si può fare in meno di 15 o 20 secondi. Anche a Durcal il signor segretario comunale, che era in casa a pianterreno, avvertito il movimento, disse alcune parole, poi, cominciata l'ondulazione, escì in istrada, mentre questa ancora continuava.

Nel Collegio di Sant Estanislao al Palo (presso Malaga), il signor Rettore che trovavasi in refettorio, avvertito il terremoto, escì, attraversò un ampio cortile e salì alcune scale (3), prima che il terremoto cessasse. Uno di noi avendo provato a ripetere sul luogo la strada percorsa dal rev. p. Rettore, impiegò quasi 30″. Nello stesso Collegio il prof. Cavallero, dopo aver sentito il rombo, ebbe tempo di avvertire la scossa, portarsi istantivamente presso un muro come per ripararsi, riflettendo tra sè « este es temblor de tierra », avvisare gli alunni del suo dormitorio di stare tranquilli, essere chiamato da un prefetto del dormitorio vicino, ed infine di recarvisi prima che cessasse il terremoto.

In Malaga il signor ing. Luigi Vasconi osservò che i vetri diversamente colorati

(1) *Informe* ecc. pag. 53.
(2) Op. cit. pag. 28.
(3) Fece circa 40 passi per attraversare il cortile, e salì 4 scale di 14 gradini ciascuna.

del faro, messi in movimento da un sistema d'orologeria, al momento del terremoto avevano prodotto delle impressioni sulle lenti del faro stesso; e dall'ampiezza di tali impressioni, conoscendo la velocità del movimento dei vetri, calcolò che il movimento del suolo dev'essere durato circa 20″ (1).

Infine abbiamo un argomento indiretto per ritenere essere stata di 15″ o 20″ la durata della scossa del 25 dicembre, confrontandola con quella dell' 11 aprile (la più violenta delle repliche), la quale tutti concordemente asseriscono essere stata notevolmente più breve della prima, e tuttavia venne valutata con tutta sicurezza di 5 a 6 secondi di durata, come attestano tra gli altri il prof. Cavallero del Collegio del Palo ed il sig. ing. Jona di Malaga.

## III.

### Direzioni delle scosse e determinazione dell'epicentro.

In nessun punto si potè conoscere con esattezza la direzione della scossa per mezzo di *sismometri*, mancando questi assolutamente in tutta l'area del terremoto. Abbiamo quindi dovuto determinare tale direzione indirettamente coll'osservazione degli oggetti caduti o spostati al momento della scossa; ritenendo che per legge meccanica tali oggetti cadono, si spostano, e vengono lanciati a distanza nel piano stesso della scossa, e nella medesima direzione con cui essa procede, ovvero in direzione diametralmente opposta.

Anche dalla maniera con cui cadono le case per una scossa di terremoto si può talvolta argomentarne la direzione; poichè è noto che, a parità di altre circostanze, sotto l' impulso d'una scossa rovinano di preferenza i muri la cui direzione è perpendicolare a quella del movimento sismico; e che, quando la diagonale di un edificio rettangolare si trova nel piano della scossa, l'edificio stesso resiste maggiormente, rimanendo lesionati specialmente gli angoli, a cui termina detta diagonale. Nel presente terremoto però in pochi casi ci servì utilmente lo studio degli effetti della scossa sugli edificî, sia a motivo della pessima costruzione di questi, sia per esserci portati troppo tardi sul luogo dei disastri, quando la maggior parte delle case danneggiate erano già riattate od atterrate.

Il primo fatto di cui ci siamo accorti, esaminando le direzioni, secondo le quali vennero messi in movimento gli oggetti spostati dal terremoto, si fu che la prima scossa risultò in una medesima località da onde sismiche diversamente dirette; tra le quali però, in generale, potemmo distinguerne una più forte e dominante sulle altre, che chiameremo *scossa principale*. Essa evidentemente rappresenta il movimento proveniente con poca deviazione dal centro di scuotimento. È quindi quella che più interessa conoscere e tenere distinta dalle *scosse secondarie*, della cui origine ci occuperemo più avanti parlando del modo di propagazione del movimento sismico.

Dopo avere riassunto nel seguente *prospetto* (2) i risultati ottenuti dallo studio

(1) D. Orueta, op. cit. pag. 14.

(2) Avvertiamo che le orientazioni riportate nella tavola vennero corrette, ritenendo di circa 17° il medio valore della declinazione magnetica per l'Andalusia. Al r. Osservatorio di San Fernando (Cadice) nel 1884 la declinazione magnetica media fu precisamente 17° 16′ 1.

della direzione delle scosse, riporteremo anche con qualche dettaglio le osservazioni da noi eseguite a questo scopo per alcune delle località più interessanti.

Per cinque località da noi non visitate ci atteniamo ai dati riferiti dal signor don D. Orueta.

*Direzione della scossa del 25 decembre 1884.*

| Località | Direzione | *Osservazioni* |
|---|---|---|
| Albuñuelas | O | Scossa principale. |
| | SSO circa | Scosse secondarie (riflesse?). |
| Alcaucin | N10°E | Oggetti spostati. |
| Alhama | SSO | Forse la scossa principale fu intermedia a queste due direzioni. |
| | SO | |
| Alhendin | S50°O | Oggetti caduti e lanciati a distanza. |
| Alhaurin el Grande | NNE | Oggetti caduti. Oscillazione di una lampada. |
| Algarrobo | N | D. Orueta, op. cit. |
| Archidona | N60°O | Osservata dai professori del collegio dei rev. p.i Scolopii. |
| Arenas del Rey | O | |
| Cacin | S15°O | Scossa principale. |
| | O12°S circa | » secondaria. |
| Canillas d'Aceituno | NNE | Attestata da persone. Angolo SSO della chiesa e di alcune case staccato. |
| Cartama | ENE | Principale. |
| | N | Secondaria. |
| | N30°E | Movimento risultante dai due precedenti? |
| Colmeñar | E15°N | Oggetti spostati e caduti. |
| Competa | N | Orueta, op. cit. |
| Cordova | SE | Oggetti caduti. |
| Durcal | O15°S | Scossa principale. |
| | SO | Secondaria (riflessa?). |
| Frigiliana | N40°O | Fumaiolo rimasto inclinato. |
| Granata | SO | Attestata da diverse persone. |
| Jatar | E17N | Statue cadute in chiesa. Sostegno delle campane spostato. |
| La Malà | S50°O | Diversi oggetti caduti nella chiesa. |
| Lenteje | O30°N | Oggetti caduti. Olio d'un lumino lanciato a distanza. |
| Malaga | NE | Croci inclinate nel cimitero cattolico, ed osservata dall'ing. Jona. |
| Madrid | S | Osservata da diverse persone. |
| Nerja | NO | Scossa principale. |
| | E10°N | Secondarie. |
| | NE | |
| Nigüela | O | Fumaioli e muri caduti (C. Martinez, op. cit., pag. 49). |

| Località | Direzione | *Osservazioni* |
|---|---|---|
| Osuna . . . . . | E | Lampade oscillate. Oggetti caduti. |
| Palo (presso Malaga). | E 40° N | Comunicato dal prof. Cavallero del Collegio del Palo. |
| Periana . . . . . | NE | Principali. |
| | E 17 N | |
| | N | Secondarie. |
| | NO | |
| Riogordo . . . . . | E 40° N | Fumaioli caduti od inclinati. |
| Sayalonga. . . . . | N | D. Orueta, op. cit. |
| Salares. . . . . | N | » » |
| Sedella. . . . . | NNO | » » |
| Totalan . . . . . | N 30° E circa | Oscillazioni di una lampada. |
| Turro . . . . . | S | |
| Velez-Malaga . . . | N 22° E | |
| Ventas de Huelma. . | NE | Oggetti rimasti inclinati in chiesa. |
| Ventas de Zafarraga . | E | Oggetti lanciati a distanza. |

*Albuñuelas.* — Nella chiesa parrocchiale una statua in legno in grandezza quasi al naturale, rappresentante Jesus Resucitado, cadde a terra e si trovò a 2 metri circa lontana dal piedistallo in direzione presso a poco ovest-est. Nella stessa chiesa una campana di vetro, che stava sur un piedistallo infisso nel muro, si trovò spostata da ovest ad est, e contemporaneamente anche da nord a sud per alcuni centimetri. In alcune case private, caddero a terra oggetti da est ad ovest; e il muro di cinta del cimitero cadde tutto d'un pezzo da est verso ovest, e nella medesima direzione (o più precisamente in direzione est-nord-est ovest-sud-ovest) si vedono stesi a terra i grossi pilastri in laterizio, che facevano parte di detto muro. Presso il convento però un altro muro di cinta cadde invece verso nord, e nella corte del convento due colonne laterizie caddero quasi nord-sud.

Si vede adunque che ad Albuñuelas la *scossa principale* fu ovest-est, ma che essa venne seguìta da altre *scosse secondarie* con direzione approssimativamente sud-nord o sud-sud-ovest nord-nord-est, le quali fecero cadere i muri e gli oggetti più colpiti e barcollanti per la prima, e determinarono anche movimenti risultanti di direzione intermedia.

*Alhama.* — In alcune case private gli oggetti caddero da sud-ovest verso nord-est. Una grossa pietra di forse un metro di lunghezza cadde da un angolo della facciata della cattedrale saltando da nord 40° est verso sud 40° ovest ad alcuni metri di distanza. Nella chiesa della Madonna de las Angustias la statua della Vergine in grandezza naturale si avanzò di 2 o 3 decimetri verso nord 53° est.

La porta di un piccolo forno annesso al cimitero venne lanciata da sud-sud-ovest a nord-nord-est, e nella medesima direzione saltarono alla distanza di 1 metro e $^1/_2$ circa la croce e il capitello di un monumento mortuario in pietra. Le tombe formate da cavità aperte nel lato occidentale del cimitero si aprirono, e i coperchi di alcune

casse in esse contenute vennero lanciate verso nord-est. Nel cimitero medesimo l'angolo più lesionato è quello nord-est. Dunque le scosse principali che colpirono Alhama vennero da sud-ovest e da sud-sud-ovest.

*Arenas del Rey.* — Sul campanile di Arenas del Rey si trovarono le campane spostate una da est verso ovest, l'altra da ovest verso est. Siccome una scossa ondulatoria imprime agli oggetti un movimento doppio di va e vieni (come quello del pendolo) intorno al punto di appoggio, è facile intendere come per effetto di una medesima scossa o di una serie di scosse provenienti da un medesimo punto, gli oggetti possano essere lanciati in direzioni opposte.

*Cacin.* — L'azimut della scossa a Cacin è attestato dalle osservazioni del rev. parroco del luogo al momento del terremoto, non che dalla direzione generale che seguirono cadendo gli oggetti, i muri, i fumajoli ecc. Per esempio nella casa del maestro del paese una caffettiera appesa per un cordoncino ad un chiodo infisso nel muro, si staccò e saltò ad 1 m. e $^3/_4$ circa di lontananza da sud 15° ovest verso nord 15° est. Pare però che oltre questa, vi sieno state altre scosse secondarie dirette da ovest (forse alcuni gradi sud) verso est; poichè nella casa del maestro un quadro venne lanciato a distanza precisamente in questa direzione; e nella casa del rev. parroco, trovandosi sul tavolo una scodella contenente insalata galleggiante nell'acqua (quale si usa nell'Andalusia), dopo il terremoto si rinvenne tutta l'insalata fuori della scodella non da una sola parte di essa, ma tutto all'ingiro, senza che la scodella stessa fosse nè rotta nè capovolta. Evidentemente questo fatto non si può spiegare senza ammettere che sull'insalata abbiano agito contemporaneamente (almeno in parte) due o più scosse in diversa direzione, le quali probabilmente hanno impresso un movimento rotatorio alla scodella.

*Càrtama.* — A Cartama in una casa privata una statuetta di un altarino saltò in direzione nord 30° est alla distanza di quasi $^1/_2$ metro. Nella casa del rev. parroco un piccolo quadro appeso rimase piegato in direzione approssimata di nord-est. Il signor parroco poi attesta che durante la scossa egli vide il braciere davanti al quale stava seduto prima saltare d'alto in basso, poi dondolare in direzione est-ovest e dopo in direzione circa nord-sud. Anche in chiesa qualche oggetto cadde da sud a nord. Dunque a Cartama prima giunsero delle ondulazioni comprese tra est e nord-est, probabilmente di est-nord-est, e quindi da alcuni percepite come di est da altri di nord-est. La scossa di nord-sud è probabilmente un'onda riflessa sopra Cartama dalle rocce mesozoiche e paleozoiche che circondano da diverse parti il paese. Le due onde di est-nord-est e di nord-sud agendo contemporaneamente sopra alcuni oggetti diedero luogo a movimenti intermedî di nord 30° est circa.

*Durcal.* — Dal modo con cui caddero o vennero lanciati a distanza diversi oggetti si argomenta che la scossa principale fu ovest 15° sud. Qualche oggetto però, per esempio una scala a piuoli, venne lanciato a distanza in direzione di sud-ovest nord-est. Probabilmente la stessa scossa che colpì Albuñuelas tra sud e sud-sud-ovest giunse anche su Durcal e determinò movimenti composti di sud-ovest.

*Nerja.* — Un pezzo di lastra di marmo, spinta da sud-est verso nord-ovest a circa un metro di lontananza, e la statua della Vergine nella chiesa di las Angustias spostata di un poco da nord-ovest a sud-est, provano che la scossa principale agì

in questa direzione, secondo la quale si versò pure l'olio del lumino che stava ai piedi della statua. Alcuni oggetti però caddero verso est alcuni gradi nord, e altri da nord-est a sud-ovest. Queste scosse secondarie comprese tra nord-est ed est si possono ritenere movimenti rimbalzati dalle rocce cristalline antiche della Sierra Almijara.

*Periana.* — In questo paese potemmo constatare con sicurezza le direzioni dei movimenti ondulatorî della prima scossa, osservando il modo con cui caddero molti oggetti (almeno una trentina tra bicchieri, bottiglie, chicchere, piatti, stoviglie ecc.) posti in un armadio nella casa del signor maestro D. Josè Jonejo. Fortunatamente nessuno aveva aperto quell'armadio dopo la prima scossa di terremoto, e tanto il sig. maestro che la sua signora ci assicurarono che tutti quegli oggetti si trovarono nella posizione presa per il primo terremoto, poichè in nessuna delle repliche si spostarono sensibilmente. Orbene circa due terzi di questi oggetti caddero tutti da nord-est verso sud-ovest, od in senso opposto. Precisamente quelli del piano superiore (avendo l'armadio due piani) caddero, in generale, verso sud-ovest, probabilmente nella prima fase della scossa proveniente da nord-est, e quelli del piano inferiore caddero verso nord-est, nella seconda fase della scossa. Alcuni caddero verso est 17° nord, uno anche da ovest 28° nord ad est 28° sud. In casa del sagrestano diversi oggetti caddero press'a poco nord 30° est - sud 30° ovest, ed in chiesa qualche oggetto cadde da ovest alcuni gradi sud verso est: altri invece caddero press'a poco in direzione nord-sud.

È evidente che, meno l'ondulazione di ovest 28° nord, la quale dev'essere certamente una scossa riflessa, tutti gli altri movimenti ondulatorî compresi nel primo quadrante tra nord-est ed est sono provenienti dal centro di scuotimento con piccola deviazione. Forse nella prima fase sussultorio-ondulatoria della scossa il movimento proveniente dal centro era diretto est alcuni gradi nord; ma poi nel secondo periodo, che fu ondulatorio e più forte, sopraggiunsero le onde trasversali normali alle prime ossia dirette press'a poco nord-sud. Onde nacquero i movimenti principali composti di nord-est rinforzanti i movimenti sismici semplici provenienti dall'epicentro press'a poco nella stessa direzione.

*El Turro.* — È certo che in questo paese la scossa principale fu press'a poco nord-sud. In questa direzione caddero a terra alcuni pilastri in laterizio e le colonnine di legno dell'altare della Chiesa. Crollarono in generale verso sud o verso nord i muri delle case diretti ovest-est, ossia perpendicolari all'ondulazione nord-sud, soffrirono invece meno quelli disposti in questa stessa direzione.

*Velez-Malaga.* — Anche a Velez-Malaga abbiamo notato che in parecchie case soffrirono maggiormente i muri diretti est-ovest, perchè presi di fronte dalla scossa principale di nord-nord-est. In altri edificî si vede l'angolo sud-sud-ovest staccato. Un quadro appeso ad un gancio infisso in un muro diretto est-ovest saltò a terra, mostrando che anche la prima parte sussultorio-ondulatoria della scossa fu press'a poco nord-sud.

### *Determinazione dell'epicentro.*

Nella tavola II abbiamo riportato sulla carta topografica del signor Coello le direzioni delle scosse riferite e discusse nel paragrafo precedente. Anzitutto da

questa tavola risulta chiaramente che quasi tutte le *scosse principali* convergono nell'area triangolare compresa tra Ventas de Zafarraya, Alhama, Jatar e la Sierra Tejeda, e più precisamente s' incrocicchiano in gran numero entro un'area elittica relativamente ristretta, estesa per circa 14 chilometri da est ad ovest, e 3 a 4 chilometri da sud a nord. Entro quest'area adunque e probabilmente presso il suo centro geometrico deve esistere *l'epicentro* o *verticale sismico* del terremoto, la cui forma dobbiamo ritenere non circolare ma lineare. Si vede che le direzioni di alcune scosse, come per esempio, quelle di Cacin, del Turro, di Granata, di Alhendin, di Durcal, di Nigüela, si avvicinano soltanto all'epicentro senza concorrere in esso. Ciò può dipendere da varie cause, cioè: 1° La mancanza di un'esatta e precisa determinazione degli azimut di queste scosse; 2° le deviazioni che per rifrazione le onde sismiche possono aver subìte attraversando una grande estensione di rocce di varia densità; 3° le imperfezioni della carta topografica su cui sono riportate, la quale è in scala troppo piccola, e poco esatta nella posizione relativa dei paesi. Per queste ragioni non possiamo asserire che l'epicentro da noi ritrovato sia un'esatta projezione del centro di scuotimento, tuttavia riteniamo che non si allontani molto da essa.

Contro questo metodo per la determinazione dell'epicentro, applicato la prima volta da Mallet nello studio del grande terremoto napoletano del 1857, si è objettato da distinti sismologi (1) che in pratica non è applicabile, perchè i dati delle direzioni per un medesimo punto sono spesso molto differenti. Questa moltiplicità di direzioni si verificò anche nello studio del presente terremoto andaluso; ma noi speriamo di avere ovviato a questa difficoltà, col distinguere accuratamente le scosse principali, provenienti direttamente o con poca deviazione dal centro di scuotimento, dalle scosse secondarie di altra origine; e quindi tener conto solo delle prime nella determinazione dell'epicentro.

La posizione e la forma dell'epicentro, trovato colla direzione delle scosse, vengono confermate da molti altri fatti.

Anzitutto la forma allungata da est ad ovest concorda perfettamente colla forma generale delle curve isosismiche, di cui abbiamo già parlato più innanzi.

In secondo luogo osserviamo che tutte le località dove si verificarono le maggiori rovine degli edificî, ed i franamenti e le spaccature del suolo, alterazioni permanenti nella circolazione sotterranea delle acque ecc., sono situate presso l' indicato epicentro. Ed invece, scostandoci in tutte le direzioni da questa regione, gli effetti dinamici del terremoto sul terreno e sugli edificî vanno gradatamente decrescendo, sicchè le curve isosismiche, per quanto influenzate da moltissime circostanze locali, non si allontanano molto dalla forma di curve circolari concentriche al supposto epicentro (2).

In terzo luogo la forma della scossa nelle diverse parti dell'area sismica conferma la nostra determinazione. Infatti, è evidente che all'epicentro o verticale sismico

(1) Per esempio, da Hœrnes, *Erdbebenstudien* pag. 23.

(2) Abbiamo già mostrato (vedi sopra: *Area del terremoto*) come la struttura geologica della regione spieghi perchè il verticale sismico non si trovi al centro, ma presso il foco occidentale dell'area mesosismica.

il terremoto deve cominciare con una scossa: 1° puramente verticale; 2° di massima intensità. Orbene, noi vedemmo che in nessuno dei paesi anche più danneggiati il terremoto ebbe questa forma, poichè dapertutto il movimento più forte fu quello laterale od ondulatorio della seconda fase della scossa. Anche a Ventas di Zafarraya, dove la scossa si avvicinò maggiormente a questa forma, essa non cominciò con un movimento puramente verticale, e neppure di massima intensità. Vedemmo pure che a mano a mano ci allontaniamo in tutte le direzioni dal triangolo Ventas de Zafarraya, Alhama ed Jatar, la componente verticale della prima fase della scossa va a poco a poco decrescendo, finchè a Cordova, Siviglia, Cadice ecc. è ridotta nulla o quasi nulla. Dunque l'epicentro non coincide con nessuno dei paesi colpiti; deve trovarsi però presso Zafarraya e con tutta probabilità un poco ad oriente di questo paese nel triangolo compreso tra esso, Alhama ed Jatar.

Similmente facciamo notare che il numero e l'intensità delle repliche e dei rumori sotterranei fu massimo nei paesi più prossimi al supposto epicentro, ed a mano a mano minore, allontanandosi da esso. Infatti nella notte 25 al 26 dicembre ad Jatar si contarono fino a 110 repliche, a Malaga circa 15, a Cartama solo 5 a 6, ad Osuna, Siviglia, Cordova nessuna, infine ad Almaden, a Huelva, a Madrid ecc, anche la prima scossa non fu duplice, risultando di un solo breve movimento ondulatorio. I rumori sotterranei poi a Ventas le Zafarraya, ad Jatar, ad Arenas del Rey furono molto più forti che altrove, e si ripeterono molte volte anche senza essere accompagnati da movimenti sensibili del suolo. Allontanandosi da Zafarraya diminuirono d'intensità e di numero, tantoche già a Siviglia e Cadice non si resero più sensibili.

Infine osserviamo che l'epicentro da noi indicato coinciderebbe con un punto della crosta terrestre la cui tectonica è molto disturbata da stretti ripiegamenti di strati e fors'anche da fratture sotterranee; ossia presenta condizioni statiche favorevoli all'azione commovitrice delle forze endogene.

Del resto, non intendiamo di dare come *sicura* e *precisa* la posizione e la forma dell'epicentro del terremoto andaluso del 25 dicembre; due cose però ci sembrano certe per lo studio da noi fatto della direzione delle scosse e della forma delle curve isosismiche, cioè: 1° che questo terremoto presenta un solo *epicentro* da cui s'irradiò il movimento sismico in tutta l'area sismica; 2° che tale epicentro deve collocarsi sul versante settentrionale della Sierra Tejeda o nell'area da noi indicata o non molto lungi da essa.

## IV.

### Origine delle scosse — Movimenti rotatorî.

Ammessa la precedente determinazione dell'epicentro, ci rimarrebbe da spiegare l'origine di quelle scosse che non concorrono in esso e neppure gli si avvicinano. Ma non possiamo accingerci a dare questa spiegazione senza estendere le nostre ricerche a tutta la serie dei complicati movimenti, di cui risulta la scossa disastrosa del 25 dicembre.

Ammettiamo che un terremoto sia un movimento molecolare, analogo al movimento sonoro, trasmesso dal focolare sismico o centro di scuotimento alla superficie terrestre:

e che in un corpo solido un urto si propaghi, come dimostrò Wertheim (1), per onde sferiche di due sorta, cioè *longitudinali* e *trasversali*, le prime delle quali si trasportano con una velocità maggiore (secondo Wertheim, doppia) delle seconde. Ciò premesso, è evidente che nella porzione di superficie terrestre, situata verticalmente sopra il centro di scuotimento, le onde sismiche longitudinali arriveranno prima di giungere agli altri punti dell'area sismica, e vi arriveranno con forza maggiore e con direzione perfettamente verticale; ed è per questo che l'epicentro o centro superficiale si chiama anche *verticale sismico*. Ecco perchè nel presente terremoto andaluso, non essendosi verificate queste circostanze per nessuno dei paesi colpiti, ne abbiamo concluso che fortunatamente nessuno di essi si trovò esattamente all'epicentro.

Nei punti esterni al verticale sismico, ma non molto lontani da esso, arriveranno le onde longitudinali provenienti dal centro con direzione non verticale, ma incontrante l'orizzonte sotto un angolo (*angolo d'emergenza*) decrescente a mano a mano che ci allontaniamo dall'epicentro. Tale movimento si decomporrà in due movimenti, uno verticale e l'altro orizzontale; il primo *decrescente*, il secondo *crescente*, non assolutamente ma relativamente al primo, in proporzione alla lontananza dall'epicentro. Abbiamo già avvertito che la scossa disastrosa del 25 dicembre presentò molta regolarità in questo decrescimento della sua componente verticale partendo dal versante settentrionale della Sierra Tejeda.

Queste onde sismiche longitudinali provenienti dal centro danno ragione della prima fase sussultorio-ondulatoria della scossa; ma evidentemente non bastano a spiegare la seconda fase del terremoto, la quale fu più forte della prima, e quasi puramente ondulatoria anche nei paesi più vicini all'epicentro, mentre avrebbe dovuto mantenere la stessa forma della prima se, come questa, fosse unicamente effetto del movimento longitudinale proveniente dal centro.

Il verticale sismico, messo in movimento *prima* e *più fortemente* di tutte le altre parti dell'area sismica, diventerà centro di un movimento orizzontale od ondulatorio propagantesi a tutti i punti esterni al verticale sismico stesso, già messi in vibrazione dalle onde sismiche arrivate direttamente dal centro. Orbene, la componente orizzontale di quest'ultime onde si addizionerà col movimento orizzontale proveniente dall'epicentro, col quale ha comune la direzione, ed insieme determineranno una scossa ondulatoria più forte della scossa sussultorio-ondulatoria della prima fase del terremoto, e posteriore a questa. S'intende che, perchè ciò si verifichi, bisogna supporre che dal centro parta non un solo urto di brevissima durata, ma una serie di urti determinanti una serie di onde sismiche; sicchè mentre arrivano le ultime onde sismiche provenienti direttamente dal centro soppraggiungano le prime partenti dal verticale sismico.

Ad aumentare l'intensità della scossa nella sua seconda fase concorsero anche le *onde sismiche trasversali*, le quali propagandosi con velocità assai minore delle longitudinali saranno giunte quasi contemporaneamente alle onde provenienti dall'epicentro. Tali onde trasversali, determinando movimenti normali alla direzione di quelli

(1) Wertheim, *Sur la propagation du mouvement dans les corps solides* negli Ann. de Chimie et Physiq. Sér. III, t. 31.

provenienti direttamente dall'epicentro (1), quando giungono contemporaneamente a questi, daranno luogo a *movimenti composti* di direzione intermedia alle due componenti. Tale probabilmente è l'origine di alcune di quelle scosse secondarie quasi normali alle scosse principali, ovvero ad angolo press'a poco semiretto con esse, che incontrammo a Periana, a Cartama, a Nerja ed altrove nell'area danneggiata dal terremoto.

A rinforzare la intensità della scossa nella seconda fase del terremoto devono avere concorso anche le *onde riflesse*. Poichè è conforme alle leggi fisiche ammettere, che quando un movimento sismico passa da una roccia ad un'altra notevolmente più elastica, parte di esso *si rifletta* facendo un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza, e generando delle onde sismiche secondarie provenienti apparentemente non dal centro di scuotimento, ma dalla superficie delle rocce riflettenti. Queste agiranno come veri *centri sismici secondarî*, allo stesso modo che, nel fenomeno dell'eco, l'ostacolo riflettente diventa un centro fonico, da cui al nostro orecchio sembrano avere origine le onde sonore. Nel terremoto andaluso del 25 dicembre ci sembra doversi ritenere come riflesse dalle rocce cristalline antiche della Sierra Almijara le scosse di sud e sud-sud-ovest, che urtarono Albuñuelas e Durcal (vedi tav. II). Similmente è molto probabile che le rocce calcaree e cristalline, che presentano grande sviluppo a sud-ovest di Cartama, abbiano rimbalzato su questo paese in direzioni comprese tra nord e nord-est le onde sismiche provenienti dal centro. Queste onde riflesse hanno agito in direzione press'a poco eguale al movimento sismico trasversale, e tutte insieme hanno accresciuto assai l'intensità del terremoto nella seconda fase.

In ogni modo le onde riflesse, dovendo percorrere un cammino più lungo delle onde dirette longitudinali, saranno giunte quando queste erano sul finire. Se poi si riflette che le onde trasversali devono giungere ancora più in ritardo, si capirà perchè la scossa dopo alcuni secondi parve cessare, ossia vi fu una pausa, dopo la quale riprese con maggiore forza di prima. S'intende pure perchè tale pausa sia stata più lunga a Cordova ed a Siviglia che non presso l'epicentro; poichè il ritardo delle onde indirette dell'epicentro e delle onde trasversali del centro sulle onde longitudinali provenienti dal centro, deve essere divenuto sempre più sensibile nelle regioni molto lontane dal centro stesso, propagandosi le onde trasversali assai più lentamente delle longitudinali.

Questa complicazione di movimenti non si verificò più fuori dell'area danneggiata; poichè ivi l'angolo di emergenza delle onde provenienti dal centro essendo nullo o quasi nullo, le onde longitudinali del centro produssero un movimento puramente ondulatorio come quelle dell'epicentro. Solo le onde trasversali, fin dove rimasero sensibili, produssero verso la fine della scossa una leggera trepidazione.

Nel modo con cui si propagò il movimento sismico nel terremoto andaluso del 25 dicembre, noi vediamo una conferma delle idee di Mallet, Seebach, Lasaulx,

(1) All'onda trasversale si deve pure attribuire il movimento di *trepidazione* verificatosi *verso la fine* della scossa ad Osuna, a Siviglia ecc. In questi luoghi, infatti, molto lontani dal verticale sismico l'onda longitudinale arriva sotto un *angolo d'emergenza* piccolissimo, e però con una componente verticale quasi nulla; l'onda trasversale quindi, producendo movimenti in un piano normale al moto longitudinale, darà luogo a movimenti sussultorî o di trepidazione.

secondo le quali il movimento sismico si trasmette nella massa terrestre, seguendo le leggi generali della propagazione dei movimenti molecolari nei solidi. L'eterogeneità delle rocce di cui risulta quella parte di crosta terrestre cagionò soltanto parziali deviazioni a queste leggi. Le fratture dei terreni superficiali ingrandirono gli effetti disastrosi della scossa, come vedremo meglio analizzando la distribuzione dei danni. Le fratture ed i ripiegamenti dei terreni antichi e profondi favorirono, ovvero si opposero alla trasmissione del movimento, secondo che si trovarono disposte parallelamente o normalmente alla direzione di propagazione del movimento stesso.

*Movimenti rotatorî.*

Nel terremoto che ci occupa non mancarono, senza essere molto frequenti, i movimenti rotatorî. Ne abbiamo visti esempî ad Alhama, ad Albuñuelas, a Riogordo, a Malaga.

Nel cimitero di Alhama un obelisco di un monumento sepolcrale alto circa 1 m. e $^1/_2$ è girato sulla propria base per 15 o 20 gradi da ovest ad est passando per nord, e nello stesso tempo si è trasportato di alcuni centimetri da nord-nord-est verso sud-sud-ovest.

Ad Albuñuelas nella chiesa parrocchiale due statuette, poggiate su piedistalli infissi nel muro, girarono per 8 a 10 gradi da ovest verso est passando per nord, come ad Alhama.

A Riogordo la statua dell'altare maggiore della chiesa ha girato di alcuni gradi da est ad ovest passando per nord.

A Malaga in piazza Mercedes alcuni dei grossi pezzi di granito a forma di piramidi troncate, che costituiscono l'obelisco Torrijos, ruotarono per alcuni gradi sul pezzo sottoposto da est verso ovest, passando per nord, come a Riogordo.

Il signor parroco di Velez-Malaga ci raccontò che una statuetta della Madonna di Lourdes fu trovata, dopo il terremoto, girata di quasi mezza circonferenza sul proprio asse.

Descrivendo la direzione delle scosse a Cacin, abbiamo già riferito il caso di una scodella, che dev'essere girata sopra se stessa al momento del terremoto.

Per spiegare questi fatti non crediamo necessario ammettere che si sia verificato un vero movimento vorticoso del suolo; poichè in tal caso i movimenti rotatorî degli oggetti mobili sarebbero stati molto più numerosi. Riteniamo invece col compianto ed illustre prof. A. Serpieri che i moti rotatorî siano una conseguenza di moti rettilinei diversamente diretti, succedutisi a brevissimi intervalli; sicchè gli oggetti già squilibrati e vacillanti per la prima spinta, dovendo d'un tratto cambiare il piano di oscillazione, si spostano sulle proprie basi, e ruotano intorno a quei punti che oppongono resistenza maggiore (1).

A conferma di questo modo di spiegare le scosse rotatorie ricordiamo, aver noi constatato, che realmente nella seconda fase del terremoto del 25 dicembre 1884, in molte località si succedettero a brevissimi intervalli di tempo scosse in diverse direzioni. Il signor parroco di Cartama poi ci ha raccontato che, stando egli al momento del terremoto seduto al braciere, vide questo prima dondolare in direzione quasi est-ovest, poi in direzione nord-sud, ed allora gli parve anche di avvertire un movimento giratorio.

(1) A. Serpieri, *Il terremoto di Rimini della notte* 17-18 *marzo* 1875, pag. 9-10.

## V.

## Velocità di propagazione del movimento sismico. Ora del terremoto.

Per lo studio dinamico di un terremoto è di grande interesse la determinazione dell'ora precisa della scossa in diverse località per dedurne la velocità di propagazione del movimento sismico.

La scossa disastrosa del 25 dicembre 1884 passò a San Fernando (Cadice) alle ore $8{,}53^m58^s$ t. m. di Madrid, come venne attestato da due cronometri a pendolo del r. Osservatorio astronomico, i quali si fermarono a tale ora (1). Naturalmente si deve ritenere che la scossa a San Fernando sia cominciata almeno 2 o 3 secondi prima dell'istante in cui si fermarono i pendoli ossia $8^h53^m56^s$ circa.

Siccome per le cose dette sopra riteniamo come dimostrato che il terremoto partì dal fianco settentrionale della Sierra Tejeda, dove noi abbiamo stabilito l'epicentro; così l'ora certamente esattissima dell'Osservatorio di Cadice ci può servire come pietra di paragone per giudicare della esattezza dell'ora indicata per altre località.

Avendo noi istituito tale confronto colle ore segnalate per il terremoto a Madrid, a Siviglia, a Malaga ed in altre città della Spagna, abbiamo trovato che tutte queste ore sono incerte ed in contraddizione tra di loro o coll'ora certamente esatta di San Fernando. Anche l'ora delle 9 e 10 data dalla stazione ferroviaria di Granata, riferita ad alcuni come attendibile (2), a noi sembra dover essere inesatta; poichè non è possibile che il movimento sismico sia giunto a Granata 16 minuti dopo che a Cadice, mentre questa seconda città dista dal centro di scossa circa 150 chilometri più della prima.

Tanto meno poi si è potuto sapere l'ora precisa del terremoto nei paesi e nelle città secondarie. Per cui dovemmo rinunciare a determinare la velocità di propagazione del terremoto andaluso (3).

Fuori di Spagna il prof. Galli di Velletri ritiene che il movimento sismico andaluso si sia reso sensibile ai delicati istrumenti del suo osservatorio alle ore 10 pom. t. m. di Roma, corrispondente ad ore $8{,}55^m$ t. m. di Madrid, ossia $1^m4^s$ dopo che la scossa si è sentita a Cadice. Orbene, siccome quest'ultima città dista dall'epicentro circa 200 chilometri e Velletri circa 1300 chilometri, il movimento sismico avrebbe impiegato $1^m4^s$ a percorrere 1100 chilometri; il che darebbe una velocità media di propagazione di 17188 metri al secondo, assolutamente impossibile ad ammettersi. Per questo, come già avvertimmo di sopra noi dubitiamo che realmente il terremoto, andaluso si sia propagato fino a Velletri.

(1) Il pendolo Berthoud si trovò fermato sulle $8^h43^m54^s5$ t. m. locale che corrisponde alle $8^h53^m58^s5$ t. m. di Madrid.

(2) La ragione per cui non si potè conoscere in nessun luogo l'ora precisa del terremoto si è che in Spagna c'è ancora l'uso di regolare gli orologi non col tempo medio della capitale, cioè di Madrid, ma del capoluogo delle singole provincie; nelle quali poi non si ha cura di regolare almeno gli orologi pubblici principali con l'ora esatta avuta da buone meridiane o da un osservatorio astronomico.

(3) L'ora data dal prof. M. S. De Rossi per Roma (vedi sopra: *Area del terremoto*) non è che approssimativa; quindi neppure essa può servire a trovare la velocità di propagazione del terremoto.

La Commissione francese (1) deduce la velocità di propagazione del terremoto andaluso dal seguente fatto. Al momento di una replica (nel 26 dicembre 1884) due impiegati dell'amministrazione del telegrafo, l'uno a Malaga e l'altro a Velez-Malaga stavano trasmettendosi un telegramma. Quest'ultimo, sorpreso dalla scossa, cessa subitamente la corrispondenza; il suo collega, meravigliato, gli domanda la causa della interruzione, quando, sei secondi dopo, sente alla sua volta la scossa. La Commissione francese da questi dati, tenuto calcolo della distanza delle due località dal punto di mezzo dell'epicentro, deduce che la scossa si sarebbe propagata con una velocità di almeno 1500 metri al secondo. Prendendo le distanze da Malaga e da Velez-Malaga al punto di mezzo dell'epicentro, quale venne da noi determinato, si trova che la prima città dista da esso 22 chilometri circa più della seconda. Ci risulterebbe quindi una velocità di propagazione della scossa di metri 3666 al secondo. Siccome la media delle velocità trovate in 7 terremoti studiati da Schmidt, Mallet, Seebach, Lasaulx è di metri 416 al secondo, dubitiamo che la velocità di 3666, che sarebbe quasi 9 volte maggiore, sia troppo grande; epperò che sia inesatto il fatto che servì per calcolarla. Probabilmente l'intervallo tra l'ora in cui si sentì la scossa a Velez-Malaga, e quella in cui si avvertì a Malaga fu maggiore di 6 secondi. Concludiamo dunque che anche questa determinazione della velocità di trasmissione della scossa è poco attendibile; e che del resto ha poca importanza, perchè si tratta di una replica e non della grande scossa del 25 dicembre di cui specialmente ci occupiamo.

## VI.

### Profondità del centro — Intensità.

Abbiamo visto che sul fianco settentrionale della sierra Tejeda, un poco ad oriente di Ventas de Zafarraya, esiste il centro superficiale d'irraggiamento (epicentro) del terremoto; bisogna dunque supporre che il centro di scuotimento si trovi sotto quella regione ad una profondità più o meno grande nell'interno della terra.

Non essendo possibile applicare il metodo proposto da Seebach per la ricerca della profondità del centro del terremoto andaluso, perchè basato sulla conoscenza dell'ora precisa della scossa in molte località, ci siamo rivolti a quello meno rigoroso, ma nel nostro caso il solo applicabile, usato la prima volta da R. Mallet, nel suo studio classico del grande terremoto napoletano del 1857.

Questo metodo parte dal principio che il movimento sismico all'epicentro emerge normalmente all'orizzonte, ossia sotto un angolo d'emergenza di 90°, e che allontanandosi dall'epicentro questo angolo diminuisce più o meno rapidamente, secondo che è più o meno grande la profondità del centro. Precisamente in qualunque punto esterno all'epicentro deve sempre sussistere la relazione

$$p = d \times \text{tang } \alpha$$

nella quale $p$ è la profondità del centro, $\alpha$ l'angolo d'emergenza e $d$ la distanza del luogo di osservazione dall'epicentro.

(1) F. Fouqué, *Rapports*, l. c. pag. 3.

Per determinare poi il valore degli angoli d'emergenza il Mallet nello studio del terremoto napoletano del 1857, osservò le spaccature aperte dal terremoto nei muri o nel suolo, ammettendo che esse per legge meccanica debbano fare coll'orizzonte angoli rispettivamente complementari cogli angoli di emergenza.

Alcuni ritengono che questo metodo di Mallet sia praticamente inapplicabile, perchè, osservando le case lesionate da un terremoto quasi sempre si vedono in un medesimo paese fratture con tutte le inclinazioni possibili; sicchè pare che queste non obbediscano a nessuna legge meccanica. Tuttavia questa difficoltà scompare o per lo meno impiccolisce assai quando si abbia cura, come noi cercammo di fare, di escludere dalle osservazioni eseguite per la determinazione degli angoli di emergenze: 1° le fessure dei muri a struttura molto eterogenea, mancanti di cemento ecc.; 2° le spaccature che mettono capo a finestre o ad altre aperture; 3° quelle che non sono nuove, ma spaccature di antichi terremoti riaperte; 4° le fessure dei muri diretti normalmente alla direzione della scossa principale, verificata nella località che si considera, poichè solamente quelle dei muri posti nel piano stesso di tale scossa, od in piani poco inclinati ad essa, devono trovarsi in rapporto coll'angolo d'emergenza; 5° le fessure perpendicolari dovute evidentemente al movimento orizzontale proveniente dall'epicentro (1); 6° finalmente quelle causate solo indirettamente dal terremoto, perchè dovute al muoversi o piegarsi del terreno sottoposto, come accadde a Güevejar.

Ciò premesso, ecco i migliori angoli di emergenza, dedotti dalle spaccature dei muri che ci parvero più ben costruiti ed omogenei.

Si avverta che le distanze riportate nel seguente *Quadro* sono misurate partendo dal punto di mezzo dell'epicentro da noi segnato sulla tavola II.

| LOCALITÀ | Distanza dall'epicentro | Angolo di emergenza | Profondità del centro |
|---|---|---|---|
| | metri | | metri |
| *Alcaucin* (spaccature in muro diretti N-S circa in due case) . | 8,500 | 42° | 7,653 |
| *Arenas del Rey* (spaccature in diversi muri direzione prossima ad E-O tav. IV fig. 1, 2, 3) . . . . . | 13,000 | 40° | 10,908 |
| *Periana* (muri diretti NE-SO in due case) . . . . . | 14,500 | 35° | 10,150 |
| *Trapicci*, presso Velez-Malaga (muro diretto N-S) . . . . . | 17,000 | 25° | 7,937 |
| *Cacin* (muro diretto N-S) . . . . . | 18,000 | 38° | 14,063 |
| *Frigiliana* (muro diretto NNO) . . . . . | 22,000 | 30° | 12,702 |
| *Turro* (muri laterali della chiesa diretti N-S) . . . . . | 23,000 | 20° | 8,371 |
| *Ventas de Huelma* (muri della chiesa diretti SSO-NNE) . . | 24,500 | 30° | 14,145 |
| *Colmeñar* (muro diretto circa E-O) . . . . . | 27,000 | 40° | 22,655 |
| *Nerja* (muri diversi diretti N17° O) . . . . . | 27,500 | 25° | 12,823 |
| *Lenteje* (spaccature in un fianco del campanile ed in muri diretti circa E-O) . . . . . | 34,000 | 25° | 15,855 |
| *La Malà* (muri diretti ENE-OSO) . . . . . | 35,000 | 20° | 12,740 |
| *Albuñuelas* (grosso muro diretto E-O) . . . . . | 37,000 | 15° | 9,914 |

(1) Tali sono, per esempio, quelle che osservammo ad Alharma (tav. IV, fig. 5).

Facendo la media aritmetica dei tredici risultati ottenuti, abbiamo per profondità media metri 12300. Si vede adunque che il centro di scuotimento dev'essere compreso nello spessore della crosta solida del globo, nella massa dei terreni cristallini ed in una zona dove la temperatura terrestre dev' essere di circa 350°.

*Intensità del terremoto.* — Siccome nel propagarsi il movimento sismico diminuisce d'intensità in ragione del quadrato della distanza dal centro, si avrà $m = \frac{i}{r^2}$ da cui $i = mr^2$, dove $m$ è l'intensità nota del terremoto in un dato luogo, $i$ l'intensità del terremoto al centro, e $r$ la distanza del luogo stesso dal centro (1); la quale distanza sarà nota quando sia nota la profondità $p$ del centro e la distanza $d$ del luogo che si considera dall' epicentro, poichè si avrà $r^2 = d^2 + p^2$.

Non avendo potuto determinare per nessun punto l'intensità $m$ del terremoto andaluso, ci limiteremo a confrontare la sua intensità con quella di altri terremoti.

Le intensità $i$ ed $i_1$ di due terremoti daranno la proporzione:

$$i : i_1 = mr^2 : m_1 r^2_1$$

e prendendo $m = m_1$ (per le località dove il terremoto fu appena sensibile leggermente, come sono Lisbona, Valenza ecc. nel terremoto andaluso) avremo:

$$i : i_1 = r^2 : r_1^2.$$

Paragonando, per esempio, il terremoto andaluso con quello germanico del 6 marzo 1872 studiato da Seebach, e chiamando $i$ l'intensità del primo ed $i_1$ quella del secondo, abbiamo:

$$i : i_1 = 4228 : 3305,$$

ossia l'intensità del terremoto andaluso è di $^1/_4$ circa superiore a quella del terremoto germanico. E ciò è naturale, poichè il terremoto germanico si sentì su un'area poco minore di quella del terremoto andaluso, produsse effetti dinamici molto più piccoli, non avendo cagionato nessuna disgrazia personale, ed infine ebbe il centro di scuotimento profondo quattro chilometri circa più del terremoto andaluso.

Se col medesimo calcolo confrontiamo l'intensità del terremoto spagnuolo del 1884 col grande terremoto napoletano del 1857, troviamo che l'intensità del primo sta a quella del secondo come 4228 : 1253 ossia l'intensità del primo è più che tripla di quella del secondo, sebbene i disastri cagionati dal terremoto napoletano siano stati molto maggiori di quelli del terremoto andaluso. Si vede adunque che gli effetti dinamici e disastrosi di un terremoto alla superficie della terra non sono semplicemente proporzionali all'intensità della forza che lo produce, ma anche alla profondità a cui questa forza agisce ed all'area alla quale si estende. Nel terremoto andaluso, infatti, la profondità del centro è maggiore e l'area più grande che nel terremoto napoletano.

(1) K. v. Seebach, *Mitteldeutsche Erdbeben vom März 1872*, pag. 176.

## VII.

## Effetti dinamici del terremoto sugli edifici e sul terreno.

### 1. *Area mesosismica.*

*Ventas de Zafarraya, Chozas del Rey ed Almendron.* — Questi tre paesi si trovano in quel bacino senza scolo, ripieno di terreno alluvionale dove abbiamo visto che esiste il così detto *sumidéro* di Zaffaraya.

Ventas de Zafarraya risultava di circa 158 famiglie. Quasi tutte le case rovinarono più o meno completamente. Vi furono 77 morti e parecchi feriti. È uno dei paesi dove la parte sussultoria della scossa fu più violenta. Se ne vedono gli effetti in molte spaccature quasi orizzontali nei muri laterali della chiesa, in un muro lanciato fuori dalle fondamenta abbastanza profonde ecc.; la chiesa presenta i muri attraversati da molte spaccature, e il suolo in parte sconnesso; tuttavia non rovinò neppure in parte. E ciò si deve anzitutto alla solidità dell'edificio, la cui impalcatura era stata recentemente rifatta, e munita di robusta armatura in legno; e fors'anche alla sua orientazione, per la quale non presentò un fianco, ma la diagonale alla scossa principale da cui venne urtato; infatti la chiesa essendo rettangolare ed avendo l'asse diretto nord 57° ovest, presenta la diagonale in direzione quasi est-ovest, secondo la quale agì la scossa principale (vedi sopra: *Direzione delle scosse*).

Ventas è posta sopra un'alluvione quaternaria ricoprente i calcari giurassici, ed è il paese più vicino all'epicentro.

A Chozas del Rey le rovine furono ancora gravissime, sebbene minori alquanto di quelle di Ventas, forse perchè il paese, oltre essere un po' più lontano dall'epicentro, poggia anche su terreno più solido, cioè sul calcare giurassico sporgente dal terreno alluvionale. Furono 72 le case che crollarono, 25 i morti sotto le rovine, 25 i feriti gravemente e 56 quelli lievemente.

In fine, El Almendron, situato nella valle stessa di Zafarraya alcuni chilom. più a nord e sempre più lontano dall'epicentro, soffrì ancora meno, essendo solamente quindici o venti le case crollate, e 4 le persone morte.

Si verificarono molti franamenti e distacchi di rocce nei fianchi della valle di Zafarraya, e specialmente al Boquete di Zafarraya, lungo la stretta gola che mette in comunicazione la valle Zafarraya con Alcaucin e Periana.

Nella valle di Zafarraya, specialmente al contatto del terreno alluvionale colle rocce giurassiche sottoposte, si aprirono parecchie spaccature. La più importante, nel fianco della sierra Marchamona, ha circa 500 metri di lunghezza ed una larghezza varia da 50 centimetri fino a 1 metro [1].

Presso Ventas vedemmo il terreno coltivato attraversato da una piccola fenditura di pochi centimetri di larghezza, diretta press'a poco ovest-nord-ovest, la quale probabilmente segue il medesimo allineamento della grande spaccatura della sierra di Marchamona, e si sarà formata contemporaneamente a questa.

[1] D. de Orueta, op. cit. pag. 32-33.

Le sole alterazioni che cagionò il terremoto nella circolazione sotterranea delle acque fu l'intorbidamento di alcune sorgenti e il diseccamento di un pozzo.

*Periana, Alfarnatejo ed Alfarnate.* — Il territorio di Periana, che si trova sul versante sud della sierra Marchamona, soffrì negli edificî danni minori di Zafarraya, ma presentò sconvolgimenti nel suolo più interessanti e maggiori.

Periana colla frazione del Guaro conta circa 1300 anime; 40 persone morirono sotto le rovine, 35 restarono ferite gravemente e altre 50 leggermente. Crollarono più di 300 case, e le altre sono più o meno rovinose ed inabitabili. La chiesa è totalmente sfasciata. Nei casali dei dintorni di Periana i danni maggiori si verificarono a nord-ovest e ad ovest ossia verso il Rio Guaro.

Un grande movimento e fratturamento di terreno si verificò a nord di Periana. Una zona di terreno larga da 10 a 35 metri, diretta prima da ovest ad est, poi più sotto da nord a sud, si staccò dalle rocce sottoposte, scivolando al basso in alcuni punti fino a 2 metri e fratturandosi in mille guise. Il distacco comincia in alto, al piede del Puerto del Sol, tra la sierra Marchamona e quella di Enmedio. All'orlo della zona scoscesa si aprirono lunghe spaccature, una delle quali presso el Batan raggiunge fino 1 metro e ½ di larghezza.

Le case di Zapata, Guaro e la Cueva (frazioni di Periana), situate sul terreno scosceso o in prossimità ad esso si sfasciarono orribilmente. L'aja del Guaro, per esempio, situata all'orlo meridionale della zona venne ridotta in piccoli pezzi, alcuni dei quali girarono sopra se stessi fino a prendere la posizione verticale. Non sembra però che la distruzione di questi casali sia stata causata direttamente ed esclusivamente dalla violenza dell'urto; ma anche dal terreno, che, messo in movimento dalla scossa, si è sformato e fratturato in alcuni punti più e in altri meno. In questo modo si spiega come nei casali citati con tanta rovina degli edificî ci sia stato sì piccol numero di vittime umane [1] (6 o 7 morti), e come la frazione del Batan situata tra quelle di Zapata, Guaro e la Cueva, abbia sofferto molto meno di esse.

In Periana appena dopo il terremoto l'acqua della fonte pubblica uscì torbida, ma poi presto ritornò limpida. Al Guaro la mattina 26 dicembre una sorgente di acqua potabile era scomparsa affatto; poco tempo dopo riapparve in altro luogo.

Come si vede nella tavola II al confine occidentale dell'area mesosismica si trova Alfarnatejo, dove furonvi molte case rovinate e parecchie persone ferite. Ad Alfarnate i danni furono minori e non si ebbero a lamentare disgrazie personali.

*Arenas del Rey, Jatar, Jaena e Fornes.* — Ventas de Zafarraya ed Arenas del Rey sono i paesi che più di tutti gli altri soffersero, sia per rovine di case, sia per disgrazie personali. Ad Arenas del Rey sopra 1332 abitanti vi furono 118 morti, circa 200 feriti più o meno gravemente, e molti altri solo leggermente [2]. La chiesa e molte case rovinarono quasi interamente, tutte le altre vennero gravemente lesionate; sicchè, quando noi visitammo il paese al principio di maggio, nessuno ancora

[1] Un proprietario del Guaro ci raccontava che uno de' suoi coloni, dopo aver avvertito il terremoto, ebbe tempo di destare un suo compagno ch'era a letto a dormire, e di uscire all'aperto insieme, prima che la casa cadesse.

[2] Ad Arenas rimasero sepolte sotto le case crollate quasi 600 persone, delle quali solo 250 circa vennero estratte senza ferite di qualche considerazione.

dormiva negli edificî in muratura. È degna di essere ricordata una casa che non rovinò in mezzo al generale crollamento delle altre, sebbene abbandonata già prima del terremoto perchè pericolante.

Il paese di Jatar, sebbene si trovi 4 chilom. ad ovest di Arenas, ossia più vicino al centro di scuotimento, soffrì molto meno. Ebbe tuttavia 2 morti e circa 40 feriti sopra una popolazione di circa 1200 abitanti. Molte case rovinarono e tutte le altre vennero più o meno gravemente lesionate.

La cagione principale, per cui le rovine furon molto maggiori ad Arenas che non a Jatar, è certamente la natura del terreno su cui poggiano; poichè mentre Jatar è posto su terreno piuttosto consistente, Arenas invece è tutta fabbricata sopra marne ed arenarie friabilissime, molto eterogenee e ripiene di conchiglie lacustri mioceniche. Perciò molti che abitavano grotte (cuevas) scavate in queste rocce poco consistenti rimasero sepolti vivi nelle loro abitazioni per l'improvviso franamento del terreno. Si aggiunga che Arenas del Rey è situata presso l'orlo occidentale di un terrazzo fluviale delle marne mioceniche sopra accennate, nelle quali al momento del terremoto, proprio a fianco del paese si aprirono diverse spaccature abbastanza lunghe e di 2 a 3 decimetri di larghezza. Nell'atto della formazione di queste spaccature dev'essersi determinato un movimento di massa sul terreno circostante, il quale aggiunto al movimento sismico ne ha ingrandito assai gli effetti disastrosi.

La sventura di Arenas venne aumentata anche dalle intemperie; nei primi di gennaio vi fu una nevicata tanto copiosa, che la neve non scomparve se non dopo più di una settimana. Sicchè nella prima quindicina di gennaio morirono in media tre persone al giorno per mancanza di abitazione e di alimento.

*Jaena e Fornes.* — Jaena si trova circa 7 chilom. ad est-nord-est di Arenas, ossia più lontana dal centro di scuotimento. Soffrì meno di Arenas; essendo rovinate circa 200 case, uccidendo 10 persone e ferendone gravemente altre 18 (1).

Fornes soffrì un poco meno di Jaena, sebbene situato qualche chilom. più verso Arenas.

*Alhama e Santa Cruz.* — Alhama è una città di circa 9000 abitanti, costruita sopra un alto terrazzo lungo la sponda sinistra del Rio Marchan, il quale in questo punto presenta una direzione generale media est-nord-est ovest-sud-ovest. La città si divide in due parti; quella più antica, inferiore od orientale, e quella più moderna, superiore od occidentale. In ambedue le parti, ma specialmente in quest'ultima, le case sono con grande imprudenza costruite sull'orlo del profondo precipizio, detto il *tajo*, che scende quasi verticalmente al Rio. Orbene è precisamente in questa parte occidentale che avvennero le grandi rovine. Quasi tutte le case crollarono in parte o totalmente; quelle poi situate all'orlo e sul ripido pendìo del burrone precipitarono al basso rotolando l'una sull'altra. Il terreno stesso in diversi punti franò trascinando seco le case sovrapposte, le quali insieme ad enormi massi precipitarono su quelle sottoposte. Un fatto meraviglioso, accaduto in una di queste case, ci mostra come esse siano crollate non solo per la violenza del terremoto, ma specialmente per il cedimento del terreno. Una casa situata sull'orlo del burrone al momento del terremoto venne divisa in due

(1) Secondo l'*Informe* della Commissione spagnuola, ad Jaena i morti furono 17 e di feriti 5.

parti, di cui quella verso il burrone, dove stava a letto una bambina di 5 anni, precipitò al Rio da un'altura di circa 25 metri; l'altra parte non crollò totalmente, e le persone che vi si trovarono si salvarono tutte, e corsero subito a cercare la bambina, sicuri di non più vederne che il cadavere. Ma quale fu la loro meraviglia quando trovarono che la bambina, cadendo insieme alla casa sfasciata, era penetrata attraverso una spaccatura aperta dal terremoto nel tetto di un molino sottoposto e per fortunato e quasi miracoloso accidente venne a posarsi sopra un letto, che si trovava nel piano superiore di detto molino, senza soffrire la minima contusione.

In Alhama tutti chiamano questa fortunata bambina *la niña del milagro*.

Nella parte inferiore di Alhama le case in generale non si sfasciarono, rimasero però più o meno gravemente lesionate e ci faceva veramente pietà il vederle quasi tutte abitate, e ricostruiti i secondi e i terzi piani, precisamente come prima della catastrofe. La Chiesa maggiore, molto antica (consacrata nel 1484) è pericolante; un'altra chiesa verso il centro del paese rovinò in parte; invece quella de las Angustias, che si trova alla parte più bassa e orientale della città, soffrì poco. Insomma la parte bassa del paese, sebbene risultante di edificî più antichi, sofferse molto meno della parte superiore.

Complessivamente rovinarono in parte o totalmente circa 1000 case, morirono sepolte sotto le macerie 330 persone, ed altre 500 circa restarono più o meno gravemente ferite.

Il terremoto cagionò molti franamenti grandiosi nei fianchi scoscesi del burrone di Alhama, nel suolo si apersero spaccature, ma nessuna di qualche importanza. Assai interessanti invece sono le alterazioni della circolazione sotterranea delle acque. Poco dopo il terremoto si notò che l'acqua del Rio Marchan diminuiva lentamente, restando totalmente asciutto la mattina del 26. La sorgente del Rio, situata ad 8 chilom. circa da Alhama, verso la sierra Tejeda, dopo la scossa cessò per un po' di tempo di dare acqua. Dopo alcune ore si aprì una nuova fonte a 100 m. di distanza dall'antica, e quest'ultima riapparve dopo alcuni giorni, senza che la sorgente nuova cessasse.

Lungo il Rio Marchan, quasi 3 chilom. sotto Alhama, c'è un'abbondante sorgente termale con antichissimo stabilimento balneario. Orbene queste acque cessarono di sgorgare appena dopo il terremoto; dopo quattro ore incomiciarono ad uscire torbide e scarse, poi poco a poco divennero più abbondanti di prima, di alcuni gradi più calde e più ricche di acido solfidrico. Intanto circa a 300 m. a nord del Bagno, dalla medesima parte del Rio, la notte del 27 al 28 si sentì una detonazione spaventosa e si aperse in suolo alluvionale un'ampia buca di 4 o 5 metri di diametro, dalla quale sgorgò una nuova sorgente di acqua termale, tanto abbondante che sarebbe capace di muovere parecchi molini. La nuova acqua termale era un po' più calda e più ricca di acido solfidrico che non fosse l'antica. In tale stato si conservò la nuova sorgente almeno fino al 3 di maggio quando noi la visitammo: in quel giorno trovammo nell'acqua dell'antica sorgente 46° centigradi ed in quella nuova circa 50°. L'acqua della nuova sorgente nella buca dove sgorga si vedeva ribollire molto sensibilmente per effetto di gaz (probabilmente acido carbonico ed acido solfidrico) che si sviluppano.

Pochi chilometri sotto i bagni, sempre sulla destra del Rio Marchan, si trova il villaggio di Santa Cruz, orribilmente sconquassato dal terremoto, non meno di Alhama.

Presso Santa Cruz nella notte del 25 al 26 dicembre si aperse pure una nuova sorgente di acqua termale e solforosa, come quella del Bagno, ma cessò subito nelle ore pomeridiane del 26. Per altri 4 o 5 giorni dalla cavità apertasi nel suolo uscirono sostanze gazose con odore di acido solfidrico. Pochi chilometri a nord-ovest di Rio di Salar s'incontrano i casali di Torresolana e di Ventorijo de Cabrera pure molto rovinati. Spingendosi sempre più in basso nella direzione di Loja gli effetti disastrosi del terremoto cessarono un poco prima di Salar.

*Cacin, El Turro, Ventas de Huelma.* — A Cacin, paese di 350 abitanti la chiesa e molte case rovinarono quasi intieramente. Vi furono 4 persone ferite. Al Turro (400 abitanti) le rovine sono pure gravissime, un po' minori però che a Cacin, perchè più lontano dal centro di scuotimento, e con le case un po' meglio costruite.

Al Turro si vede molto chiaramente come sieno rovinate maggiormente le pareti degli edificî dirette perpendicolarmente alla direzione della scossa principale, che ivi fu quasi esattamente nord-sud. Infatti in alcune case i muri diretti press'a poco est-ovest sono interamente rovesciati da sud verso nord, quelli invece diretti nord-sud sono in piedi. Vicino alle case rovinate se ne vedeva una nuova che aveva sofferto poco danno.

A Ventas de Huelma le rovine furono notevolmente minori che a Cacin, tuttavia crollarono circa otto case, e quasi tutte le altre, compresa la chiesa, furono gravemente lesionate specialmente nei piani superiori. Ad Agron i danni furono press'a poco uguali. A Ventas de Huelma, dove fu approssimativamente nord-est sud-ovest la direzione della scossa principale, notammo che diverse case agli angoli nord-est ovvero sud-ovest presentavano spaccature, per cui gli angoli stessi quasi si staccarono dal rimanente dell'edificio.

Non si osservò nessuna alterazione nel pozzo di Ventas de Huelma.

*Canillas d'Aceituno ed Alcaucin.* — Canillas si trova sul fianco meridionale della sierra Tejeda e circa 750 m. d'altezza nella parte più elevata del bacino del Rio Velez. Il paese è in ripido pendìo e poggia su un conglomerato di sfacelo ad elementi calcari, probabilmente prodotti dal franamento dei calcari cristallini della vicina sierra. La natura del suolo e la forma in forte pendìo, non che la violenza della scossa tanto ondulatoria che sussultoria, concorsero a determinare gli effetti disastrosi del terremoto. Le rovine furono maggiori nella parte alta, minori in quella media e mediocri, ma tuttavia considerevoli, nella parte inferiore. Rovinarono 334 edificî e vi furono 5 persone morte, 7 ferite gravemente e più di 30 leggermente.

Avvennero numerosi scoscendimenti nei fianchi rocciosi della sierra Tejeda specialmente a nord-est del paese.

Non meno gravi furono i danni ad Alcaucin, altro paese situato in posizione simile a quella di Canillas circa 6 chilometri più ad occidente. Circa 22 case rovinarono quasi completamente al momento della prima scossa (Orueta *op. cit.*), molte altre crollarono in parte o rimasero in piedi gravissimamente lesionate e crollanti. Tutte soffrirono lesioni molto gravi; vi furono 6 morti ed una cinquantina di feriti. I casali dei dintorni di Alcaucin soffrirono ancora maggiormente del paese; in uno di questi casali perirono 200 capre, in un altro 4 animali da soma. Alcuni di questi casali vennero colpiti dai massi rocciosi, che precipitarono daí fianchi scoscesi della sierra al momento della

scossa. Narra il sig. Orueta che un pastore che stava nella *grotta delle vacche* (a 400 m. sopra Alcaucin), avvertito il movimento uscì precipitosamente dalla grotta, ma poi dovette ritornarvi subito per trovare un riparo dai numerosi massi di pietra che cadevano dalle alture.

Nel territorio di Alcaucin si aprirono diverse spaccature nel suolo. Una attraversò parte del paese con direzione est-ovest (presso la chiesa), e si prolungò nella sierra, facendosi notevolmente più larga. Nella chiesa si vede un grosso pilastro spaccato quasi verticalmente e colle due parti spostate. La parte interna si è sollevata e trasportata per 4 o 5 centimetri verso l'interno della chiesa, ovvero l'altra parte subì uno spostamento opposto. In ogni modo ciò venne cagionato dalla spaccatura del suolo la quale, passando sotto il pilastro, presentava un piccolo dislivello tra le due labbra.

Dopo il terremoto, l'acqua della fonte pubblica del paese aumentò. Nelle repliche, al momento stesso in cui si sente il rombo sotterraneo, di solito l'acqua della medesima fonte s'intorbida, poi poco dopo riprende le qualità ordinarie.

*Velez Malaga, Algarrobo, Frigiliana* ecc. — Velez-Malaga è una bella e ricca cittadina di circa 15000 abitanti. Parecchie case rovinarono in parte o totalmente, sicchè furonvi 6 morti e 16 feriti più o meno gravemente. Le altre case soffersero tutte più o meno notevolmente, e circa 500 rimasero inabitabili. Ascende forse a 15 milioni di lire il danno materiale sofferto da questa infelice città, già terribilmente flagellata in questi anni dalla Filossera, che distrugge inesorabilmente i famosi vigneti del *vino di Malaga,* principale ricchezza del paese. La parte inferiore della città, situata sulle argille e sulle arenarie plioceniche, sofferse maggiormente della parte superiore, la quale si trova sopra scisti dei terreni primitivi. La circostanza di trovarsi la città sopra un suolo dove vengono a contatto terreni tanto diversi avrà concorso ad aumentare le conseguenze disastrose del terremoto; poichè queste ingrandiscono sempre dove il movimento sismico trova ostacoli alla sua regolare propagazione.

La chiesa dei Cappuccini rovinò quasi totalmente; la parrocchiale è meno danneggiata, presenta però una spaccatura che attraversa quasi tutta la vòlta verso il mezzo, e nel fianco meridionale una lunga spaccatura quasi verticale.

Siccome a Velez la scossa principale fu un' ondulazione nord-nord-est sud-sud-ovest si vedono molte case coll'angolo sud-sud-ovest staccato e più lesionato delle altre parti dell'edificio; e similmente più rovinati i muri est-ovest che non quelli nord-sud appartenenti ad un medesimo edificio. Citerò, per esempio, una casa della Calle Menrugo dove la parete est-ovest rovinò quasi totalmente e le altre no; un'altra in Calle Mesones, nella quale si vede la parete est-ovest rivolta a sud percorsa da parecchie spaccature, che non esistono nei fianchi di est e di ovest (tav. IV, fig. 4); infine la chiesa dei Cappuccini, dove i muri maggiormente lesionati sono appunto quelli di nord e di sud.

*Algarrobo.* — Questo paese, sebbene posto sui gneiss e micaschisti, fu molto gravemente danneggiato. Secondo le informazioni del sig. Orueta [1] vi furono 20 case distrutte, oltre 100 in istato più o meno rovinoso e 7 persone ferite.

*Frigiliana* ha pure sofferto poco meno di Algarrobo, fortunatamente però non vi

[1] Opera cit. pag. 18.

furono disgrazie personali. Crollarono specialmente le case della parte sud-ovest del paese, situate presso l'orlo del terrazzo che scende al torrente. Parecchie case crollarono e rimasero inabitabili, tra cui una torre antichissima del tempo dei Mori. Il paese è posto in pendìo sopra il conglomerato terziario molto compatto.

*Sedella, Salares, Competa* ecc. — Sedella, sebbene lontana dall'epicentro press' a poco come Canillas d'Aceituno, soffrì molto meno certamente perchè posta sopra terreno più consistente e più omogeneo formato da rocce cristalline antiche. In Sedella vi furono 13 edificî distrutti e circa 100 che abbisognano di notevoli riparazioni.

Soffrirono ancora meno Canillas d'Albaida, Archez, Corumbela, Vinuela, Portagalejo, Rubite, tutti costruiti sulle rocce cristalline antiche.

Salares, posta a circa metà via tra Sedella e Canillas de Albaida soffrì più di ambedue questi paesi. Sopra 400 case ne crollarono 23 e 300 rimasero lesionate più o meno gravemente.

Infine in Cómpeta sopra circa 850 case, 25 rovinarono totalmente e 300 rimasero inabitabili e minaccianti rovina.

Nella Sierra Almijara, 7 chilometri circa a nord-est di Cómpeta, il terremoto ha sradicato 140 piante di pino (1).

*Otivar, Lenteje.* — Questi paesi sono al limite sud-orientale dell'area mesosismica. In essi non vi furono disgrazie personali (2), ma molte case crollarono in parte e tutte le altre patirono lesioni considerevoli. Nella chiesa di Lenteje i muri furono gravemente danneggiati; invece soffrì poco il tetto, perchè formato da impalcatura con travatura robusta e recente.

Poco sotto Lenteje si staccò dalla roccia viva calcarea e rovinò verso nord-ovest un grosso masso di calcare di oltre 600 metri cubici di volume.

*Albuñuelas, Murchas, Saleres* ecc. — Albuñuelas, questo infelice paese si trova sull'orlo di un alto terrazzo formante la sponda settentrionale del torrente Izbor, che in questo punto corre press' a poco da est ad ovest. Tale ubicazione e la natura franosa del terreno marnoso, incoerente ed eterogeneo su cui poggiano immediatamente le case, aumentarono grandemente gli effetti disastrosi del terremoto. Le case dove morirono sepolti sotto le rovine il rev. Parroco ed il maestro di Albuñuelas stavano proprio sull'orlo del precipizio. Anzi pare che ivi il terreno subisse piccoli movimenti e minacciasse di scoscendere anche prima del terremoto, poichè il povero Parroco, pochi giorni avanti la catastrofe, scriveva al parroco del vicino paese di Durcal: « El mejor dia me voy á encontrar en esa segun lo que *anda este suelo* » (3). Si aggiunga che gli edificî di Albuñuelas, di Murchas e degli altri paesi dell'alta valle del Guadalfeo dovevano essere già lesionati e disposti a crollare più facilmente di quelli degli altri punti dell'area mesosismica, perchè da non molto tempo (per esempio, nel 1786) tutta questa regione era stata colpita da violentissimi terremoti, i quali non estesero i danni fino ai paesi dei due versanti della Sierra Teieda. Infine si ricordi aver noi già avvertito,

(1) Non avendo visitato le località citate in questo paragrafo, abbiamo presi questi dati nella Memoria citata del sig. Orueta.

(2) Secondo Cesareo Martinez (op. cit.) vi furono alcune disgrazie personali in Otivar.

(3) *Informe*, l. c. pag. 88.

più sopra, che per la natura e la direzione degli strati il movimento sismico dal centro di scuotimento si propagò più facilmente verso ovest che non nelle altre direzioni, e che Albuñuelas non venne colpita solamente dalle onde sismiche dirette provenienti dal centro, ma anche da scosse riflesse, le quali urtando le case già barcollanti ne determinarono più facilmente la caduta.

Per tutte queste ragioni non abbiamo creduto necessario ricorrere all'ipotesi di un secondo centro di scossa per spiegare le rovine di Albuñuelas e dei paesi vicini.

Ad Albuñuelas sopra circa 2500 abitanti 102 morirono sepolti sotto le macerie al momento della scossa; e parecchi altri perirono in seguito alle ferite riportate. Furono circa 500 le persone più o meno gravemente ferite.

I disastri maggiori avvennero nella parte alta ed occidentale del paese, dove quasi tutte le case crollarono, alcune in parte, altre interamente. Un poco meno ha sofferto il *barrio de bajo*, cioè la parte più bassa ed orientale.

Pochi chilometri a sud di Albuñuelas, sui fianchi della Sierra de las Guajaras, si vedono grossissimi massi di rocce (uno di non meno di 30 m. di lato) franati per il terremoto. Altri numerosi e grossissimi massi attestano l'azione violenta di antichi terremoti.

In Albuñuelas alcune fonti disseccarono, altre invece aumentarono di quantità. Ci dissero che poco fuori del paese escì dal suolo *arena*.

Pochi chilometri ad oriente di Albuñuelas, sempre nel bacino dell'alto Guadalfeo, si trovano i paesi di Saleres, Chite, Murchas. Nei primi due rovinarono molte case e vi furono alcune persone ferite, nell'ultimo il disastro fu molto maggiore essendo morte nove persone e ferite 13.

### 2. *Area isosismica rovinosa.*

*Malaga e dintorni.* — A Malaga quasi tutte le case soffrirono lesioni in generale però leggere. Nella Cattedrale, edificio solidissimo e non molto antico (troppo alto però specialmente per una città soggetta a terremoti), si aprì una spaccatura nell'arco posteriore all'altare maggiore ed alcune fessure minori anche in altri archi. Anche nella chiesa de los Martires si aprirono solo piccole spaccature negli archi che dividono la navata centrale dalle laterali. Nel fianco nord-nord-est sud-sud-ovest del campanile si formò una fessura e caddero alcuni pezzi di cornice dall'angolo ovest-sud-ovest, ossia prossimo all'azimut della scossa. È notevole la regolarità con cui avvennero le rotture nella chiesa della SS. Trinità, di forma rettangolare a tre navate. Tutti gli architravi delle due navate laterali si spaccarono verso il mezzo, e nei muri posteriore ed anteriore dell'edificio si aprirono spaccature poste in un medesimo piano con quelle degli architravi. Nella navata principale di mezzo si aprirono solo due degli archi e poco sensibilmente. Infine anche nelle pareti laterali si formarono alcune spaccature una in quella di ovest, e due in quella di est. La chiesa dell'Aurora è rimasta pericolante, sicchè si dovette abbatterla. Similmente vi furono alcune centinaia di case così gravemente lesionate che si dovettero demolire in parte o totalmente. Si calcolò a 16 milioni i danni arrecati dal terremoto negli edificî pubblici e privati.

Il terremoto non danneggiò uniformemente le diverse parti di Malaga. I danni

furono minori nella parte orientale della città, verso il castello del Gibralfaro, fabbricato sugli schisti paleozoici, e maggiori nel rimanente della città costruita sulle argille plioceniche.

Quando noi visitammo Malaga, verso la fine di aprile, le case più danneggiate erano già demolite; tuttavia nelle poche in cui i danni erano ancora visibili potemmo constatare l'azione dell'onda sismica principale diretta nord-est sud-ovest, vedendo in parecchie case lesionato di preferenza l'angolo sud-ovest.

Tutti i paesi situati tra Malaga ed il torrente Velez, il quale limita ad ovest la zona disastrosa, hanno sofferto press' a poco come la capitale. Essi si trovano un poco più vicini al centro di scuotimento, ma soffrirono relativamente meno, perchè situati sopra terreni cristallini antichi. A Totalan, per esempio, si aprirono numerose spaccature nelle pareti della chiesa e di tutte le case anche meglio costruite; tuttavia nessuna rovinò al momento della scossa, e perciò non vi furono disgrazie personali. La torre della chiesa è pericolante, perchè presenta oltre numerose spaccature tutti e quattro gli archi dell'ultimo piano aperti all'alto.

Il confine sud-occidentale della zona rovinosa non oltrepassa, in generale, il corso del Guadalhorce. A Cártama però, sebbene posta sulla sponda occidentale di questo fiume, il terremoto fu veramente rovinoso. Infatti 18 case crollarono in parte o totalmente; altre 33 restarono pericolanti, ed 89 lesionate più o meno considerevolmente. Sicchè dalle stime fatte si calcolò essere necessarî circa 143000 lire per riparare i danni cagionati dal terremoto.

Cártama, tenuto calcolo della sua maggiore lontananza dal centro, soffrì relativamente più di Malaga. Ciò avvenne in primo luogo, perchè tutto il paese è costruito sopra marne ed argille plioceniche; in secondo luogo, perchè venne colpita non solo dalle onde sismiche dirette, ma da altre riflesse in differenti direzioni (vedi sopra: *Direzione delle scosse*).

*Paesi costieri tra Malaga e Motril.* — In generale in questi paesi il terremoto raggiunge appena il grado di rovinoso, ed i danni furono non maggiori che a Malaga. A Torre del Mar, a Torrox, a Nerja, ad Almuñecar ed a Motril poche case rovinarono in parte od in tutto al momento della prima scossa. Molte però restarono gravemente lesionate, sicchè caddero poi per le repliche. Nel giorno 8 maggio, per esempio, trovandoci noi ad Almuñecar, rovinò una delle case pericolanti per effetto di alcune leggere scosse sentite durante la mattina.

La sola disgrazia personale accaduta in questi paesi fu la morte di un carabiniere, il quale, trovandosi in una via di Nerja al momento del terremoto, venne colpito mortalmente da un pezzo di muratura cadutogli addosso.

Ad Almuñecar dopo il terremoto in alcuni pozzi aumentò notevolmente la quantità dell'acqua, ed in qualcuno si fece anche torbida.

*Colmeñar, Riogordo.* — Colmeñar, paese di 1300 a 1400 abitanti, ebbe 28 case rovinate totalmente od in gran parte, e 200 lesionate più o meno considerevolmente. La parte bassa del paese soffrì più che quella alta.

A Riogordo, paesello di 800 abitanti, crollarono totalmente 8 case, e molte altre restarono lesionate. All'ultimo piano della torre della chiesa tutti e quattro gli archi si spaccarono all'alto.

*Loja, Salar, Moraleda, La Malà.* — A nord dell'epicentro, discendendo verso il rio Genil, le zone a mano a mano meno danneggiate si succedono con maggior regolarità che sul versante opposto della Sierra Tejeda. Alla zona *disastrosissima* di Alhama e Santa Cruz succede quella *meno disastrosa* di Cacin e del Turro, poi quella *rovinosa* di Moraleda de Zafayona, di Salar e di Loja, infine al Genil comincia quella *fortissima* di Huétor Tejar, Vilanueva de Mesia ecc.

Presso Loja le sorgenti del Riofrio dopo il terremoto diedero acqua calda e di color cioccolatte (1).

Similmente procedendo verso nord-est, ossia nella direzione di Granata, si trova Ventas de Huelma, dove il terremoto fu disastroso, ma meno che a Cacin, poi La Malà dove fu solamente rovinoso.

*Durcal, Nigüela, Lanjaron* ecc. — Ad oriente di Murchas cessano subito i grandi disastri, sicchè nei paesi di Durcal, Mondujar, Beznar, Nigüela, Lanjaron ecc. il terremoto non oltrepassò il grado di *rovinoso*. A Durcal crollarono alcune case ed altre restarono pericolanti o percorse da fratture più o meno considerevoli. La sola disgrazia accaduta fu quella di un uomo rimasto sepolto in parte sotto le macerie, dalle quali potè escire quasi illeso. La chiesa patì lesioni piuttosto gravi.

A Lanjaron soffrirono danni molto considerevoli lo stabilimento dei bagni in costruzione, la chiesa e la casa comunale (2).

A Nigüela crollarono varie case e lungo il Rio Torrente si apersero spaccature nel suolo. In questa regione, un chilometro circa ad ovest del ponte d'Ifo, dalle fessure di una roccia calcarea sgorgò una sorgente abbondante di acqua calda (3).

### 3. *Area isosismica fortissima.*

Granata ha sofferto molto meno di Malaga. In essa solo rovinarono in parte alcune case antiche e mal costruite. Le altre però sono generalmente lesionate. Nella cattedrale caddero molti calcinacci dalla vôlta e la cima di una delle piccole piramidi che ne ornano il frontone esternamente. I famosi monumenti moreschi dell'Alhambra e del Generalife non soffrirono quasi nessun danno. Simili sono gli effetti del terremoto nella *Vega* e nelle altre regioni presso Granata; solo eccettuando Güevejar di cui parleremo tra poco. A Priego vi furono due fanciulli morti e parecchi feriti per le contusioni ricevute in teatro dagli spettatori che si accalcarono tumultuosamente alla porta per escire.

Verso occidente la zona isosismica fortissima si stende dal Guadalhorce al Guadalquivir.

Ad Alhaurin el Grande non caddero case, ma si aprirono molte spaccature nei muri, specialmente nella parte bassa ed orientale del paese. Nella parte alta, dove le case poggiano sopra un calcare spugnoso, abbastanza consistente ed omogeneo, il terremoto si sentì con forza molto minore.

(1) C. Martinez, op. cit. 49.

(2) C. Martinez, op. cit. pag. 51.

(3) Verso la metà di febbrajo 1885 F. Fouqué trovò la temperatura di quest'acqua a 225° C. (*Comp. Rend. de l'Acad.* Paris 2 mars, 1885).

Ad Estepona i danni furono un poco maggiori, sebbene più lontani dal centro di scuotimento, e ne abbiamo già accennati i motivi (vedi sopra: pag. 163).

Ad Osuna nella chiesa collegiale ed in quella di San Francesco si aprì qualche fessura e si allargarono quelle antiche. Se ne formò una nel campanile, sebbene riattato da poco tempo. Le fessure si osservano specialmente nei muri nord-sud, diretti normalmente alla direzione dell'onda sismica che fu circa est-ovest.

A Cordova nella chiesa di San Lorenzo rovinò il voltino del piano superiore del campanile, e si aprirono alcune fessure nei muri dell'edificio. Anche parecchie case private restarono lesionate.

A Siviglia le lesioni furono un poco minori che a Cordova; si può quindi ritenere che con Siviglia usciamo dalla zona isosismica fortissima.

*Güevejar.* — Questo è il solo paese fuori dalle curve isosismiche disastrosa e rovinosa, dove siano avvenuti importanti spostamenti di terreno. Güevejar si trova sul pendio della Sierra de Cogollos, 8 o 9 chilometri a nord di Granada. Tanto a Güevejar come negli altri paesi compresi tra esso e Granata, il terremoto si sentì con violenza non sufficiente per far crollare le case, ma solamente da lesionarle più o meno considerevolmente. In Güevejar, per esempio, al momento della prima scossa caddero pochi fumajoli, si apersero spaccature nelle pareti delle case, ma nessuna rovinò. In molte abitazioni gli oggetti mobili situati sui tavoli e su altri sostegni non caddero a terra.

Pur troppo però dopo il terremoto molte case situate nella parte alta del paese si sfasciarono ed alcune crollarono in parte o totalmente. Per intendere come sia avvenuto ciò, bisogna conoscere l'ubicazione e la natura del suolo su cui poggia l'infelice paese. Il nucleo della Sierra Cogollos è formato da rocce calcaree. Il fianco del monte è ricoperto fino ad una certa altezza da un terreno marnoso misto ad un abbondante prodotto di sfacelo, dal quale emerge la roccia calcarea formando una rocca dirupata e scoscesa denominata il *Castillo*. Pare che tra questo terreno superficiale ed il calcare mesozoico si insinuino gli strati d'un calcare marnoso in banchi fortemente inclinati a nord-ovest. In ogni modo quello che è certo si è che questo terreno superficiale marnoso e di sfacelo, su cui si trova Güevejar, adagiato in forte pendio e poco aderente alla roccia calcarea sottoposta, deve trovarsi in un equilibrio poco stabile. C'è difatti tradizione che già qualche secolo fa il suolo di Güevejar sia scivolato in basso, per effetto di un terremoto danneggiando gravemente il paese. Sotto Cogollos poi, poco lungi da Güevejar, si vedono le traccie di antichi scoscendimenti del suolo, determinati da terremoti o dalla natura poco stabile del terreno stesso.

Orbene, ecco cosa avvenne in seguito alla scossa violenta del 25 dicembre. Appena dopo il terremoto in alcune case non si poterono più aprire gli usci essendosi il pavimento alzato e gonfiato sensibilmente. Alla mattina del 26 si vide un lungo solco apparire nel terreno ad un centinajo di metri circa sopra il paese. Quel solco, dapprima piccolo, a poco a poco ingrandiva, finchè dopo alcuni giorni si trasformò in una larga e profonda spaccatura. Intanto, a mano a mano che il solco ingrandiva, si aprivano nuove spaccature nelle pareti delle case e si allargavano quelle preesistenti, finchè alcune crollarono ed altre rimasero orribilmente fratturate e pericolanti. Verso

la fine di maggio vedemmo nella parte ovest-nord-ovest e più alta del paese una casa crollata per metà, e con un muro ancora in piedi ma inclinato di 10 a 12 gradi verso ovest-nord-ovest. Parecchie altre erano in piedi, ma rese inabitabili dalle gravissime lesioni. Evidentemente, al momento della scossa del 25 dicembre, il terreno mobile ed incoerente su cui poggia Güevejar si è staccato dalle rocce calcaree sottoposte ed è disceso lentamente in basso per parecchi metri. Verso la fine di maggio l'abbassamento del terreno in corrispondenza alla grande spaccatura era di una ventina di metri. Verso il centro essa risulta da 4 o 5 crepacci irregolari, ma quasi paralleli tra loro, e diretti est-ovest. La spaccatura circonda con forma paraboloide il paese ad ovest, sud ed est.

Una massa di parecchi chilometri quadrati di terreno poco coerente e poco omogeneo non poteva scivolare in basso per diversi metri senza spaccarsi, sollevarsi e gonfiarsi in alcuni punti per spinta laterale, ed abbassarsi in altri. Probabilmente la parte alta del paese si trovò sopra una porzione di terreno, che lentamente si gonfiava o piegava; ecco perchè si alzava il pavimento delle case, e ingrandivano le spaccature, si inclinavano i muri a mano a mano che ingrandiva il distacco del terreno sopra il paese. E nel medesimo tempo nel terreno, che sotto al paese scende con rapido pendio al Rio Güevejar, si aprirono a poco a poco molte spaccature, alcune delle quali avendo incontrato sulla propria direzione dei grossi olivi, li spaccarono pel lungo, rimanendo le due metà della pianta sui due labri della spaccatura. La metà di uno di questi olivi si è trasportata lontana 1 m. e $^3/_4$ circa dall'altra metà, verso nord-ovest ossia verso il Rio; e la metà di un altro si è pure mossa per un metro circa verso nord-nord-ovest.

Sebbene il movimento generale del terreno di Güevejar sia avvenuto da monte a valle cioè dal paese verso il Rio sottoposto, pare tuttavia che presso quest'ultimo siasi verificato anche un abbassamento in senso contrario forse determinato da un parziale sprofondamento ovvero da una specie di rinsacco subìto dalla massa scivolata per un ostacolo incontrato a valle. Presso il Rio, infatti, si osservano parecchie spaccature nel suolo parallele e colla convessità e la parte più elevata non più a monte, come tutte le altre, ma a valle (vedi fig. 11, tav. IV).

### 4. *Riepilogo dei danni.*

Dalla statistica dei danni pubblicata nella Gaceta de Madrid del marzo 1885 dalla Commissione nominata dal governo spagnuolo per lo studio del terremoto, risulta che nelle due provincie di Malaga e di Granata vi furono:

4400 case rovinate totalmente; 6316 case rovinate parzialmente o minaccianti rovina; 6463 case lesionate. In tutto quindi sono 17179 case più o meno gravemente lesionate (1).

(1) Secondo i dati raccolti dal Duca di Mandas, R.° Commissario incaricato dal Governo per la distribuzione dei soccorsi, il numero degli edifici rovinati o che minacciano rovina sarebbero circa 28 mila, i morti 745 ed i feriti 1253.

Le disgrazie personali, secondo i dati raccolti da noi stessi sul luogo e dalla Commissione spagnuola, furono le seguenti:

| | morti | feriti gravi |
|---|---|---|
| Alhama | 330 | 502 |
| Arenas del Rey | 118 | 253 |
| Albuñuelas | 102 | 500 |
| Ventas de Zafarraya | 77 | 7 |
| Periana | 40 | 35 |
| Zafarraya | 25 | 86 |
| Jayena | 17 | 5 |
| Santa Cruz de Alhama | 13 | 8 |
| Murchas | 9 | 13 |
| Velez-Malaga | 6 | 16 |
| Alcaucin | 6 | 50? |
| Canillas d'Aceituno | 5 | 7 |
| Jatar | 2 | 40? |
| Alfarnatejo | — | 13 |
| Algarrobo | — | 7 |
| Loja, Salar, Mecina Fondales, Cacin | — | 12? |
| Totale | 750 | 1554 |

### 5. *Conclusioni derivanti dallo studio precedente.*

#### A) *Effetti dinamici sugli edificî.*

1° Il terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 fu disastroso, inferiore però ai grandi terremoti italiani del 1456, del 1693, del 1703, del 1783, del 1805, del 1857 ecc. Nel presente terremoto i danni materiali furono grandi perchè le rovine si estesero a parecchie città (Malaga, Velez-Malaga, Alhama ecc.), ma le disgrazie personali relativamente poche. Infatti il 28 luglio 1883 in pochi paesi dell'isola d'Ischia vi furono 2333 morti, e nella sola Casamicciola 1800, ossia quasi la metà degli abitanti. In Andalusia invece ad Arenas del Rey vi fu il 9 per cento di vittime, e ad Alhama neppure il 4. Questo numero relativamente piccolo di vittime umane nella catastrofe del 25 dicembre si deve, secondo noi, specialmente alla circostanza che nessuno dei paesi colpiti, forse neppure Ventas de Zafarraya, siasi trovato proprio all'epicentro. Perciò abbiamo visto che la massima intensità della scossa, e conseguentemente le maggiori rovine e lo sfasciarsi delle case, non si verificò nella prima fase sussultoria della scossa, ma nella seconda ondulatoria. Sicchè la generalità delle persone, dopo avvertito il rombo ed il cominciare del sussulto, ebbero tempo di fuggire all'aperto prima che le case crollassero. Probabilmente un'altra causa della relativa limitazione degli effetti disastrosi del terremoto si deve cercare nell'ampiezza, non grande delle onde sismiche. Osserva, infatti, giustamente il Lasaulx [1] che nei

[1] *Die Erdbeben*, nell'Handwörterbuch der Min., Geol. ecc. t. I. Breslau 1884.

terremoti a centro poco profondo (come per esempio fu quello di Casamicciola del 28 luglio 1883), nei quali la velocità di propagazione è piccola, l'ampiezza delle onde dev'essere grande; e che la maggiore ampiezza nelle oscillazioni produce gli effetti più disastrosi. E tale è appunto il caso del terremoto ischiano del 1883. In quello andaluso invece abbiamo le circostanze opposte, cioè: notevole profondità del centro e grande velocità di propagazione, quindi piccola ampiezza delle oscillazioni e non grande azione distruggitrice.

2° Dallo studio della distribuzione dei danni nel presente terremoto risultò più che mai evidente la necessità di non confondere la distribuzione dell'*intensità* del movimente sismico con quella degli *effetti disastrosi* ch'esso produce alla superficie del suolo. Chi può dubitare, per esempio, che il movimento sismico non sia arrivato con eguale intensità al sottosuolo del paese di Jatar, crollato in gran parte ed alla villa Branchart, prossima ad esso, rimasta quasi perfettamente incolume? Ma il paese di Jatar è situato sul travertino e sul conglomerato pliocenico, invece la villa Branchart è posta sulla dolomia; quindi il medesimo movimento sismico si propagò attraverso quest'ultima con grande uniformità, non determinando sussulto di rimbalzo, o movimenti e spostamenti parziali di massa; i quali invece dovranno essersi verificati quando il moto sismico sotto il paese di Jatar passò dalle rocce cristalline profonde ai travertini ed ai conglomerati.

È chiaro che per una simile ragione entro l'area mesosismica il terremoto cagionò solo poche rovine e nessuna vittima a Canillas d'Albaida, Archez, Corumbela, Vinuela, Portagalejo ecc., essendo tutti questi paesi situati immediatamente sopra le rocce antiche cristalline, senza l'intermezzo di rocce superficiali moderne.

Nel terremoto ischiano del 28 luglio 1883 non fu meno evidente questa grande influenza della natura del suolo superficiale sugli *effetti superficiali* del terremoto [1]. Là si videro edificî crollati totalmente, posti sopra tufi ed aggregati poco coerenti ed a poche centinaja di metri di lontananza case e muriccioli a secco intatti, situati sopra banchi di trachite.

Leopoldo Pilla fu uno dei primi che studiò accuratamente i rapporti esistenti tra gli effetti dinamici dei terremoti e la natura e forma del suolo [2]. Egli, esaminando le località colpite dai terremoti calabri del 1835-1836, e dal terremoto toscano del 1846, trovò che a parità di altre circostanze le scosse furono più disastrose sopra le rocce friabili e cedevoli del terreno quaternario e del terziario recente, principalmente se collocati sopra poggi più o meno elevati invece di trovarsi in estese pianure [3].

Riassumendo quanto abbiamo detto nel presente capitolo, le cause per cui i danni del terremoto andaluso furono tanto diversi in paesi vicini tra loro o posti ad eguale distanza dal centro di scuotimento, sono le seguenti:

a) *La natura del suolo, su cui poggiano immediatamente gli edificî, e la sua forma.* — Rimasero assai più danneggiati i paesi edificati direttamente su

[1] G. Mercalli, *L'isola d'Ischia ed il terremoto del* 28 *luglio* 1883, pag. 44.

[2] Già prima del Pilla fecero simili osservazioni il Poli nello studio del grande terremoto del 1805, ed il Vassali-Eandi in occasione dei terremoti piemontesi del 1808 (*Mem. de l'Acad. imp. de Turin*, an. 1808).

[3] L. Pilla, *Istoria del terremoto che desolò la costa toscana il* 14 *agosto* 1846.

lembi di sfacelo, su brecce, marne, travertini, ed in generale sopra roccie poco consistenti e di poco spessore, specialmente se sovrapposte a formazioni antiche di rocce compatte ed omogenee; e quelli costruiti presso l'orlo delle incisioni praticate dai torrenti nei conglomerati e nelle molasse terziarie. Invece soffrirono poco i paesi che poggiano direttamente su rocce calcaree o cristalline di grande spessore. I danni poi furono relativamente massimi dove il suolo, oltre risultare da rocce poco consistenti e di piccolo spessore, si presenta anche in forte pendio (Güevejar). Onde ci parve di poter stabilire che *la trasformazione in movimento di massa del moto molecolare, trasmesso dalle profonde ed omogenee formazioni, fu tanto più disastrosa quanto minori erano lo spessore, la omogeneità e la continuità del terreno superficiale.*

b) *I movimenti riflessi.* — A parità di circostanze soffrirono maggiormente i paesi dove, come ad Albuñuelas, arrivarono oltre le onde sismiche dirette, quelle riflesse, da rocce di diversa natura e più elastiche di quella su cui poggia il paese.

c) *Le fratture e le cavità sotterranee,* le quali in alcuni casi, frapponendosi tra il centro sismico ed un dato paese impedirono la trasmissione del movimento sismico; in altri casi invece aumentarono gli effetti disastrosi determinando parziali sprofondamenti e spostamenti dei terreni superficiali.

d) *La natura delle costruzioni.* — Nell'Andalusia e specialmente in montagna, dove il terremoto infuriò maggiormente, le case sono costruite pessimamente riguardo alla solidità. Le case rurali e dei poveri sono fatte con pochissima calce e spesso anche con sola argilla, in alcuni luoghi mista a gesso non cotto. Sono vere case a *secco,* che sarebbero crollate anche per un urto molto meno violento di quello della sera 25 dicembre. In Malaga, per esempio, le case rovinate sono quelle antiche costruite in tale maniera. Gli edificî moderni e ben costruiti, anche molto alti, come per esempio, il grande Hôtel Alameda e la Cattedrale, che pure è sproporzionatamente alta, soffrirono solo lesioni di poca importanza. Nella stessa città di Malaga i muri recenti e solidissimi del mercato pubblico non presentano neppure la più piccola fessura. Per citare un altro esempio, a Durcal il sig. Segretario comunale mi diceva che le case della classe povera avevano sofferto molto più di quelle delle classi benestanti.

e) *I precedenti terremoti.* — L'Andalusia essendo un paese molto soggetto ai terremoti i muri delle case erano già più o meno percorsi da fessure chiuse con poca calce e nascoste dall'imbiancatura, ma pronte a riaprirsi per nuove scosse. Come si rileva dal *catalogo* dei passati terremoti andalusi, i paesi della zona Albuñuelas, Murchas, Durcal, Motril ecc., furono negli ultimi cent'anni danneggiati da frequenti terremoti più che le altre parti dell'Andalusia (vedi sopra: *Parte II*ª). Ecco probabilmente il perchè nel 25 dicembre in detta zona i disastri furono relativamente maggiori che altrove, avuto riguardo alla distanza dal centro di scuotimento.

I risultati principali ottenuti dall'esame delle lesioni degli edificî in rapporto colla forma della scossa e colle proprietà architettoniche degli edificî stessi, possiamo così riassumerli:

a) Negli edificî rettangolari soffrirono maggiormente i muri diretti normalmente

alla direzione della *scossa principale;* quelli invece che presentarono una diagonale sul percorso della scossa principale, ebbero lesionati di preferenza gli angoli alle due estremità di detta diagonale, e poco danneggiate le altri parti.

b) Gli archi molto facilmente si aprirono verso il mezzo in corrispondenza alla loro parte più alta, e lasciarono cadere il serraglio; il quale molte volte si è solamente abbassato per il rapido riserrarsi dell'arco (tav. IV, fig. 6 e 9).

c) Delle chiese, dei campanili rovinarono specialmente le parti più elevate, e nelle case i piani superiori.

d) Le finestre ed in genere le aperture facilitarono la formazione di spaccature nei muri. Per esempio, in un fianco del campanile della chiesa maggiore di Alhama si vedono cinque spaccature, tutte partite da una sola finestra (tav. IV, fig. 8 e 9).

e) Le chiese con impalcatura tutta in legno (esempio quella di Ventas de Zafarraya e di Lenteje) resistettero molto più che quelle con vôlta in muratura.

Le più ovvie conseguenze pratiche, che derivano dalle cose esposte nel presente capitolo, e che dovrebbero servire di guida nella riedificazione dei paesi rovinati, sono le seguenti:

a) Costruire le case sulle rocce più compatte, più elastiche ed omogenee, calcaree e cristalline.

b) Dove non si può evitare di costruire su terreni terziarî e quaternarî, si cerchi almeno di tenersi ad una certa lontananza dall'orlo delle incisioni di erosione (*tajos*), e di schivare il suolo in sensibile pendio.

c) Non abitare grotte scavate in terreni poco consistenti, come si fa ora ad Arenas del Rey, a Ventas de Huelma, a Moraleda ecc.

d) Costruire le case con buon cemento calcareo e con un solo piano, al più due, oltre il pianterreno. Preferire le impalcature in legno alle vôlte in muratura, specialmente nelle chiese e negli altri edifizî pubblici.

e) Negli edificî ridurre più che sia possibile il numero delle aperture; e far in modo che la loro solidità risulti non tanto dalla grossezza dei muri, come dalla omogeneità di struttura di questi, e da una generale elasticità della costruzione.

### B) *Effetti dinamici sul suolo.*

Gli effetti dinamici del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 sul suolo vennero grandemente esagerati dalle prime relazioni dei giornali. Le notizie di montagne sollevate od abbassate, di valli chiuse e scomparse, e di altri simili straordinarî fenomeni, diffuse da essi in tutta Europa, sono prive di ogni fondamento. Non fu constatato nè da noi nè da altri nessun cangiamento permanente nell'altimetria del suolo entro l'area del terremoto, fatta astrazione delle masse superficiali scoscese al Guaro ed a Güevejar. Avvennero però molte frane e scoscendimenti, si aprirono spaccature nel suolo, in generale limitate ai terreni superficiali, e si verificarono parziali spostamenti e lenti o rapidi scivolamenti nei terreni terziarî e quaternarî.

I fenomeni presentati dalla circolazione sotterranea delle acque in conseguenza del terremoto, sono: 1° apparizione di acque termo-minerali nuove, alcune temporanee, altre perenni, in luoghi vicini a sorgenti simili preesistenti; 2° aumento permanente

di quantità o di temperatura nelle acque termo-minerali di Alhama e di La Malà; 3° intorbidamento temporaneo, aumenti e diminuzioni di qualità di molte sorgenti e pozzi di acqua dolce.

Abbiamo associato ai fenomeni dinamici del terremoto queste alterazioni della circolazione sotterranea delle acque, perchè riteniamo che esse siano effetti di fratture e di parziali spostamenti o franamenti di rocce, avvenuti sotterra al momento della scossa; onde vennero in alcuni punti ostruiti, in altri invece allargati o moltiplicati temporaneamente o permanentemente i condotti ed i piccoli meati, per cui l'acqua circola sotterra e giunge fino alla superficie.

## VIII.

## Repliche.

Dopo la grande scossa del 25 dicembre, i movimenti del suolo si ripeterono molto numerosi presso l'epicentro, diminuendo di numero e di intensità a mano a mano che si va lontano da esso, finchè fuori dell'area danneggiata le repliche mancarono totalmente o quasi totalmente.

Nella notte 25 al 26 dicembre ad Jatar il signor canonico Blanchard assicura di aver contato 110 repliche. Ad Alcaucin, a Ventas de Huelma, a Motril, a Cacin, a Durcal, a Malaga ecc., se ne contarono da 14 a 17; a La Malà, ad Albuñuelas circa 11, a Velez-Malaga, a Lenteje 9, a Frigiliana, Riogordo, Cártama da 5 a 7 ecc.

Le repliche della notte 25-26 furono sensibili, ma non violente. La più forte pare sia stata quella delle $2^h\,30^m$ ant. Tuttavia molti edificî, già sconnessi e pericolanti per la prima scossa, rovinarono per queste repliche o per quelle dei giorni seguenti.

Come si vedrà dal *catalogo* riportato più sotto, le repliche furono molte numerose, cioè quasi giornaliere fino a tutto il maggio; nel seguito non cessarono ma divennero molto più rare.

A Malaga ed a Granata si constatò che le repliche tenevano sempre una direzione press'a poco uguale a quella della prima scossa, cioè a Malaga dirette nord-est sud-ovest ed a Granada sud-ovest nord-est. A Durcal verso le 10 e $^1/_4$ pom. del 25 dicembre si sentì una scossa abbastanza forte, per cui nella chiesa fu visto cadere il leggìo della cantoria in direzione ovest alcuni gradi sud, che è precisamente il piano della prima scossa. A Nerja, trovandosi il sagrestano nella chiesa de Las Augustias, verso le 2 ant. del 26 dicembre, al momento di una scossa vide la statua della Vergine oscillare da nord-ovest a sud-est, ossia nel piano stesso della prima scossa (vedi sopra: *Direzione delle scosse*). Da questa costanza nella direzione delle scosse seguìte dopo quella disastrosa, si argomenta che il centro di scuotimento non si cambiò, e che però esse sono vere repliche di quest' ultima.

Anche la forma delle repliche più sensibili, nelle quali si potè distinguere diverse fasi, rassomiglia tanto a quella del terremoto disastroso, in modo da non potersi dubitare della comune origine. Infatti la scossa dell' 11 aprile, che fu la replica più violenta, al Palo cominciò, come il primo terremoto, con un movimento sussultorio, poi continuò con moti ondulatorî. Il signor ing. Jona a Malaga avvertì

tre movimenti diretti nord-est sud-ovest, crescenti di durata (il I di 1″, il II 1 e $^1/_2$, il terzo di 2″) e separati da due intervalli di riposo di $^1/_2$ secondo. Tanto al Palo come a Malaga durò da 5 a 6 secondi. Questa scossa si avvertì molto sensibilmente in tutta l'area mesosismica rovinosa, ed in gran parte della isosismica fortissima. A Canillas d'Aceituno si vide la cima di una tenda di ricovero oscillare tanto ampiamente da toccare quasi il letto sottoposto. Come si vedrà nel catalogo, il sig. Jona avvertì che a Malaga risultarono da due fasi separate da qualche istante di riposo le repliche seguenti: decembre 25, $11^h40^m$ pom., febbraio 5, alle $5^h40^m$; febbraio 21, $11^h25^m$; febbraio 27; marzo 8 e 25, aprile 2 ecc.

Anche le repliche di mediocre intensità nei punti non molto lontani dal centro di scuotimento, presentarono prima il rombo, poi la trepidazione, poi l'ondulazione come il primo terremoto. Citiamo per esempio la scossa del 29 aprile 1885.

*Elenco delle scosse sentite in Andalusia dal 25 dicembre 1884 al gennaio 1886.*

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1884 Dicemb. 24 | — | leggero, scossetta a Siviglia. |
| 25 | verso $2^h$ a. | leggero, a Colmeñar e nella stessa notte anche a Zafarraya. |
| » | tra $8^h.45^m$ e $9^h$ p. | terremoto disastroso nell'Andalusia. |
| » | 9.20 p. | leggero, ma ben sensibile al Palo (tra Malaga e Torre del Mar). |
| » | 9.35 p. | » » » |
| » | 10.10 p. | leggero, a Malaga. A Durcal fa cadere a terra alcuni oggetti. A Granata durò 2 o 3 secondi. |
| » | 11.25 p. | leggero, a Malaga: sensibile a Granata. |
| » | 11.40 p. | molto sensibile a Malaga, al Palo, a Granata ecc. A Malaga constò di due ondulazioni NE-SO separate da $\frac{1}{2}$ secondo di pausa. |
| 26 | 2 a. | leggero, al Palo ed a Granata. |
| » | 2.20 a. | abbastanza intenso, la più forte delle repliche della notte, al Palo, a Malaga, Granata, Frigiliana, Colmeñar, Alhendin, Estepona ecc. |
| » | 6.40 a. | leggero, al Palo, ad Estepona. |
| » | 10.3 a. | » al Palo. |
| » | 11 a. | » a Granata. |
| » | 2.57 e 5.32 p. | » al Palo, a Granata. |
| 27 | 3.30 p. | leggero, a Malaga. |
| 28 | 0.10 a. | » » |
| 29 | 7.25 a. | leggero, al Palo. Nella mattina scossa forte a Torrox. |
| » | 8 p. | » a Granata. |
| » | 9.15 p. | » a Malaga. |
| 30 | 6.45 p. | molto sensibile al Palo, a Malaga ond. NE-SO di $1''$ e $\frac{1}{2}$ di durata, leggero a Granata e forte a Velez-Malaga, Torrox, Archidona ecc. A Totalan parve forte quasi quanto la prima, ma molto più breve e solo di ondulazione. Sentita fortemente in tutta l'area danneggiata. |
| » | 8.30 p. | leggero, al Palo, a Malaga, a Granata. |
| » | 10.31 p. | leggero, al Palo. |
| 31 | 2.15 p. | leggero, a Malaga, Granata. |
| » | 4.35 p. | leggero, al Palo, a Malaga, a Granata. |
| » | 9.5 p. | leggero, a Malaga. |
| 1885 Gennaio 1 | 2.25 a. | leggero, a Malaga. Nel giorno una scossa su tutto il litorale di Valenza. |
| » | 2.15 p. | leggero, al Palo. |
| » | 10.10 p. | » a Malaga. |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Gennaio 3 | $0^h.10^m$ a. | abbastanza forte e lungo al Palo. A Malaga detonazione seguita da scossa forte, che cagiona nuove lesioni nelle case; sentita più violentemente ad Alhama ed a Velez-Malaga dove fa cadere molte delle case già danneggiate. Sentita fortemente ad Algarrobo, Comares, Canillas d'Aceituno, Casabermeja ecc. |
| » | 7.50 a. | leggero; a Granata. |
| » | 2.45 p. | leggerissimo, a Malaga. |
| » | 7.20 p. | al Palo abbastanza intenso e lungo; meno però di quello della notte precedente. A Malaga ond. NE-SO. |
| 4 | 2.25 e 3.15 p. | leggero, a Malaga. |
| 5 | 5.40 p. | alquanto intenso al Palo. A Malaga l'oscillazione fu molto sensibile diretta NE-SO, durata 2″ e $\frac{1}{2}$ e divisa in due fasi da $\frac{1}{2}$″ di pausa. A Granata fu pure molto sensibile e con movimento di trepidazione. Ad Alhendin precedette un rumore come di cannonata, non inferiore a quello della prima scossa. Questa scossa cagionò nuovi danni negli edificî già lesionati in tutta l'area gravemente danneggiata dalla prima scossa. A Granata moltissime persone escirono dalle case spaventate chiedendo a Dio misericordia (L'Imparcial). |
| » | 8.35 p. | sensibile al Palo, a Malaga. |
| 7 | mattina | sensibile a Loja (Giornali). |
| » | 3.30 p. | leggero, a Malaga ed al Palo. |
| 10 | 11.30 p. | a Malaga molte scossette deboli ripetutesi per 15 minuti. |
| 11 | 6 a. | leggero, a Malaga. |
| 12 | 5.45 a. | molto leggero, al Palo. Alle $6^h$ a. oscillazione che destò alcune persone a Granata. |
| » | 7.50 p. | a Malaga ond. NE-SO molto sensibile, durata 1″ e $\frac{1}{2}$; leggero al Palo. |
| 14 | 11.20 p. | leggero, a Malaga. |
| 16 | 8 a. | sensibile, a Granata. |
| 17 | 5 p. | » » |
| 19 | 1.45 a. | leggero, a Malaga. |
| 21 | 3.10 a. | » » |
| » | 11.25 a. | ond. sensibili NE-SO, dur. 3″ divise in due fasi da 1″ di pausa, a Malaga; abbastanza intenso e lungo al Palo. Sentita a Velez, Loja, Almuñecar ecc. |
| 22 | 7.17 p. | leggero, al Palo. |
| 23 | 6.50 a. | leggero, a Malaga. |
| » | 7.20 e 7.50 a. | leggerissimo, a Malaga. |
| 26 | 3.50 a. | leggero, a Malaga. |
| » | 10.30 p. | » al Palo. |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Gennaio 27 | $10^h.15^m$ a. | leggero, al Palo. |
| Febbraio 9 | 1.20 p. | leggeriss., a Malaga. |
| 13 | 2.15 e 4.15 a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 9.45 p. | leggeriss. ond. N-S, a Malaga. |
| 14 | 7.45 p. | leggero, al Palo. Verso le 8 p. ad Agron e ad Arenas del Rey rombo sotterraneo seguito senza interruzione da ondulazioni lente e molto sensibili durate 6″ a 7″ (Comptes Rendus Acad. de Paris, avril 20, 1885). |
| 15 | nel giorno | scossa di 4″ a Granata, Velez, Almuñecar (Laur, Echo des Mines, 22 fév. 1885). |
| 18 | 7.10 a. | due breviss. ond. di 1″ separate da 10″ di pausa, a Malaga. |
| 19 | 1.10 p. | a Malaga due ond. molto sensibili E-O, separate da $\frac{1}{2}$″ di pausa. Leggero al Palo. |
| 20 | 6.15 a. | leggero, a Malaga. |
| » | 6.50 a. | » al Palo. |
| 21 | 9.35 p. | leggero, a Malaga ed al Palo. |
| » | 11 p. | a Malaga due ond. molto sensibili NE-SO di 1′ e 1′ e $\frac{1}{2}$, separate da $\frac{1}{2}$″ di pausa. Alquanto intenso, al Palo. |
| 22 | 9.35 a. | leggero, a Malaga. |
| 23 | 10.20 a. | molto leggero, al Palo. |
| 24 | 0.10 a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 6.30 | leggero, di 1″, a Malaga. |
| 25 | 1.50 e 2.55 a. | leggero, Malaga. |
| 26 | 9.20 a. | abbastanza intenso e lungo, al Palo. Oscillazione debole NE-SO a Malaga. |
| » | 4.35 p. | leggero, a Malaga. |
| » | 8.10 p. | leggero di 1″, a Malaga. |
| 27 | 11.25 a. | scossa più forte di tutte le repliche anteriori; preceduta ed accompagnata da rumori sotterranei, a Malaga, Granata, Archidona, Loja ecc., ed in generale in tutta l'area fortemente danneggiata dalla scossa del 25 dicembre. Secondo il sig. Jona, a Malaga si sentì un ond. NE-SO di 1″, poi 1″ di pausa, poi un movimento sussultorio di 3″. |
| 28 | 9.20 a. | leggero di 1″, a Malaga. |
| » | 4.50 p. | molto leggero, a Malaga. |
| » | nel giorno | al Palo parecchie leggere scossette. |
| Marzo 1 | 9.10 a. | leggero, a Malaga. |
| » | 1.5 p. | » a Malaga. Nel giorno 1 diverse scossette al Palo. |
| 2 | 9.55 a. | leggero, a Malaga. Nel giorno 2 diverse scossette al Palo. |
| » | 11.15 a. | » » |
| » | 1.30 p. | » » |
| 8 | 4.8 a. | a Malaga 2 oscillaz. molto sensibili di 1″ separate da $\frac{1}{2}$″ |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| | | di pausa. Nel giorno, parecchie scosse ad Alhama (Giornali). |
| 1885 Marzo 8 | 6h.55m a. | leggerissimo E-O, a Malaga. |
| 9 | 8.5 a. | leggerissimo, a Malaga. |
| 10 | 9.40 p. | leggeriss., a Malaga. |
| 15 | 10.45 p. | » » |
| 16 | 10.10 a. | » » |
| 18 | 11.20 p. | » » |
| 19 | 6.35 a. | sensibile, sussultorio durato $\frac{1}{2}''$, a Malaga. |
| 21 | 9.5 e 11.10 a. | leggero, al Palo. |
| » | 4.10 p. | » » |
| 23 | 11.15 a. | » » |
| » | 1.10 p. | » » |
| 24 | 10.15 a. | molto leggero, al Palo. |
| » | 9.20 p. | abbastanza intenso, al Palo. |
| » | 11.15 p. | » » » e molto leggero a Malaga. Sensibile ad Archidona. |
| 25 | 2.33 a. | intenso, al Palo preceduto ed accompagnato da forte rombo. A Malaga due scosse ond. NE-SO separate da 1″ di riposo, durato 5″. Forse è questa scossa che i giornali dissero essersi sentita anche ad Antequera e Granata. |
| » | 5.10 p. | molto leggero, a Malaga. Verso sera scossa sensibile ad Archidona. |
| 26 | 10.30 a. | alquanto intenso, al Palo. |
| 29 | 3.10 a. | abbastanza intenso, al Palo; leggero, a Malaga. |
| » | 1.45 p. | leggero, al Palo. |
| 30 | 2.38 a. | alquanto intenso, al Palo. |
| Aprile 2 | 10.15 p. | abbastanza intenso al Palo, ed a Malaga dove durò 3″ e $\frac{1}{2}$ e risultò di due scossette ond. NE-SO separate da $\frac{1}{2}''$ di riposo. |
| 3 | 6.45 a. | piuttosto forte e preceduto da rombo al Palo, ed a Malaga dove durò 1″ e $\frac{1}{2}$. |
| 4 | 3.35 p. | al Palo, leggero. |
| 5 | 11.45 p. | leggerissimo, a Malaga. |
| 6 | 1.5 e 1.50 a. | leggerissimo, a Malaga. |
| » | 2.45 a. | » » |
| » | 1.30 p. | alquanto intenso, al Palo. |
| 7 | 5.20 a. | una sensibile ond. NE-SO, a Malaga. |
| » | 5.24 p. | alquanto intensa, al Palo. Dubitiamo che sia la stessa scossa segnata per Malaga alle 5h 20m a. |
| 8 | 7.5 e 7.35 a. | leggerissimo, a Malaga. |
| 9 | 7.50 e 8.20 p. | » » |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Aprile 11 | $4^h.55^m$ a. | molto forte in tutta l'area mesosismica e rovinosa del primo terremoto (vedi sopra: pag. 201-202. |
| » | 7.20 a. | leggero, al Palo. |
| » | 8.55 e 9.50 a. | molto leggero, al Palo. |
| 13 | 2.5 p. | molto leggero, al Palo. |
| » | 5.53 p. | » » » |
| 14 | — | al Palo dalle 7 a. alle 7 p. si contarono 9 leggere scosse. |
| 15 | 10.15 a. | leggere, al Palo ( nel 15 si sentirono al Palo anche altre |
| » | 1.40 e 10.10 p. | » » ( scossette più leggere. |
| 16 | 2.47 a. | leggero, al Palo. |
| » | 7.15 a. | » » |
| » | 1.15 p. | » » |
| 17 | 10.28 p. | alquanto intenso al Palo, dove alle $11^h40^m$ p. si sentì anche un forte rombo sotterraneo, senza scossa sensibile del suolo. |
| 19 | 1.29 p. | al Palo, alquanto intenso e formato da tre scosse separate da due corti intervalli di riposo ben marcati. A Malaga molto leggero sussultorio. |
| » | 7.33 p. | leggero, al Palo. |
| » | 9.35 p. | molto leggero, al Palo. |
| 23 | 11 p. | leggero con rombo sotterraneo, al Palo. |
| 24 | 11.33 p. | al Palo si sentì un rombo sotterraneo non forte ma abbastanza prolungato e senza sensibile movimento del suolo. |
| 27 | 1.15 p. | leggero, al Palo. |
| 28 | 3.15 a. | abbastanza intenso e preceduto da rumore sotterraneo al Palo; molto leggero a Malaga. |
| » | 4.50 a. | leggero, al Palo, molto leggero a Malaga. |
| » | 5.20 e 6.5 a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 11.54 a. | leggero, al Palo. |
| 29 | 3.45 p. | alquanto intenso e ben sensibile al Palo; leggero sussulto al Palo. Molto sensibile in tutta l'area mesosismica. Ad Arenas del Rey, a Canillas d'Aceituno rombo sotterraneo seguito da trepidazione e poi da ondulazione. Ad Alcaucin dopo il rombo vi fu solo l'ondulazione. |
| » | 4.20 p. | meno sensibile del precedente al Palo. |
| » | 5 p. | » » » |
| 30 | 10 a. | leggero, al Palo. |
| » | 1 e 1.15 p. | » » |
| » | 2 p. | » » |
| Maggio 1 | 11 a. | leggero, al Palo. |
| » | 1 p. | » » |
| » | 2.15 p. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 4.30 p. | » » |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Maggio 3 | 4$^{h}$.35$^{m}$ a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 6.10 a. | » » Verso le 7$^{h}$ e 30$^{m}$ a. scossetta avvertita da alcune persone ad Alhama. |
| 4 | 3.50 e 8.7 a. | leggero, al Palo. |
| » | 2.30 e 3 p. | molto leggero, al Palo. |
| 5 | 7.49 a. | alquanto intenso, al Palo. |
| 8 | 9 a. | leggero, al Palo. Ivi dalle 11$^{h}$45$^{m}$ a. alle 12 si sentirono cinque piccole scossette separate da intervalli da pochi minuti. Sentite ad Almuñecar. |
| » | 8.40 p. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 9.10 p. | sensibile ond. NE-SO, a Malaga. |
| » | 9.25 e 11.5 p. | leggeriss., a Malaga. |
| 9 | 1.20 e 4.20 a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 4.50 a. | sensibile, a Malaga. |
| » | 5.55 a. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 9.30 a. | due leggere scosse separate da un intervallo di pochi secondi al Palo. |
| » | 6.35 e 7.5 a. | leggeriss., a Malaga. |
| 11 | | al Palo tra le 11 e le 11 e 45$^{m}$ a. si sentirono tre leggere scosse e dalle 2 p. alle 5 p. se ne sentirono dieci. |
| 12 | 8.15 a. | sensibile, a Malaga. |
| 13 | 1.20 p. | leggeriss., a Malaga. |
| » | 1.50 p. | » » |
| 15 | 5.10 a. | » » |
| 17 | 6.15 a. | » » |
| » | 9.30 p. | » » |
| 18 | 3.5 a. | sensibile, a Malaga. |
| » | 4.15 a. | leggeriss., a Malaga. |
| 19 | 0.45 a. | abbastanza sensibile in Malaga, Jatar, Motril, Granata ecc. |
| » | verso 10.30 p. | leggero ad Alhendin ed a La Malà, Ventas de Huelma. |
| 22 | 7.54 a. | leggero, al Palo. |
| » | 5.50 p. | leggeriss., a Malaga. |
| 23 | 0.27 a. | » » |
| » | 8.29 e 11.4 a. | leggero, al Palo. |
| » | 3.52 p. | alquanto intenso con rombo sotterraneo, al Palo. |
| » | 5.20 p. | molto leggero, al Palo. |
| Giugno 18 | 12.54 p. | leggero, al Palo. |
| 21 | 8.53 p. | » » |
| 26 | 4.7 a. | alquanto intenso, al Palo. |
| Luglio 4 | 4.30 a. | leggeriss., a Malaga. |
| 7 | 9 a. | alquanto intenso, al Palo. |
| 13 | 9.15 p. | » » » |
| 29 | 2.54 p. | » » » |

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Agosto 9 | $4^h.55^m$ a. | alquanto intenso, al Palo. |
| 11 | tra 1 e 2 a. | abbastanza intenso e preceduto da forte e lungo rombo, al Palo. |
| 16 | 11.45 p. | leggeriss., a Malaga. |
| 17 | 2.30 e 3.35 a. | leggeriss., a Malaga. |
| 28 | 2.30 p. | abbastanza intenso, al Palo. |
| 31 | 5.15 p. | leggero, al Palo. |
| » | 9 p. | leggeriss., a Malaga. |
| Settembre 2 | 5.50 p. | leggero, a Malaga. |
| 3 | 6.45 a. | » » |
| 4 | 5.30 a. | » » |
| 9 | 11.20 a. | » » |
| 12 | 5.20 a. | » » |
| 19 | 6.2 p. | leggero, al Palo. |
| 21 | 11 p. | leggero, a Malaga. |
| 23 | 11.45 a. | » » |
| 28 | 6.40 a. | » » |
| Ottobre 13 | 5 a. | leggero, a Malaga. |
| » | 7.30 a. | a Malaga abbastanza forte, ond. E-O, di 4″, a due riprese. |
| 14 | 5.30 p. | leggero, a Malaga. |
| 16 | 14.30 a. | leggero, a Malaga. |
| 23 | 4 a. | » » |
| 26 | 0.20 p. | » » |
| 27 | nel giorno | piccola scossa, a Ronda (prov. di Malaga). |
| 28 | 5.30 a. | leggero, a Malaga. |
| Novembre 1 | 0.40 e 1.55 p. | leggero, a Malaga. |
| » | 2.30 p. | » » |
| 30 | 0.10 a. | » » |
| » | 2 a. | » » |
| Dicembre 11 | nella notte | scossa debole, a Malaga. |
| 12 | 6 a. | » » » |
| 29 | 3.30 a. | leggeriss., a Malaga. |
| 1886 Gennaio 3 | 0.3 a. | sussultoria, sensibile di 2″, a Malaga. |
| 12 | 5,34 a. | a Malaga una sensibile sussultoria di 2″. |
| 30 | 2.30 a. | a Malaga scossa sussultoria sensibile di 2″, più forte a Velez-Malaga. |

N. B. — Per la compilazione di questo Catalogo il rev. sig. prof. D. Eusebio Caballero del Collegio di san Estanislao ci comunicò tutte le notizie risguardanti il Palo, e l'egregio signor ing. M. Jona quelle di Malaga. Noi godiamo d'avere occasione di ringraziare ambedue questi signori della loro squisita gentilezza. Avvertiamo poi che le scosse segnate per il Palo sono tutte avvertite sensibilmente senza istrumenti; mentre quelle *leggerissime* di Malaga vennero segnate solo dal sismometro.

Il signor ingegnere M. Jona dal settembre al dicembre 1885 eseguì in Malaga delle osservazioni all'*ascoltatore endogeno* del prof. De Rossi, e notò anche nei giorni mancanti di scosse sensibili dei rumori sotterranei non provenienti da influenze esteriori.

Ecco le osservazioni che gentilmente ci comunicò:

| DATA | ORA | OSSERVAZIONI |
|---|---|---|
| 1885 Settembre 26 | 8$^{h}$ a. | Raschiamento. |
| Ottobre 27 | 3$^{h}$.45$^{m}$ p. | Scoppiettio. |
| Novembre 2 | 10 a. | Scoppiettio come di fucilate. |
| » | 4 p. | Raschiamento, soffi. |
| 4 | 8 a. | Soffi secchi. |
| 18 | 8 a. | Raschiamento. |
| 26 | 4.30 p. | » |
| » | 7.30 p. | » |
| 27 | 10.20 a. | » |
| 30 | 4 p. | Forte raschiamento. |
| » | 5 p. | Raschiamento. |
| Dicembre 9 | 3.50 p. | » |
| 13 | 8 a. | Forte raschiamento. |

Le repliche registrate nel precedente *Catalogo* sono circa 260, e quasi tutte si sentirono fino a Malaga o nei dintorni. Ma, com' è naturale, nei luoghi più vicini all' epicentro le repliche furono molto più numerose. Ad Jatar, per esempio, in aprile e nel maggio 1885 si sentirono quasi tutti i giorni piccole scosse od almeno rombi sotterranei.

Il ritmo, con cui si sono succedute le scosse nel periodo sismico andaluso, ci ricorda il succedersi delle fasi e delle esplosioni di una eruzione pliniana. Il periodo di attività si apre in ambedue i casi coll' esplosione d' intensità massima, a cui segue una serie di esplosioni minori, dapprima frequentissime (110 in una sola notte ad Jatar), poi a mano a mano più rare e più deboli. Spesso però la fase stromboliana nei vulcani è interrotta da qualche violento parosismo, per cui il periodo eruttivo diventa duplice, triplice ecc. Così anche nell'Andalusia le scosse violente del 27 febbraio e dell' 11 aprile segnano i massimi di due periodi sismici secondarii subordinati al primo e principale, cominciato il 25 dicembre.

## IX.

## Rapporti dei terremoti andalusi coi fenomeni endogeni di altre parti del globo.

Sarà interessante riassumere brevemente i fenomeni endogeni verificatisi sul globo e specialmente nel bacino mediterraneo dal dicembre 1884 al presente, per vedere in quali rapporti topografici e cronologici essi siano coi fenomeni sismici andalusi che stiamo studiando.

*a) Vulcani italiani.*

*Vesuvio.* — Il Vesuvio perdura da quasi dieci anni in stato di attività stromboliana moderata. Ebbe un breve eccitamento verso il 25 di novembre 1884, e sgorgarono poche lave verso il nord-ovest. Nel periodo dal dicembre 1884 all'aprile 1885, in cui avvennero le maggiori scosse del terremoto andaluso, il Vesuvio non presentò nè aumento nè diminuzione notevole di attività. Un altro incremento di attività, con emissione di una discreta quantità di lava, ebbe il Vesuvio dal 2 al 4 maggio 1885, ossia poco dopo la ripresa di attività sismica verificatasi in Andalusia nell' aprile.

*Etna.* — L'Etna nel dicembre 1884, e durante il 1885 rimase in attività molto moderata emettendo fumo ora più ora meno abbondante, talvolta anche con ceneri, arene e lapilli (1). Codesti eccitamenti in cui emise materie detritiche furono frequenti in gennajo ed in febbrajo e verso la fine di luglio. Nel 20 marzo e nel 9 e 10 novembre essi furono accompagnati da bagliori di luce. Mentre l'Etna era in quasi perfetta quiete, alcune scosse molto violente danneggiarono considerevolmente le case di Nicolosi nel 25 settembre e nel 2 di ottobre.

*Stromboli* e *Vulcano.* — Lo Stromboli nel dicembre 1884 e nel gennajo-febbrajo 1885 rimase tranquillo. In principio di marzo e specialmente dal 1 al 4 diede forti e spaventosi rombi. In giugno, nel 25 l'isola fu scossa da forte terremoto, e nel 28 a mezzodì avvennero due eruzioni di pietre e ceneri. In luglio fece sentire forti rombi quasi tutti i giorni.

*Vulcano.* — Dal dicembre 1884 fino al principio di gennajo 1886 rimase perfettamente tranquillo; solo verso la fine di marzo 1885 si sono aperti due nuovi fumajoli, sul fondo del cratere. Ma recentemente, il 10 gennaio 1886, si mise in forte eruzione: lanciò detriti e grossi massi. La cenere giunse fino a Lipari. Anche lo Stromboli nel 22 gennajo diede un forte rombo con gettito abbondante di pietre.

*Vulcani non italiani.* — Nel 17 aprile e nell'8 luglio erompe in violente eruzioni il vulcano Smeru dell' isola di Giava (2).

Nel 23 luglio cominciò una grande eruzione del Cotopaxi (Equatore) (3).

Prescindendo da queste eruzioni americane ed asiatiche, la cui coincidenza col periodo sismico andaluso è probabilmente solo casuale, registriamo invece come interessante il fatto che i focolari vulcanici italiani od erano in attività almeno moderata (Vesuvio, Etna e Stromboli) durante le scosse andaluse, o si misero in attività (isola Vulcano) prima che queste cessassero. Riteniamo poi degno di nota che anche i grandi terremoti iberici del 1680, del 1721-1722, del 1755-1757, del 1804, del 1828-1829 (v. sopra: Parte II) avvennero mentre il Vesuvio e l'Etna si trovavano in moderata attività stromboliana.

(1) Secondo le informazioni gentilmente comunicateci dal sig. prof. F. Cafiero, direttore dell'Osservatorio meteorico di Riposto, nel dicembre 1884 il cratere centrale dell' Etna diede per 17 giorni eruzione abbondante di fumo, per 6 giorni eruzione meno abbondante, e per 8 giorni rimase coverto; e nel gennaio 1885 diede eruzione abbondante di fumo per 13 giorni, meno abbondante per 9 giorni, e rimase coverto per 9 giorni.

(2) *Nature*, june 25, august 27, 1885.

(3) *Nature*, aug. 20, sept. 3.

*b) Terremoti.*

In Italia nel decembre 1884 e nel gennajo 1885 in coincidenza col principio del periodo sismico andaluso, si verificarono solo pochi terremoti sensibili; ma in compenso furono molto energici e continuati i moti microsismici, specialmente nell'Italia centrale. A Velletri le piccole scossette, avvertite dai delicatissimi strumenti del prof. Galli, cominciarono il 14 dicembre, aumentarono sino al 20, diminuirono nel 21 e 22, per aumentare di nuovo fino a raggiungere il massimo, di 63 scossette in un giorno, nel 13 gennaio (1).

Col 18 dicembre cominciarono le agitazioni microsismiche nell'Italia centrale: nel 20 avvenne in Basilicata un terremoto che non cagionò danni, ma molto spavento: nel 22 i moti microsismici raggiunsero il massimo in quasi tutta la penisola, ed in diversi luoghi furono accompagnati da terremoti sensibili. Nel 24 dicembre 1884, la vigilia del grande terremoto andaluso, i movimenti microsismici diminuirono d'intensità in tutta la penisola italiana, solo eccettuando il versante adriatico dell'Apennino, compreso tra Bologna e Foggia.

Nel giorno 25 si avvertirono alcune scossette a Roma ed a Velletri; e già dicemmo per qual motivo dubitiamo che esse rappresentino il movimento sismico andaluso propagatosi fino all'Italia centrale. Riteniamo invece che tanto queste scossette, come la generale agitazione microsismica verificatasi in Italia nel gennaio 1885 siano legate coi terremoti dell'Andalusia solo indirettamente, per relazioni esistenti tra i focolari sismici delle due regioni (2).

Nè diversa è la conclusione a cui si giunge considerando i terremoti più notevoli italiani ed esteri del 1885 in confronto col recente periodo sismico andaluso. Il 1885 non fu un anno di grande attività sismica per l'Italia.

Nel 5 gennajo verso 6 h. 30 m. ant. un terremoto abbastanza sensibile scosse tutta la parte sud-ovest del Piemonte.

Sulla riviera di ponente si sentì una scossa forte nel 18 febbrajo, ed altra alquanto sensibile nel 15, estesa anche al Piemonte.

Verso le 9 $^3/_4$ del 26 febbrajo una scossa molto forte urtò l'Apennino settentrionale, e replicò alquanto sensibile nel 1 e nel 12 marzo.

Nel 18 marzo un terremoto forte scosse Biancavilla ed Adernò (Etna), e nel 22 uno più violento urtò le Marche e l'Umbria.

Nel 10 aprile si sentì una scossa fortissima nell'Apennino centrale, e nel 18 uno molto sensibile nell'Emilia.

Nel giugno vi furono scosse molto sensibili nel giorno 3 in Val di Noto, nel 9 in Toscana e nel 17 in Umbria.

Il 17 settembre un terremoto fortissimo colpì il Beneventano, cagionando leggeri danni negli edificî. Danni più considerevoli causò pochi giorni dopo, cioè nel 25, a Nicolosi un altro terremoto, replicato fortemente nel 2 ottobre.

(1) Bull. del vulc. it. anno 1885.

(2) È notevole che anche nel 1828-1829 numerose scosse di terremoto agitarono a brevi distanze di tempo la Murcia, nella Spagna meridionale, ed i Colli Albani, nell'Italia centrale.

*Terremoti stranieri nel 1885.* — Negli ultimi giorni di febbrajo vi fu un terremoto rovinoso a Msila in Berberia; ed altre scosse più violente in Algeria nel 4 dicembre.

Nel 13 febbrajo a Torre del Campo (Francia) un terromoto distrusse l'ospitale e la chiesa. In Grecia vi furono terremoti verso la fine di marzo e nel 24 agosto.

Il 13 aprile in Svizzera un terremoto cagionò qualche danno nelle Alpi bernesi.

Avvennero scosse rovinose in Stiria nel 1 e nel 3 maggio, e disastrosissime nel Kashmir il 30 maggio.

In principio di giugno un terremoto violento scosse la parte orientale del Caucaso; e nel 14 luglio un altro cagionò rovine nel Bengala.

Infine verso la metà di dicembre scosse rovinose colpirono Panamà ed altri luoghi dell'America centrale.

Paragonando questi fatti colle date dei terremoti andalusi del 1884-1885, si trova che:

1° Non esiste nessuna notevole coincidenza coi terremoti del Caucaso, del Bengala, del Panama.

2° Le principali repliche del terremoto andaluso seguirono o precedettero di poche ore o di qualche giorno i forti terremoti d'Italia, di Svizzera, dell'Africa settentrionale. Per esempio, nel 5 gennajo vi fu replica fortissima in Andalusia e scosse in Piemonte, nel 27 febbrajo avvenne una seconda replica fortissima in Andalusia preceduta nel 26 da un terremoto violento nell'Apennino settentrionale e seguìta nel 28 da scosse rovinose in Berberia; infine la più forte replica del terremoto andaluso (11 aprile) fu preceduta da scosse fortissime nell'Italia centrale, e seguìta da altre scosse pure violente nella Svizzera.

Concludiamo adunque che tra il focolare dei recenti terremoti andalusi ed i diversi focolari sismici del bacino mediterraneo non si verificò nè esatta coincidenza nei massimi di attività, nè vero antagonismo, ma piuttosto alternanza di azione a breve distanza di tempo, come risulterà confermato anche dall' esame dei *terremoti precursori*, di cui parleremo nel seguente paragrafo.

## X.

## Fenomeni precursori e concomitanti.

I fenomeni che sogliono considerarsi come *precursori* di un terremoto violento si possono classificare nel seguente modo: 1° piccole scosse, sentite nell'area stessa del terremoto od in località vicine; 2° rumori sotterranei; 3° alterazioni nella circolazione sotterranea; 4° fenomeni nervosi negli animali e nell'uomo; 5° fenomeni meteorici (oscillazioni del barometro, perturbazione dell'ago magnetico, pioggie persistenti o siccità ecc.).

*Terremoti precursori.* — Un giorno o due prima della grande scossa del 25 dicembre vi furono piccole scosse qua e là nella Andalusia, passate quasi inavvertite per la loro poca intensità e per la mancanza assoluta di strumenti sismici in tutta quella regione.

Nel giorno 24 una leggera oscillazione del suolo si avvertì a Siviglia (Noguès,

*Nature* 17 jan. p. 108). Nella notte dal 24 al 25 verso le 2 a Colmeñar vi fu una scossa leggera e non accompagnata da rombo, ma avvertita da molte persone. Secondo riferisce la *Commissione spagnuola* nella medesima notte si sentì pure una piccola scossa a Zafarraya. Nella sera del 22 dicembre cadde un po' di scalcinatura dalla soffitta del teatro di Malaga, con tutta probabilità per effetto di una piccola scossa, da nessuno però, per quanto ci consta, avvertita. Pare che a Periana, poco prima della scossa disastrosa, molte persone abbiano avvertito leggeri movimenti del suolo (1).

In diversi punti del bacino del Mediterraneo e dell'Atlantico non molto lontano dall'Andalusia si segnalarono nel novembre e nel dicembre 1884 diversi fenomeni endogeni i quali hanno con tutta probabilità un rapporto più o meno stretto col periodo sismico andaluso. Ecco i principali:

Novembre 4. Terremoto a Guelma nell'Algeria.

Novembre 23. Eccitamento di attività al Vesuvio e terremoto sul versante orientale delle Alpi piemontesi.

Novembre 27-28. Replica più estesa e più forte del terremoto piemontese del 23.

Dicembre 18. Forte maremoto nel bacino dell'Atlantico a 35° 51′ lat. nord e 29° 55′ long. (sic).

Dicembre 21 al 22. Di notte scosse sensibili sulle coste del Portogallo (a Lisbona, Pontevedra, Vigo) e nelle isole Azzorre e di Madera.

Dicembre 23. Una nave segnalò in mare delle forti trepidazioni presso il 23° di lat. nord ed il 12° long. ovest da S. Fernando (Cadice).

Dicembre 25. A Zernetz (Engadina) dalle 8 h. 17 m. alle 11 h. pom. varie scosse.

Il rev. Parroco di Ventas de Huelma ci disse che due o tre giorni prima del terremoto disastroso a nord-ovest del paese si vide nel suolo una lunga fessura di cinque a sei centimetri di larghezza. Nessuno però ha visto quando essa si sia formata.

*Rumori sotterranei.* — Un signore di Alhendin ci raccontò che più volte nelle campagne tra questo paese e la Sierra Tejeda si sentirono in passato forti esplosioni sotterranee provenienti da questa montagna. Verso la metà del novembre 1884 se ne udirono di fortissime paragonabili alla scarica di parecchi cannoni, e furono le ultime.

Il sig. segretario di Frigiliana ci raccontò che 4 o 5 giorni prima della grande scossa un uomo trovandosi sulla Sierra d'Emmedio, sentì un forte rombo sotterraneo, e si spaventò, essendogli parso anche di vedere fumo escire dal suolo.

A Güejar Sierra (presso Granata) circa mezz'ora prima del terremoto si sentì un sordo e prolungato rumore come di tormenta lontana, il quale pose in allarme la popolazione (2).

Abbiamo già parlato altrove del *rombo precursore,* che accompagnò immediatamente le scosse, perchè esso costituisce un elemento essenziale della scossa, con cui è talvolta contemporaneo.

(1) Cesareo Martinez, *Los temblores de tierra*, Malaga 1885, pag 66. Anche a Malaga qualche ora prima della scossa alcuni avvertirono un leggero movimento del suolo non sentito dalla generalità della popolazione (Orueta, op. cit.).

(2) C. Martinez, op. cit. pag. 45.

*Acque sotterranee.* — Non conosciamo nessuna alterazione avvenuta nella circolazione sotterranea delle acque anteriormente al terremoto, eccettuato il fatto di un pozzo di Almuñecar le cui acque mandarono un odore disaggradevole di zolfo (1).

*Variazioni barometriche* — Un notevole abbassamento barometrico passò sopra l'Andalusia dal 19 al 27 dicembre 1885. In Granada il barometro dal 20 al 21 dicembre si abbassò di 6, 53 mm., nel 22 e 23 discese alcuni altri millimetri, poi nel 24 salì di 2, 68 mm., per riabbassarsi di quasi 3 mm. prima della sera del 25, ossia appena prima del terremoto. A Malaga dal 19 al 20 dicembre si abbassò di quasi 5 mm., nel 23 e nel 24 scese ancora più basso di 6 o 7 mm., infine nel 26 e nel 27 raggiunse il minimo di 749, 54 mm., dopo il quale fino al 31 continuò a salire. Similmente a Torre del Mar il barometro si abbassò molto dal 21 al 22, poi risalì 1 o 2 mm. nel 24 e nel 25 e raggiunse il minimo nel 27. Anche ad Archidona si ebbe il minimo barometrico di quei giorni nella mattina del 26.

*Fenomeni fisiologici.* — A Malaga in diverse scuderie si avvertì che poco prima del terremoto i cavalli tendevano le orecchie, non mangiavano, o si mostravano in altri modi inquieti. Nel Collegio del Palo (presso Malaga) un cane, che stava in cucina dormendo, alcuni minuti prima della grande scossa, si svegliò e fuggì da casa abbajando, per non ritornare più. Ci raccontarono che in una frazione di Arenas del Rey, poco prima del terremoto, i muli si mostrarono molto inquieti ed escirono all'aperto. A Nerja un uccello poco prima della scossa si mise a cantare e ad agitarsi nella gabbia. Similmente in una casa di Siviglia gli uccelli si misero tutti a cantare pochi minuti prima del terremoto, non ostante l'ora tarda.

Più generalmente venne avvertita l'inquietudine degli animali domestici (cani, galli, cavalli, gatti ecc.) appena prima delle repliche.

A Siviglia, ad Osuna, a Cadice ed in altri luoghi ci attestarono che alcuni istanti prima della grande scossa molte persone provarono una sensazione alla testa paragonabile ad un principio di mal di mare. Un simile fenomeno fisiologico esperimentarono prima di alcune repliche il signor dott. Enrico Villalobes di Malaga, ed il signor dott. Blanchard di Granata ed altre persone. Ricordiamo che anche al momento del terremoto rovinoso del 13 gennaio 1804, ad Olvera (Andalusia) molte persone provarono una indisposizione speciale allo stomaco.

*Fenomeni nell'atmosfera e nel mare.* — Al momento della prima scossa il tempo in generale era bello; solo in pochi luoghi, per esempio a Siviglia, si ebbe pioggia durante la giornata. A Malaga ed a Motril durante il 25 si notò una calma perfetta e straordinaria nel mare e nell' atmosfera. Dopo il terremoto, verso la mattina del 26 dicembre si mise a piovere in tutta l'area mesosismica e rovinosa. In parecchie località, come ad Alhama, Ventas de Zafarraya ed Arenas del Rey la pioggia fu forte e temporalesca; a Granata invece fu leggera, ma accompagnata da forte tensione elettrica. Nel giorno 26 a Torre del Mar cadde 42 millimetri d'acqua. Il rimanente dell'inverno, fino all' aprile, fu molto piovoso. Nel gennajo dominò una temperatura più bassa dell' ordinario. Ad Archidona si ebbe fino a 8° cent. sotto zero. Ad Alhama, ad

(1) La Commissione spagnuola (op. cit. p. 67) cita anche un caso di alterazione delle acque verificatosi in Malaga.

Arenas del Rey e in tutta la parte elevata della Sierra Tejeda nevicò varie volte. Un poco di neve cadde anche a Nerja, a Siviglia, a Cordova.

In molte località (Arenas del Rey, Santa Cruz de Alhama, Guaro presso Periana ecc.) dopo il terremoto apparve una nebbia abbondante nell'atmosfera. In altri paesi però (per esempio in Periana, in Colmeñar, al Palo ecc.) essa non fu vista.

Oltre le pioggie temporalesche, non mancarono altri fenomeni dovuti probabilmente alla elettricità di cui era carica l'atmosfera. Nella notte 25 al 26 a Granada si videro lampi a ciel sereno, ad Arenas del Rey apparvero nell'aria luci fosforiche, presso il Collegio del Palo (Malaga) toccando la terra coi piedi si vedeva una luce fosforescente, a Rubite (prov. di Granata?) ed a Velez Benaudalla si segnalarono *aurore boreali* [1]. Al Palo nella notte 30 al 31 si vide un bel alone.

Un solo caso di perturbazione nell'ago magnetico si osservò alla stazione ferroviaria di Granada. All'Osservatorio di San Fernando (Cadice) non si verificò nessuna perturbazione nella curva magnetica.

Nel Collegio del Palo (Malaga) due volte si staccarono le calamite dalla loro armatura, cioè: dopo una piccola scossa del 29 aprile, e dopo una dell' 8 maggio.

Le piogge e le nevi, che seguirono dopo il terremoto, sono evidentemente una conseguenza dello straordinario abbassamento barometrico passato sopra l'Andalusia dal 19 al 27 dicembre; non hanno quindi nessun rapporto diretto col fenomeno sismico. Siccome però i fatti testè citati provano che il terremoto ha dato luogo ad un grande sviluppo di elettricità, questa avrà concorso a dare il carattere temporalesco a quelle meteore acquee.

Il mare non si ritirò ne si inoltrò in modo sensibile sulla spiaggia. Il solo fenomeno interessante che esso presentò fu la fuga di tutti i pesci lungo la costa tra Malaga e Nerja, avvenuta immediatamente dopo la scossa disastrosa. Questi animali ritornarono presso la costa dopo una settimana. Anche al momento del grande terremoto andaluso del 1680 i pesci saltarono fuori delle acque lungo la costa malaghena.

## XI.

## Natura e cause dei terremoti andalusi.

Nel ricercare le cause dei terremoti vagarono in ipotesi poco fondate e tra loro molto discordanti quei geologi, che in passato si sforzarono a trovare una causa unica per tutti i terremoti. Più giustamente i geologi moderni distinguono diverse categorie di terremoti a seconda delle cause da cui dipendono.

Vi sono *terremoti vulcanici propriamente detti,* cagionati dalle lave e dalle materie gazose, che si agitano nell'interno di un vulcano, urtandone i fianchi per aprirsi a viva forza una breccia ed erompere all'esterno. Questi terremoti in generale sono sensibili su un' area molto ristretta, perchè il loro centro di scossa si trova a piccola profondità sotto il suolo. Tali furono, come ha dimostrato uno di noi, i disastrosi terremoti ischiani del 4 marzo 1881 e del 28 luglio 1883 [2]. Non esistendo in Andalusia

[1] *Informe* etc. pag. 77.

[2] G. Mercalli, *L'isola d'Ischia ed il terremoto del* 28 *luglio* 1883. Memorie del r. Istituto lombardo, 1884, e Rend. r. Inst. Lomb. dic. 1884.

nè vulcani attivi nè rocce vulcaniche d'epoca recente, i terremoti andalusi non possono certamente assimilarsi a questi fenomeni ischiani.

Un'altra categoria di terremoti sono quelli determinati da grandi scoscendimenti sotterranei, che per diverse cause possono accadere, dove esistono ampie cavità nelle viscere della terra. A questa causa Boussingault attribuiva i terremoti tanto frequenti dell'America meridionale, e Volger quelli del Vallese e di altre parti della Svizzera. E ad essa vorrebbero pure riferire i recenti terremoti andalusi gli egregi professori Garcia Alvarez di Granada e Cesareo Martinez di Malaga ([1]). Ma a noi pare che un franamento sotterraneo, per quanto grandioso, sia un fenomeno assolutamente inadequato a spiegare una vibrazione della crosta terrestre tanto violenta come quella del 25 dicembre ed estesa ad un' area di 450 mila chilom. q. Uno scoscendimento sotterraneo non può causare che terremoti locali e relativamente poco estesi, istantanei e non seguìti da numerose repliche; proprio il contrario di quello che si verificò nei recenti terremoti andalusi.

Alcuni dei più illustri geologi spagnuoli, tra cui il signor Federico de Botella ed il signor J. Macpherson, considerano i terremoti andalusi come una conseguenza della diminuzione progressiva di volume della terra per effetto del suo raffreddamento secolare. Ma, pur ammettendo che tale raffreddamento continui davvero al presente, se si crede all'illustre astronomo Arago, il quale ha dimostrato che da 2000 anni la temperatura media del globo non ha variato neppure di $^1/_{10}$ di grado, come è possibile supporre che tale microscopica variazione di temperatura abbia a produrre contrazioni tanto sensibili nelle rocce della Sierra Tejeda da cagionare ampie rotture nelle medesime e conseguenti violentissimi terremoti?

Del resto, anche ammesso in via di ipotesi che il raffreddamento fosse più sensibile, esso non varrebbe egualmente a spiegare la localizzazione ed indipendenza dei diversi focolari sismici della Spagna meridionale, il gran numero dei terremoti andalusi (vedi sopra Parte II), e sopratutto il perimetrismo dei terremoti iberici in generale. Ed invero, se questi fenomeni fossero una conseguenza della contrazione della crosta terrestre, come si spiegherebbe l'assoluta mancanza di terremoti che mostrino di avere il loro centro in tutta la Spagna interna, mentre negli ultimi sette secoli si conoscono oltre una cinquantina di terremoti tra rovinosi o disastrosi tutti aventi il centro nelle regioni litorali della penisola? La contrazione non dovrebbe verificarsi in tutte le parti della crosta terrestre costituite da rocce simili?

Noi abbiamo già detto che riteniamo i terremoti andalusi come terremoti *perimetrici*, da assimilarsi ai terremoti tanto frequenti dell'Italia meridionale e centrale, della Grecia, dell'Asia minore ecc. Abbiamo pure stabilito, dietro la storia dei terremoti della Spagna meridionale, l'esistenza di diversi *centri* o *focolari sismici* ben distinti e fino ad un certo punto indipendenti nella loro attività.

L'allineamento di questi focolari sismici perimetrici e dei focolari vulcanici, con cui alternano, al perimetro del bacino del Mediterraneo ci guida a trovare l'origine dei focolari stessi. Infatti, quando nelle più recenti epoche terziarie l'Europa meridionale ha subìto il suo ultimo e definitivo sollevamento, che la portò al livello attuale, cosa

([1]) *Op. cit.*, pag. 127.

sarà accaduto al limite fra la parte emersa e la parte sommersa della crosta della terra? A questa domanda ha già risposto egregiamente R. Mallet (1), e noi adottiamo, almeno nei punti più essenziali, le sue vedute.

In primo luogo, gli urti e gli schiacciamenti che devono necessariamente accompagnare il sollevamento di una vasta regione, daranno origine ad una quantità enorme di calore corrispondente all'enorme lavoro meccanico eseguito nel sollevamento stesso (2).

In secondo luogo, presso il confine delle due parti, una abbassata e l'altra sollevata, si apriranno profonde e numerose spaccature sotterranee, circondate da un sistema di innumerevoli screpolature e fessure sempre più piccole fino a diventare capillari, entro le quali l'acqua del mare filtrerà e s'inoltrerà abbondantemente nell'interno della crosta terrestre. Per l'alta temperatura che incontra e per la sua attività fisico-chimica, quest'acqua reagirà energicamente sulle rocce e ne forma dei magma acquei-cristallini, i quali in alcuni punti, dove la profondità non troppo grande e le condizioni statiche della crosta terrestre lo permettono, squarciano il suolo e danno luogo ad eruzioni vulcaniche; altrove invece si agitano violentemente sotterra, trattenuti da enormi pressioni che sono impotenti a vincere. In questo secondo caso accade che ad intervalli irregolari, per l'affluire di una maggiore quantità d'acqua o per aumento di calore, i vapori ed i gaz dei magma lavici stessi spieghino una forza straordinaria, e, tentando di espandersi e di vincere la tenacità delle rocce, mettano in forte vibrazione le pareti della cavità dove stanno imprigionati; e talvolta esplodono, injettandosi dentro cavità o fratture sotterranee, dove prima non giungevano. In un modo o nell'altro comunicano vibrazioni più o meno intense alla crosta della terra; vibrazioni che, propagate fino alla superficie del suolo, talvolta vi giungono appena sensibili, tal'altra così violente da atterrare in pochi istanti migliaja di edificî.

Tale probabilmente è l'origine dei terremoti perimetrici dell'Andalusia e delle altre regioni littorali della Spagna meridionale; sotto alle quali, secondo questo modo di vedere, esisterebbero dei focolari sismici distinti e localizzati, simili ai focolari vulcanici del Vesuvio e dell'Etna, differenti però essenzialmente da questi per essere situati in un punto dove le condizioni statiche della crosta terrestre rende loro impossibile il far eruzione. In conferma di questa conclusione ricordiamo aver noi già fatto rilevare a suo luogo come esista un certo riscontro tra il succedersi delle scosse nel periodo sismico andaluso ed il ritmo delle esplosioni in un periodo eruttivo pliniano. (Vedi sopra pag. 210).

Il notevole abbassamento barometrico che, ha preceduto e seguìto la scossa disastrosa del 25 dicembre 1884 (v. sopra: *Fenomeni precursori*), fa nascere naturalmente il desiderio di sapere se la coincidenza tra i due fenomeni sia causale, od invece attesti un rapporto reale esistente fra essi. A tale scopo esaminiamo se anche durante le repliche si notò qualche relazione costante od almeno molto frequente tra i movimenti del suolo e i minimi barometrici.

In dicembre il barometro dopo la scossa disastrosa continuò ad abbassarsi fino

(1) R. Mallet, *Ueber vulkanische Kraft*, trad. da A. v. Lasaulx. Bonn, 1878.

(2) R. Mallet (op. cit.) ha dimostrato che questo calore è sufficiente per portare le rocce al punto di fusione

al 27, in cui raggiunse il minimo di tutto il mese cioè 747 mm. (1); poi andò continuamente alzandosi fino al 1° gennajo. La più forte replica dei primi giorni fu quella del 30 dicembre, e coincidette quindi con una pressione barometrica media ed in via di accrescimento. Col minimo barometrico del 27 non coincidettero movimenti notevoli del suolo.

In gennajo un abbassamento barometrico mediocre precedette di un giorno la replica violenta del giorno 5, ed un altro più sensibile accompagnò una scossa alquanto intensa nel giorno 21. Però il minimo barometrico del mese di 745-748 mm., verificatosi dal 14 al 16, passò senza notevoli movimenti del suolo.

Nel febbrajo una scossa mediocre avvenne nel giorno 19 contemporaneamente al minimo barometrico del mese; la scossa però del 27, che fu una delle repliche più forti, coincidette con una delle più alte pressioni (766,7 mm.).

Durante il marzo le scosse più sensibili dei giorni 8, 24, 26, 28, 29 combinarono con pressioni atmosferiche nè molto basse nè molto alte, ma prossime alla media del mese.

Finalmente in aprile nei giorni 3 e 7 si ebbero dei minimi barometrici di 749 e 747 mm. e due scosse alquanto sensibili, nel giorno 11 la più forte di tutte le repliche con un'altezza barometrica media di 755,7 mm., e nei giorni 14-15, 17, 19, 27, 29, si avvertirono scosse sensibili durante pressioni atmosferiche di valore mediocre.

Concludiamo adunque che durante il recente periodo sismico andaluso parecchi massimi sismici coincidettero con minimi barometrici, alcuni pochi con massimi barometrici, il maggior numero con pressioni atmosferiche medie.

Noi non neghiamo che il brusco abbassamento barometrico, passato sull'Andalusia dal 17 al 27 dic. 1884 abbia contribuito, almeno come causa occasionale e secondaria, a determinare il momento della catastrofe del giorno 25 preparata da cause sotterranee di altra natura. I fatti testè riferiti però non ci permettono di dividere l'opinione di coloro, che considerano tale abbassamento barometrico come cagione principale del terremoto (2).

E neppure si può attribuire nei recenti terremoti una parte importante all'attrazione luni-solare, nella quale Perrey e Falb vedono la causa generale del maggior numero dei terremoti, da essi considerati come effetti di maree sotterranee.

Imperocchè, confrontando le date delle principali scosse avvenute in Andalusia con l'età della luna, si trova che molte (per es. quelle del 27 febbrajo, 28, 29 marzo, 14, 15, 29 aprile ecc.) sono prossime alle sizigie, nelle quali si verificano i massimi mensili dell'attrazione luni-solare sulla terra; ma altre, tra cui la scossa disastrosa del 25 dicembre, e le repliche del 21 febbrajo, dell'8 marzo ecc., avvennero mentre la luna si trovava nelle quadrature, ossia nelle condizioni più sfavorevoli per esercitare il suo potere attrattivo sulla Terra.

(1) Le pressioni atmosferiche che qui riportiamo e che ci servirono per questo confronto sono quelle registrate a Torre del Mar (tra Malaga e Velez-Malaga) dal sig. ing. Delorme, che ebbe la gentilezza di comunicarcele. Esse sono fatte al mezzodì e ridotte a zero.

(2) Questa opinione venne sostenuta dal sig. F. Laur, direttore dell'Echo des Mines in una comunicazione fatta all'Accademia delle scienze di Parigi nel gennaio 1885.

## RIEPILOGO E CONCLUSIONE

Il grande terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 scosse una regione non vulcanica, ma allineata al perimetro del Mediterraneo colle classiche zone vulcaniche e sismiche dell'Italia meridionale, della Grecia, dell'Asia minore ecc.; e deve essere classificato per la sua natura tra i terremoti *perimetrici* tanto frequenti nell' Italia meridionale.

Il movimento sismico irraggiò da un centro di forma elissoidale situato a dodici o tredici chilometri di profondità: dal quale si propagò nella crosta della terra, seguendo le leggi fondamentali della propagazione dei moti molecolari nei solidi.

Le onde sismiche deviarono per rifrazioni e specialmente per riflessioni subìte passando attraverso rocce di diversa densità ed elasticità.

Non si è potuto determinare la velocità di trasmissione del movimento sismico, si è constatato però che in tutte le direzioni essa fu minore della velocità di propagazione del suono nella crosta terrestre.

Le onde sismiche si propagarono più facilmente e più uniformemente, e determinando relativamente minori rovine nelle rocce cristalline compatte dei terreni primitivi e paleozoici.

La direzione generale degli strati e delle spaccature favorì la trasmissione del movimento sismico, che si propagava parallelo ad essa, e la ostacolò nel caso opposto.

Il movimento sismico passando da terreni compatti, continui e relativamente elastici paleozoici ed azoici, ai terreni recenti, specialmente se marne, argille, travertini, si trasformò in movimento di massa, producendo effetti tanto più disastrosi quanto minore erano lo spessore, l'omogeneità e la continuità del terreno superficiale.

L'intensità del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 al centro di scuotimento fu maggiore di quella del grande terremoto napoletano del 1857, del terremoto ischiano del 1883 ecc.; giunse però alla superficie con minore energia e producendo effetti disastrosi minori, in proporzione della maggiore profondità del centro e della maggiore estensione dell'area scossa. Tuttavia gli effetti disastrosi vennero ingranditi assai nei paesi montuosi, specialmente per la pessima costruzione degli edificî, e per la loro ubicazione all'orlo di burroni franosi, od in rapido pendio.

Gli effetti del terremoto sul suolo consistono in spaccature, frane e scivolamenti nei terreni superficiali specialmente terziarî e quaternarî; ed in alterazioni temporanee e permanenti nelle sorgenti e nei pozzi.

Le prime scosse del terremoto andaluso vennero precedute ed accompagnate da un forte abbassamento barometrico; e seguìte da pioggie abbondanti con lampi ed altri fenomeni elettrici atmosferici.

Il periodo sismico andaluso, cominciato nel dicembre 1884 e probabilmente non ancora terminato, si deve al risveglio del medesimo focolare sismico, che in passato cagionò i disastrosi terremoti malagheni del 1581 e del 1680, del tutto simili al terremoto attuale per l'area e per la posizione del centro di scuotimento.

## APPENDICE

Dopo la presentazione della presente *Relazione* alla R. Accademia dei Lincei, si ripeterono nell'Andalusia altre scosse di terremoto, di cui il sig. ing. M. Jona di Malaga gentilmente ci comunicò esatte notizie.

1886 febbrajo 6. Alle 5 ant. scossa vibratoria piuttosto forte in Malaga, di 2″ di durata.

1886 febbrajo 21. Alle 3 h. 35 m. ant. scossa in Malaga, vibratoria, di 3″ di durata.

1886 marzo 7. Alle 10 h. 45 m. pom. in Malaga scossa vibratoria assai debole, avvertita da poche persone.

1886 marzo 14. Alle 10 h. 55 m. pom. scossa leggerissima in Malaga, mediocre a Velez-Malaga ed a Periana e forte in provincia di Granata.

1886 aprile 10. Alle 9 h. 10 m. pom. in Malaga due forti scosse ondulatorie, dirette est-nord-est-ovest-sud-ovest, durate 2 o 3 secondi; sentite con maggior forza a Velez-Malaga ed in altri punti della provincia.

Sulla scossa del 14 marzo il sig. ing. Noguès di Siviglia ci inviò notizie più dettagliate.

Alle 11 pom. del 14 marzo a Granata si sentì un movimento oscillatorio del suolo assai sensibile, perdurato 3 o 4 secondi. Molte persone furono bruscamente svegliate, ed escirono nelle strade. Anche in teatro il pubblico si spaventò e abbandonò confusamente il locale.

Dopo circa 1[2 ora si sentirono altre leggere oscillazioni di intensità molto minore.

Ad Albuñuelas, a Loja, a Talarà ed altrove in provincia di Granata lo spavento fu ancora maggiore, e quasi tutti gli abitanti abbandonarono le loro case. Non vi furono tuttavia nè disgrazie personali, nè rovine di edificî. La scossa non venne avvertita nè a Siviglia nè a Cordova.

La scossa del 14 fu preceduta da un forte e rapido abbassamento barometrico simile a quello che accompagnò il terremoto disastroso del 25 dicembre 1884. Il sig. Peña, farmacista di Granata, tre ore prima del terremoto, pronosticò una prossima scossa a motivo della rapida diminuzione della pressione atmosferica.

A noi sembra che questo terremoto del 14 marzo non si possa considerare come una replica di quello del 25 dicembre 1884, e che si debba all'attività di un altro centro sismico situato tra la Sierra Tejeda e la Sierra Nevada, forse quello dei terremoti granatini del 1786, del 1826 e del 1871 (vedi sopra Parte II). Esso infatti fu quasi insensibile presso Malaga, ed avvertito solo leggermente nelle parti centrali della Sierra Tejeda, dove la scossa disastrosa del 25 dicembre ebbe la sua massima intensità.

Riteniamo invece la scossa del 10 aprile 1886 come una vera replica di quella del 25 dicembre perchè ebbe, come questa, la sua maggiore intensità nella Sierra Tejeda, e si sentì in Malaga colla medesima forma (due scosse separate da breve pausa) e direzione.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA III.

Fig. 1. Veduta di Alhama, per mostrarne la postura imminente sul burrone del Rio omonimo, nel quale precipitarono alcune abitazioni; la parte più danneggiata della città è in distanza e dal lato opposto di questo lembo di terreni miocenici, tagliato verso ponente da altro non meno profondo burrone. Da una fotografia degli autori.

Fig. 2. Lembo di calcari grossolani miocenici, rotti e franati per antichi terremoti e per l'erosione. Veduta presa a sud di Alhama.

Fig. 3. Il burrone a levante di Alhama, coi massi distaccati dal terremoto e con a sinistra la fresca parete, da cui franarono. Da una fotografia degli autori.

Fig. 4. Limite settentrionale dell' altipiano di travertino soprastante al paese di Periana, coi massi staccati dal terremoto e caduti sul suolo arenaceo-marnoso, che sostiene detto travertino. Veduta presa a nord-ovest di Periana.

Fig. 5. Il passo di Zaffaraga, nelle rocce giuresi e triasiche, con a sinistra un vasto tavolato di travertino. Veduta presa da Alcaucin.

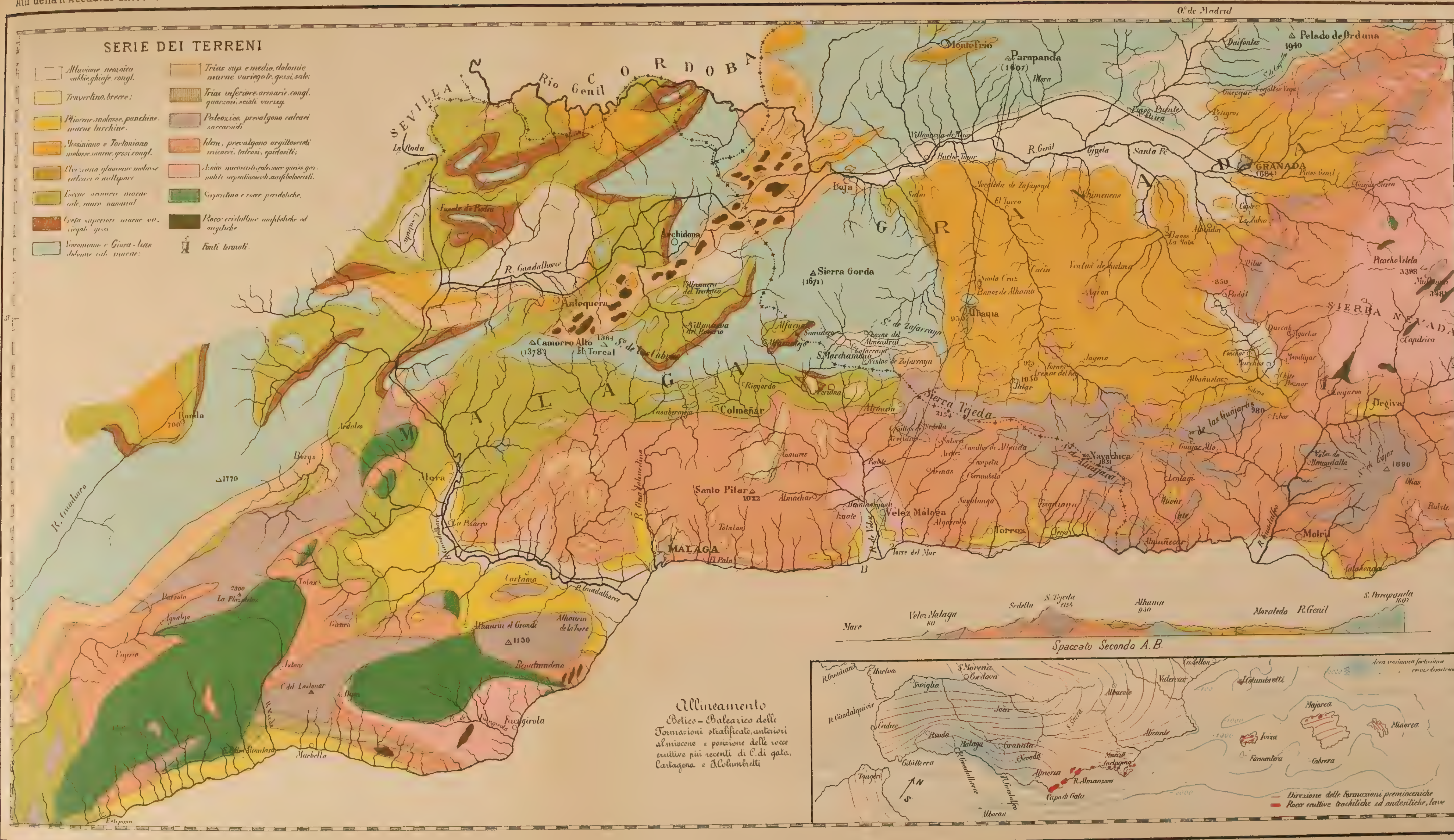
Fig. 6. Terreno sconvolto per scivolamento in seguito alla frattura di Guaro, a nord-ovest di Periana; gli edifici furono travolti nello sfacelo, che però fu lento; sulla sinistra una zona più chiara accenna al prolungamento della frattura, che iniziò il fenomeno. Da una fotografia del sig. D. Orueta.

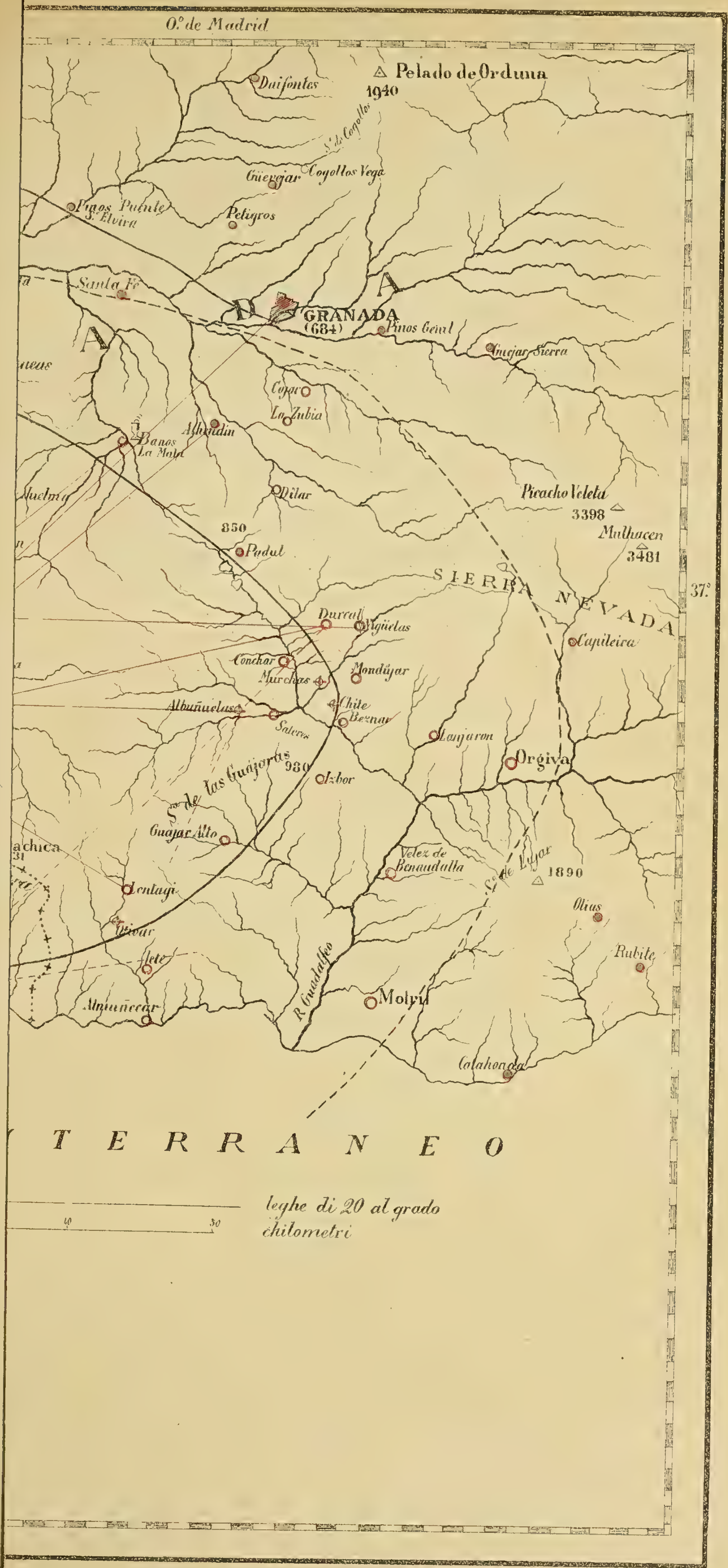
Fig. 7. Le frazioni di Albuñuelas, in riva al Torr. Izbor; dalla sponda destra, a picco, è scesa una frana per la prima scossa. Da una fotografia degli autori.

Fig. 8. Veduta della sierra Tejeda. I calcari della cresta formano aspri dirupi, ai primi di maggio ancora circondati di nevi. Sul davanti si svolgono dossi arrotondati di rocce scistose. Da una fotografia degli autori.

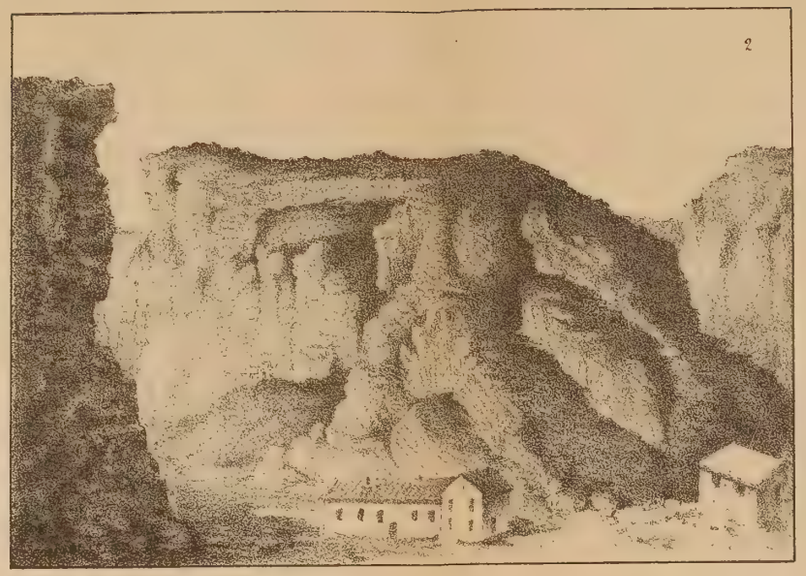
TARAMELLI e MERCALLI. Terremoti Andalusi. Tav. I.

econdo A.B.


SERIE DEI TERRENI
Alluvione neozoica sabbie, ghiaje, congl.
Travertino, breccie;
Pliocene, molasse, panchine, marne turchine.
Messiniano e Tortoniano molasse, marne, gessi, congl.
Trias sup. e medio, dolomie marne variegate, gessi, sale;
Trias inferiore, arenarie, congl. quarzosi, scisti varieg.
Paleozoico, prevalgono calcari saccaroidi
Idem, prevalgono argilloscisti micacei, talcosi, epidositi;
Serpentino e rocce peridotiche.
Fonti termali.
SEVILLA
CORDOBA
GRANADA
MALAGA
Rio Genil
R. Genil
R. Guadalhorce
Archidona
Antequera
Sierra Gorda
(1671)
Camorro Alto
(1378)
El Torcal
Colmeñar
Sierra Tejeda
Navachica
Santo Pitar
Velez Malaga
Torrox
Almuñecar
Motril
Orgiva
Alhama
Montefrio
Parapanda
(1607)
Pelado de Orduna
Santa Fe
Loja
Ronda
Marbella
Fuengirola
Cartama
Picacho Veleta
SIERRA NEVADA
Torre del Mar
Spaccato Secondo A. B.
Mare
Velez Malaga
Sedella
S. Tejeda
Alhama
Moraleda
R. Genil
S. Parapanda
Allineamento Betico-Balearico delle Formazioni stratificate, anteriori al miocene e posizione delle rocce eruttive più recenti di C. di Gata, Cartagena e I. Columbretti
Siviglia
Cordova
Cadice
Gibilterra
Granata
Malaga
Almeria
Cartagena
Alicante
Valenza
Columbretti
Majorca
Minorca
Ivica
Formentera
Cabrera
Capo di Gata
Direzione delle formazioni premioceniche
Rocce eruttive trachitiche ed andesitiche, lave

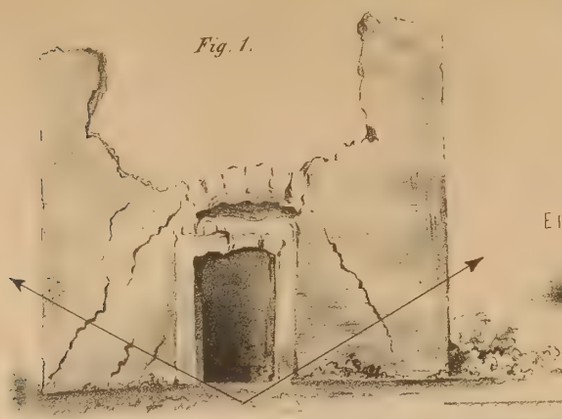

O.º de Madrid
Pelado de Orduna
1940
Daifontes
S. de Cogollos
Güevejar
Cogollos Vega
Pinos Puente
S. Elvira
Peligros
Santa Fé
GRANADA
(684)
Pinos Genil
Guejar Sierra
Cajar
La Zubia
Alhendin
Banos
La Mala
Dilar
Picacho Veleta
3398
Mulhacen
3481
850
Padul
SIERRA NEVADA
37.°
Durcal
Nigüelas
Capileira
Conchar
Murchas
Mondújar
Albuñuelas
Saleres
Chite
Beznar
Lanjaron
Orgiva
S.a de las Guajaras
980
Izbor
Guajar Alto
Velez de Benaudalla
S.a de Lujar
1890
Lentegi
Itrabo
Olias
Jete
Rubite
R. Guadalfeo
Almuñecar
Molvizar
Calahonda
TERRANEO
leghe di 20 al grado
chilometri
10
30

CARTA SISMICA
DEL TERREMOTO ANDALUSO
del 25 Dicembre
1884
(La parte geografica è del Signor COELLO)
Spiegazione
Paesi in cui il terremoto fu disastroso
Paesi in cui il terremoto fu rovinoso
Paesi in cui il terremoto fu fortissimo
Direzione delle scosse
Onde sismiche riflesse, trasversali ecc.
Epicentro
Curva mesosismica (disastrosa)
" isosismica rovinosa
CORDOBA
SEVILLA
MALAGA
GRANADA
SIERRA NEVADA
MARE MEDITERRANEO
Loja
Archidona
Antequera
Alora
Ronda
Velez Málaga
Torrox
Alhama
Colmeñar
Cartama
Orgiva
Motril
Marbella
Fuengirola
Estepona
leghe di 20 al grado
chilometri
Scala 1/400 000
NORD



LIT. E. BRUNI, PAVIA - 1905.

*Fig. 1.*



Facciata della Chiesa di Arenas del Rey diretta O N O circa

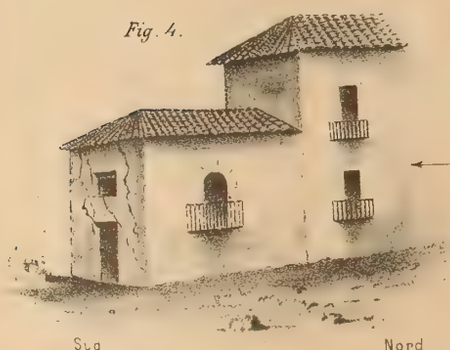
*Fig. 2.*

Facciata di una casa privata diretta E 10°S in Arenas del Rey

*Fig. 3.*

Muro laterale di una casa diretto E alcuni gradi nord in Arenas del Rey presso la Chiesa

*Fig. 4.*




Casa nella Calle Mesones in Velez Malaga

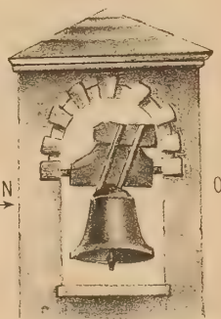
*Fig. 5.*

Spaccature verticali in un muro di cinta in Alhama

*Fig. 6.*

Porta del Cimitero d'Alhama

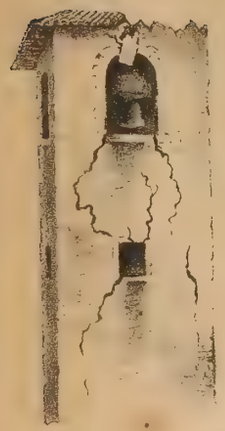
*Fig. 7.*




Sostegno della campana spostato sul campanile di Colmeñar

Campanile della Chiesa Maggiore di Alhama

*Fig. 9.*



Campanile di una delle Chiese minori di Alhama, Fianco diretto Ovest-Est

*Fig. 10.*

Piazza di Albuñuelas *(7 Maggio 1885.)*

Periana - Muro diretto - NE-SO

*Fig. 11.*

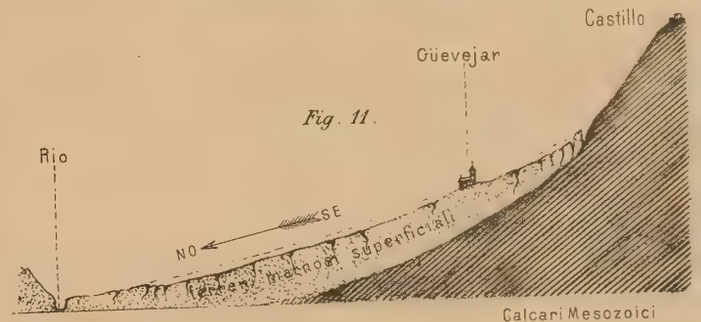
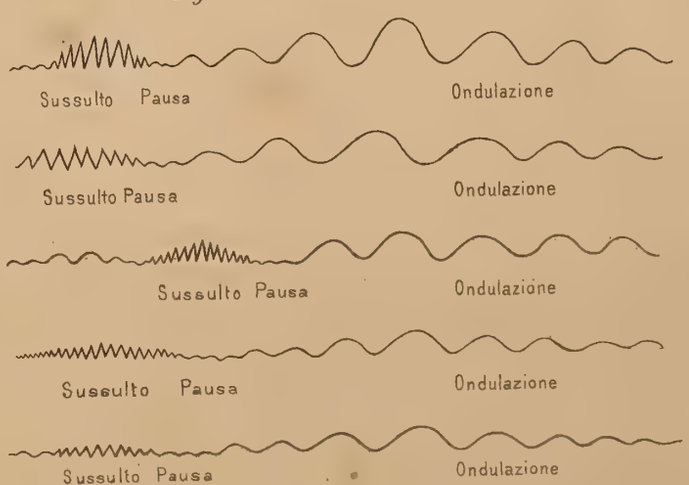



*Fig. 12.*




Forma della scossa disastrosa del 25 Dicembre 1884

LIT. L. BONCHI, MILANO (95)

# RELAZIONE

letta dal Socio STRUVER, relatore, a nome anche del Socio SPEZIA, nella seduta del 6 giugno 1886, sulla Memoria del dell' ing. GIUSEPPE LA VALLE, intitolata: *Sul diospide di Val d' Ala.*

« L' ingegnere Giuseppe La Valle da alcuni anni si è occupato dello studio cristallografico del pirosseno di varie località d'Italia e principalmente del diopside di Val d' Ala, una delle più belle e più interessanti specie minerali che vanti il nostro paese. I primi risultati di questi studî, relativi ai complicati e svariati gemelli polisintetici del diopside della Mussa in Val d' Ala e del pirgome di Montaieu sopra Traversella in Val Chiusella, furono benevolmente accolti dalla nostra Accademia e inseriti nel vol. XIX, ser. 3ª. Ora il La Valle ha presentato la seconda parte del suo lavoro, la quale contiene la descrizione delle forme semplici e delle combinazioni, le ricerche sulla relativa frequenza delle forme semplici e la determinazione delle costanti geometriche dei cristalli di diopside provenienti dal banco di granato che attraversa il serpentino della Testa Ciarva, al piano della Mussa in Val d' Ala. Il diopside ivi è accompagnato da granato rosso-giacinto di tutte le gradazioni, da idocrasio in cristalli allungati nel senso dell'asse di simmetria principale, di color verde-olio a zone brune parallele alla base e alle faccie della piramide fondamentale, assai di rado di tinta bruno-cupa quasi uniforme, poi da clorite, da rari cristallini di apatite incolore o biancastra per forma simili ai più grossi cristalli della Corbassera presso Ala, e da cristallini di calcite bianca o incolore. Qualche rara volta vi si rinvenne, disseminata nel granato compatto, la pirite.

« Per le sue ricerche, il La Valle potè servirsi di una ricca collezione di diopside in gruppi e cristalli sciolti, radunata nel corso di molti anni da uno di noi e ora depositata nel gabinetto di mineralogia della Università di Roma. Oltre a molti gruppi, essa comprende 137 scelti cristalli di cui ben 90 si prestarono a misure esatte al goniometro a due cannocchiali. Quindi non ci potrà recar meraviglia se nonostante le numerose ricerche pubblicate da altri, anche sullo stesso diopside della Testa Ciarva, pure l'autore ha aumentato notevolmente il numero delle forme semplici sino ad ora conosciute non solo nel diopside ma nel pirosseno in genere. Dai diversi autori sono date come esistenti nei cristalli di diopside di Val d'Ala (in genere, senza distinzione delle varie località) 42 forme semplici. Di queste il La Valle trovò 30 sopra i 90 cristalli misurati della Testa Ciarva, e vi aggiunse 5 forme già note in altre località, ma non indicate per il diopside di Val d'Ala, e 14 forme nuove per il pirosseno in

genere, dimodochè il numero delle forme dall' autore constatate sui cristalli di Testa Ciarva sarebbe di 49, mentre per il diopside di Val d'Ala in genere il numero delle forme ora conosciute salirebbe a 61.

« E si noti che l' autore ha posto la massima cura nell'accertarsi della reale esistenza delle faccie da lui indicate non fidandosi dei soli riflessi ottenuti al goniometro e pur troppo assai sovente fallaci ma ammettendo solo quelle che potè con sicurezza scorgere ad occhio nudo o tutt'al più ricorrendo all'aiuto della lente semplice.

« Di tutte le forme da lui osservate, il La Valle descrive brevemente l'aspetto fisico e per tutte dà le misure goniometriche ed indica le zone che servirono per la determinazione dei simboli.

« Per il calcolo delle costanti l'autore ha applicato il metodo dei minimi quadrati fondandosi sopra tutte le più perfette misure ottenute da un gran numero di cristalli; sono, in fatti, ben 346 gli angoli, fra omologhi e diversi, da cui risultano le costanti indicate, mentre tre soli avrebbero bastato supponendo i cristalli teoricamente perfetti.

« Dall'esteso quadro delle combinazioni osservate e da qualche altro quadro riassuntivo, dati dall' autore, segue che i novanta cristalli, nonostante l' abito generale poco variabile, presentano 83 (numero assai grande) combinazioni diverse. Il quale fatto trova forse riscontro nel cristallo di rocca, i cui individui presentano altresì forma generale quasi costante, ma un grandissimo numero di combinazioni differenti per la variabilità delle faccie rare e strette che si uniscono a quelle pochissime predominanti. In tutte le combinazioni osservate esistono, senza eccezione, sette forme semplici, cioè i tre pinakoidi principali (100) (010) (001), i prismi verticali (110) (130) e i prismi obliqui (111) ($\bar{2}21$), mentre le altre forme diminuiscono man mano di frequenza, si direbbe quasi in modo continuo, sino ad arrivare a quelle rarissime che non furono incontrate che una o due volte. E questo risultato delle indagini del La Valle ci sembra tanto più notevole inquantochè analoghe ricerche istituite sovra qualche altra specie hanno dato risultamenti diversi. Ci sia permesso di indicare l' esempio della pirite di Brosso, Traversella e dell'Elba, per la quale si trovò ancora che alcune poche forme sono o sempre presenti od almeno frequentissime, mentre da queste alle altre più rare v'ha un notevole salto che si ripete passando dalle forme rare alle rarissime. Un simile divario, a nostro parere non è accidentale nè si spiega per il numero diverso di cristalli sottoposti all'esame, ma ha un significato più profondo che converrebbe ricercare istituendo analoghe ricerche sulla frequenza relativa delle forme semplici in tutte le specie minerali che per abbondanza di forme meglio vi si prestano.

« Un' altra conseguenza che si può trarre dalle indagini del La Valle e che riteniamo non priva d'interesse, è la seguente. Esaminando la proiezione stereografica che l'autore dà di tutte le forme conosciute nel pirosseno, comprese quelle nuove, si resta subito colpiti dalla singolare disposizione dei poli delle faccie che per così dire si condensano entro una larga striscia approssimativamente parallela al diametro 101-$\bar{1}0\bar{1}$, mentre fuori di questa striscia sono assai rari, e ne rimangono privi affatto due fusi opposti della sfera compresi tra le zone [001] e [103] come anche i quattro triangoli sferici compresi l'uno tra le zone [001], [010] e [111] e gli altri tre tra le zone analoghe.

« Se paragoniamo alla proiezione del pirosseno p. e. quella data da Bücking per l'epidoto, anche astrazione fatta dalla differenza che si svela nelle due sostanze per essere i cristalli di pirosseno generalmente allungati nel senso [001] e quelli d'epidoto nel senso [010], ci accorgiamo di leggeri di un notevole divario, di una condensazione cioè dei poli dell' epidoto in due larghe strisce incrocicchiantisi e lascianti tra esse e la zona [010] ricchissima di facce, otto triangoli sferici, due a due opposti, affatto o quasi privi di poli. Che s mili fenomeni sono in rapporto colla struttura fisica particolare delle sostanze, colle direzioni di preponderante accrescimento ecc., ci sembra abbastanza evidente.

« Nel descrivere le combinazioni dei cristalli, presso parecchi cristallografi è invalso l'uso di stabilire dei tipi fondati essenzialmente sulla relativa estensione delle faccie. Il La Valle si è astenuto dal seguire questo esempio per il diopside della Testa Ciarva, perchè studiando un grandissimo numero di cristalli impiantati e sciolti ha dovuto convincersi che i tipi che per avventura si volessero fissare, risulterebbero affatto arbitrarî e fittizî, e ciò per le insensibili differenze, o per dire meglio, per il passaggio continuo da un cristallo all'altro, ed anche perchè un tal modo di procedere obbligherebbe ad ascrivere ad almeno due tipi lo stesso cristallo in tutti i casi in cui questo è terminato alle due estremità. Noi siamo di parere che l'autore si è ben apposto a questo riguardo, e che i tipi fondati sulla relativa estensione delle faccie, in molti casi, e massime quando tali differenze non sono accompagnate da diversità di condizioni d'origine ossia di giacitura, non hanno che un assai limitato e discutibile valore geometrico, ma in nessun caso un valore paragonabile a quello che indubbiamente ha l'abito generale dei cristalli provenienti dallo stesso giacimento o dalla stessa cristallizzazione, abito forse difficile qualche volta a descriversi ma certamente dipendente dalle condizioni in cui i cristalli si sono formati, e che rende spesso facile al mineralista pratico di indicare con certezza la provenienza d'un dato campione.

« Aggiungiamo che la Memoria del La Valle è accompagnata dalla già menzionata ed interessantissima proiezione stereografica di tutte le forme ora note nel pirosseno e da tre tavole di disegni di cristalli di diopside maestrevolmente eseguiti, dai quali si può anche avere una idea approssimata delle non lievi difficoltà che l'autore ha dovuto superare.

« Concludendo noi riteniamo che il lavoro del La Valle è un importante contributo allo studio di una delle più interessanti specie minerali e alla cristallografia in genere, e quindi degno di essere accolto nei volumi dell'Accademia ».

# Sul Diopside di Val d'Ala.
## Studio cristallografico dell' ing. G. LA VALLE

I.

Da vario tempo ho intrapreso lo studio cristallografico del Diopside di Val d' Ala e nel 1884 già ne presentai una prima parte riguardante i Geminati polisintetici (1), ora ne rendo di pubblica ragione una seconda che riguarda la determinazione delle costanti cristallografiche e la descrizione delle singole forme osservate, nel Diopside di tal località.

Parecchi sono stati i mineralisti che si sono occupati dello studio cristallografico del Diopside di Val d'Ala, quali, già da tempo, l'Haüy, il Phillips (2), il Marignac (2), il Lévy, l' Hessemberg (3), il Kokscharow e più recentemente il Vom Rath (4), il quale potè segnalare alcune nuove forme, non che ultimamente il Götz (5) che ne aggiunse altre, trovate su cristalli esistenti nell'Istituto mineralogico dell'Università di Strasburgo.

Lo scopo del mio presente lavoro è quello di descrivere le forme e combinazioni che rinvengonsi nel Diopside della sopradetta località, e principalmente di calcolar le costanti cristallografiche, non essendo a mia conoscenza che altri l' abbia fatto, giacchè quelle date dal Kokscharow nella sua monografia del pirosseno, son dedotte dalle misure goniometriche istituite su diopsidi provenienti da varie località e cioè Achmatowsk, Ala, Vesuvio, Baikal; quelle calcolate dal Vom Rath riguardano il pirosseno giallo del Vesuvio; quelle del Lehmann (6) il Diopside di Nordmarken; e quelle riportate dai diversi autori il pirosseno in genere.

(1) Atti della r. Accademia Lincei 1883-84. Serie 3ª. Memorie della Classe di sc. fis. e nat. vol. XIX. Seduta 1° giugno 1884.

(2) Secondo Descloizeaux.

(3) Mineralog. Notizen (Abb. Senck. Nat. Gesellschafft II. Frankfurt A. M. 1856-58).

(4) Zeit. für Kry. VIII, 1, 1883.

(5) Zeit. für Kry. XI, 3, 1886.

(6) Zeit. für Kry. vol. V, pag. 533 (1881).

Il materiale che mi ha servito per le mie ricerche è una serie di cristalli semplici che fa parte della collezione stessa che mi servì per lo studio dei geminati e che come ho altra volta accennato è stata posta a mia disposizione dal prof. Strüver.

Essa comprende n. 137 cristalli semplici dei quali 90 potei sottoporre a misure goniometriche esatte.

Nei disegni che accompagnano il presente lavoro e che ho segnato col rispettivo loro numero di catalogo, ho avuto di mira di dare, nel limite del possibile, un'idea dell'estensione ed aspetto delle faccie di essi cristalli, ed a viemeglio raggiungere lo scopo, ho variato anche l'orientazione di essi, onde mettere sempre maggiormente in evidenza quella parte di cristallo che più interessa.

Finalmente ho aggiunta una proiezione stereografica riportante tutte le forme rese note, pel pirosseno in genere, dai diversi autori, e queste ho segnato con circoli vuoti; ho notato in essa con circoli di medesimo diametro ma tutti pieni quelle forme già note pel Diopside di Val d'Ala, e finalmente le nuove da me trovate le ho segnate con circoli pieni ma di minor diametro dei precedenti.

## II.

Io qui tratto esclusivamente del Diopside della Testa Ciarva alla Mussa in Val d'Ala; mi riserbo in seguito di trattare del Diopside della Corbassera, che si trova bensì nella stessa vallata ma in giacimento tutto affatto differente da quello della Mussa, come lo Strüver [1] dimostrò descrivendo i giacimenti minerali delle vallate di Lanzo ed a cui rimando il lettore.

Prima di esporre i risultati delle mie osservazioni alle quali paragonerò quelli del Kokscharow e di altri che mi sarà dato, riguardanti solo il Diopside di Val d'Ala; credo utile d'inserire un quadro cronologico delle forme sin' ora note nel pirosseno in genere come risultano dai trattati di mineralogia e dalle pubblicazioni speciali dei mineralisti che se ne sono occupati.

In esso ho fatto rilevare le forme trovate sul Diopside di Ala, onde poter vedere in seguito che alcune faccie se non son nuove pel pirosseno in genere, lo sono per le località di Val d'Ala.

[1] Memorie per servire alla descrizione della carta geologica d'Italia pubb. a cura del r. Comitato geolgico del Regno 1871. Firenze, vol. I, pag. 42 e seg. e riportata dagli Jahrbuch (1871) pag. 337. Minerallagerstätten des Alathales in Piemont.

*Quadro cronologico delle forme note nel pirosseno.*

| Lettere 1ª osserv.e | Simboli di Miller | Simboli di Naumann | Simboli di Weiss | Simboli di Lévy | Osservatore e località |
|---|---|---|---|---|---|
| *t* | 001 | 0 P | ∞ a : ∞ b : c | p (Haüy) | Lévy (1837) (1) Ala |
| *r* | 100 | ∞ P ∞ | a : ∞ b : ∞ c | $h^1$ » | Ala |
| *l* | 010 | ∞ P ∞ | ∞ a : b : ∞ c | $g^1$ » | |
| *M* | 110 | ∞ P | a : b : ∞ c | m » | |
| *f* | 310 | ∞ P 3 | a : 3 b : ∞ c | $h^2$ » | |
| | 210 | ∞ P 2 | a : 2 b : ∞ c | $h^3$ » | |
| *P* | $\bar{1}01$ | + P ∞ | a′ : ∞ b : c | $a^1$ » | |
| *n* | $\bar{1}02$ | $+\frac{1}{2}$ P ∞ | a′ : ∞ b : $\frac{1}{2}$ c | $a^2$ » | |
| *c* | 011 | P ∞ | ∞ a : b : c | $e^1$ » | |
| *z* | 021 | 2 P ∞ | ∞ a : b : 2 c | $e^{\frac{1}{2}}$ » | |
| | 041 | 4 P ∞ | ∞ a : b : 4 c | $e^{\frac{1}{4}}$ | |
| | 061 | 6 P ∞ | ∞ a : b : 6 c | $e^{\frac{1}{6}}$ | Ala e Baïkal (Siberia) |
| *u* | 111 | — P | a : b : c | $d^{\frac{1}{2}}$ (Haüy) | |
| | 221 (2) | — 2 P | a : b : 2 c | $d^{\frac{1}{4}}$ | |
| | 112 | $-\frac{1}{2}$ P | a : b : $\frac{1}{2}$ c | $d^1$ | Ala e S. Gottardo |
| | $\bar{1}12$ (3) | $+\frac{1}{2}$ P | a′ : b : $\frac{1}{2}$ c | $b^1$ | |
| *s* | $\bar{1}11$ | + P | a′ : b : c | $b^{\frac{1}{2}}$ (Haüy) | |
| *o* | $\bar{2}21$ | + 2 P | a′ : b : 2 c | $b^{\frac{1}{4}}$ » | |
| | $\bar{3}31$ (4) | + 3 P | a′ : b : 3 c | $b^{\frac{1}{6}}$ | |
| *i* | 621 (5) | — 6 P 3 | a : 3 b : 6 c | $d^1 d^{\frac{1}{2}} h^4$ | |
| | 511 (6) | — 5 P 5 | a : 5 b : 5 c | $d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}} h^2$ | |
| *v* | 121 (7) | — 2 P 2 | 2 a : b : 2 c | $d^1 h^{\frac{1}{3}} g^1 = \mu$ (Haüy) | |
| | 138 (8) | $-\frac{3}{8}$ P 3 | 3 a : b : $\frac{3}{8}$ c | $d^1 h^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{4}} = i'$ | |
| *x* | $\bar{2}11$ | + 2 P 2 | a′ : 2 b : 2 c | $h^1 h^{\frac{1}{3}} h^1 = a_3 = \alpha$ (Haüy) | |

| Lettere 1ª osserv.ᵉ | Simboli di Miller | Simboli di Naumann | Simboli di Weiss | Simboli di Lévy | Osservatore e località |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | $\bar{1}21$ (7) | $+ 2 \mathrm{P} 2$ | 2 a′: b: 2 c | $b^1 d^{\frac{1}{3}} g^1 =_3 e = \varepsilon$ (Haüy) | |
| | $\bar{1}31$ | $+ 3 \mathrm{P} 3$ | 3 a′: b: 3 c | $b^1 d^{\frac{1}{2}} g^2 = e_2$ | |
| | $\bar{1}42$ | $+ 2 \mathrm{P} 4$ | 4 a′: b: 2 c | $b^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{2}} = \gamma$ | |
| $\mu$ | 120 | $\infty \mathrm{P} 2$ | 2 a: b: ∞ c | $g^3$ (Haüy) | Miller (8) (1852) |
| *i* | 130 (1) | $\infty \mathrm{P} 3$ | 3 a: b: ∞ c | $g^2$ | |
| *y* | 10)1 (4 | $- \mathrm{P} \infty$ | a: ∞ b: c | $o^1$ | |
| *q* | $\bar{3}01$ | $+ 3 \mathrm{P} \infty$ | a′: ∞ b: 3 c | $a^{\frac{1}{3}}$ | |
| *d* | 131 | $- 3 \mathrm{P} 3$ | 3 a: b: 3 c | $d^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g' = \delta$ (Phillips) | |
| $\Phi$ | 152 | $-\frac{5}{2} \mathrm{P} 5$ | 5 a: b: $\frac{5}{2}$ c | $d^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} g' = \varphi$ | |
| $\zeta$ | $\bar{4}83$ | $+\frac{8}{3} \mathrm{P} 2$ | 2 a′: b: $\frac{8}{3}$ c | $b^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{12}} g^{\frac{1}{3}}$ | |
| | 510 | $\infty \mathrm{P} 5$ | a: 5 b: ∞ c | $h^{\frac{3}{2}}$ | Hessemberg (9) (1856) Mussa |
| | $\bar{3}35$ (10) | $+\frac{3}{5} \mathrm{P}$ | a′: b: $\frac{3}{5}$ c | $b^{\frac{5}{6}}$ | Mussa |
| $\gamma$ | $\bar{3}12$ | $+\frac{3}{2} \mathrm{P} 3$ | a′: 3 b: $\frac{3}{2}$ c | $b^1 b^{\frac{1}{2}} h^1 = a_2 = \beta$ (Haüy) | Arendal e Vesuvio |
| | $\bar{3}13$ | $+ \mathrm{P} 3$ | a′: 3 b: c | $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{3}} = \nu$ | Mussa |
| *s* | 421 (2) | $- 4 \mathrm{P} 2$ | a: 2 b: 4 c | $d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{6}} h^1$ | Descloizeaux (Marignac) |
| $\lambda$ | 711 (2) | $- 7 \mathrm{P} 7$ | a: 7 b: 7 c | $d^{\frac{1}{6}} d^{\frac{1}{8}} h^1 = d_{/}$ (Phillips) | Ala |
| | $\bar{3}32$ | $+\frac{3}{2} \mathrm{P}$ | a′: b: $\frac{3}{2}$ c | $b^{\frac{1}{3}}$ | Hessemberg 1863 (Saas) |
| $\psi$ | 501 | $- 5 \mathrm{P} \infty$ | a: ∞ b: 5 c | $o^{\frac{1}{5}}$ | Vom Raht (11) |
| *r* | 552 | $-\frac{5}{2} \mathrm{P}$ | a: b: $\frac{5}{2}$ c | $d^{\frac{1}{5}}$ | Kokscharow (12) (1862) |
| *w* | 331 | $- 3 \mathrm{P}$ | a: b: 3 c | $d^{\frac{1}{6}}$ | Achmatowsk |
| *h* | 441 | $- 4 \mathrm{P}$ | a: b: 4 c | $d^{\frac{1}{8}}$ | |
| $\beta$ | $\bar{8}85$ | $+\frac{8}{5} \mathrm{P}$ | a′: b: $\frac{8}{5}$ c | $b^{\frac{5}{16}}$ | |

| Lettere 1ª osserv.ᵉ | Simboli di Miller | Simboli di Naumann | Simboli di Weiss | Simboli di Lévy | Osservatore e località |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 312 | $-\frac{3}{2}$ P 3 | a : 3 b : $\frac{3}{2}$ c | $d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{4}}\ h^1$ | |
| $t$ | 351 | $-5$ P $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}$ a : b : 5 c | $d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{8}}\ g^1$ | |
| $l$ | 241 | $-4$ P 2 | 2 a : b : 4 c | $d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ g^1$ | |
| $x$ | 461 | $-6$ P $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ a : b : 6 c | $d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{10}}\ g^1$ | |
| $v$ | $\bar{1}51$ | $+5$ P 5 | 5 a′ : b : 5 c | $b^{\frac{1}{4}}\ d^{\frac{1}{6}}\ g^1$ | |
| | 920 | $\infty$ P $\frac{9}{2}$ | a : $\frac{9}{2}$ b : $\infty$ c | $h^{\frac{11}{7}}$ | Dana [13] (1868) |
| | 301 | $-3$ P $\infty$ | a : $\infty$ b : 3 c | $o^{\frac{1}{3}}$ | |
| | 102 ? | $-\frac{1}{2}$ P $\infty$ | a : $\infty$ b : $\frac{1}{2}$ c | $o^2$ | Dana o Sjögren |
| | 332 | $-\frac{3}{2}$ P | a : b : $\frac{3}{2}$ c | $d^{\frac{1}{3}}$ | |
| | 117 | $-\frac{1}{7}$ P | a : b : $\frac{1}{7}$ c | $d^{\frac{7}{2}}$ | Hj. Sjögren [14] (1880) |
| | $\bar{1}13$ | $+\frac{1}{3}$ P | a′ : b : $\frac{1}{3}$ c | $b^{\frac{3}{2}}$ | Nordmarken |
| | $\bar{2}23$ | $+\frac{2}{3}$ P | a′ : b : $\frac{2}{3}$ c | $b^{\frac{3}{4}}$ | „ |
| | 132 [15] | $-\frac{3}{2}$ P 3 | 3 a : b : $\frac{3}{2}$ c | $d^1 b^{\frac{1}{2}} g^1$ | „ |
| | 243 [15] | $-\frac{4}{3}$ P 2 | 2 a : b : $\frac{4}{3}$ c | $d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{6}}\ g^{\frac{1}{3}}$ | |
| $u$ | 322 | $-\frac{3}{2}$ P $\frac{3}{2}$ | a : $\frac{3}{2}$ b : $\frac{3}{2}$ c | $d^1 d^{\frac{1}{5}}\ h^{\frac{1}{2}}$ | Hj. Sjögren [16] (1882) |
| $z$ | 142 | $-2$ P 4 | 4 a : b : 2 c | $d^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{5}}\ g^{\frac{1}{2}}$ | Kafveltorp |
| $s$ | $\bar{1}22$ | $+$ P 2 | 2 a′ : b : c | $b^1 d^{\frac{1}{3}}\ g^{\frac{1}{2}}$ | |
| $o$ | $\bar{3}42$ | $+2$ P $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ a′ : b : 2 c | $b^1 d^{\frac{1}{7}}\ g^{\frac{1}{2}}$ | |
| $\Gamma$ | 311 | $-3$ P 3 | a : 3 b : 3 c | $d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{4}}\ h^1$ | Vom Rath [17] (1883) Mussa |
| $M$ | 401 | $-4$ P $\infty$ | a′ : $\infty$ b : 4 c | $o^{\frac{1}{4}}$ | J. Götz [18] 1886. Ala |
| $A$ | 211 | $-2$ P 2 | a : 2 b : 2 c | $d^1 d^{\frac{1}{3}}\ h^1$ | |
| $B$ | 411 | $-4$ P 4 | a : 4 b : 4 c | $d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{1}{5}}\ h^1$ | |

| Lettere 1ª osserv.ᵉ | Simboli di Miller | Simboli di Naumann | Simboli di Weiss | Simboli di Lévy | Osservatore e località |
|---|---|---|---|---|---|
| *D* | 922 | $-\frac{9}{2}\,\breve{P}\,\frac{9}{2}$ | $a:\frac{9}{2}\,b:\frac{9}{2}\,c$ | $d^{\frac{1}{7}}\,d^{\frac{1}{11}}\,h^{\frac{1}{2}}$ | |
| *E* | 10. 4. 1 | $-10\,\breve{P}\,\frac{5}{2}$ | $a:\frac{5}{2}\,b:10\,c$ | $d^{\frac{1}{6}}\,d^{\frac{1}{14}}\,h^{1}$ | |
| *R* | $\bar{1}32$ | $+\frac{3}{2}\,\breve{P}\,3$ | $3\,a:\quad b:\frac{3}{2}\,c$ | $b^{1}d^{\frac{1}{2}}\,g^{1}$ | Reichenstein (Slesia) |

(1) *Description d'un collection de minéraux formée par M. H. Heuland*, par M. A. Lévy, vol. II, pag. 27 e seg., § 66 a 74, fig. 23 a 27, tav. XXXI.

(2) Secondo Descloizeaux la forma $d^{\frac{1}{4}} = 221$ è stata trovata da Hessemberg (come questi la dà per nuova, ma erroneamente, giacchè prende $v = 221 = -\frac{1}{2}P$, mentre che essa è $-2P$), su diopsidi del Vesuvio e della Mussa e $b^{\frac{3}{1}} = \bar{5}53$; $v = \bar{3}13$ su cristalli della Mussa, la $d' = 112$, $v = \bar{3}13$, $\beta = \bar{3}12$, $s = 421$ da Marignac sul *diopside di Ala;* (sebbene Hessemberg Min. Notizen n. 5, 1863, dia anche la $\bar{3}12 = \beta$ per nuova); $b' = \bar{1}12$ anche da Scacchi su cristalli del Vesuvio, ($\lambda$) è d' di Phillipps.

(3) Questa forma è stata osservata anche da Hessemberg 1856, e da Scacchi (Vesuvio) secondo Descloizeaux.

(4) Il Kokscharow nella *Tavola delle forme del pirosseno* a pag. 357, vol. IV (Materialen zur Mineralogie Russlands), attribuisce:

la $b^{\frac{1}{0}} = +\,3\,P = \bar{3}31$ al Phillips
la $d' = -\frac{1}{2}P = 112$ al Miller
la $o' = -\,P\,\infty = 101$ a Breithaupt
la $g^2 = \infty\,\breve{P}\,3 = 130$ a Mohs ed Haidinger.

(5) La (621) è stata osservata anche da vom Rath sul *diopside di Ala*, 1883 (Zeit. für Kryst. VIII, 1).

(6) Queste forme non sono state indicate dagli altri autori; io le trovo indicate nel Lévy a pag. 30, fig. 25, XXXI, la (511) fra le zone [100:111] e [010:501], la (138) fra [112:$\bar{1}$01] [102:$\bar{1}$22].

(7) Le forme (121) e ($\bar{1}$21) l'Hessemberg (Abb. Senck. Nat. Gesellsch. 1856, II, pag. 173) le attribuisce a Quenstedt. La forma (121) secondo Descloizeaux è stata osservata da lui stesso come rara in cristalli di Warwick (S. U.).

(8) *Elem. introduction to Mineralogie.*

(9) *Min. Notizen*, I (Alb. Senck. Nat. Gesellschaft II, Frankfurt A. M.).

(10) L'Hessemberg, invece di $\bar{3}35 = +\frac{3}{5}P$ porta $+\frac{5}{3}P = \bar{5}53$ però dalla fig. disegnata e dalle zone nelle quali esso dice trovarsi tal forma nuova, risulta che il simbolo è quale ho io corretto; sebbene tale errore sia passato nel Manuale di Descloizeaux.

(11) Ann. Poggendorff. B. 111, p. 257.

(12) *Monografia del pirosseno*, Materialen zur Mineralogie Russlands, v. IV (1862).

## III.

### Aspetto generale dei cristalli.

I cristalli studiati essendo impiantati son quasi tutti terminati da una sola estremità; pochissimi ne trovai terminati d'ambo le parti e fra questi alcuni han terminazione d'aspetto differentissimo sebbene le forme che presentano sieno le stesse alle due estremità.

Ciò può ben vedersi nei disegni della tav. I n. 15885, 15922 ove osservasi che mentre nell'estremità superiore i pinakoidi (001) e ($\bar{1}$01) sono pochissimo estese, nella inferiore son le faccie predominanti, e di più mentre nella parte superiore predominano (111) e ($\bar{2}$21), nella inferiore esse sono pochissimo sviluppate.

In analogia a ciò osservasi che la colorazione e trasparenza in essi cristalli è differente, difatti mentre nella parte superiore son verde più o meno chiaro e trasparenti, nella inferiore si presentano più chiare e quasi lattiginose ed opache; il che poi fu notato per la più parte dei cristalli che erano impiantati e quindi che non son terminati che da una sola estremità. Fra questi però ve ne sono alcuni di uno dei quali ho fatto la rappresentazione nel n. 16061 che presentansi incolori, o bianchi lattiginosi, trasparentissimi o semi trasparenti e con i pinakoidi lucentissimi; i quali son frammisti ad altri che da tal colorazione all'estremità ove sono impiantati passano ad un color giallo di zolfo nell'estremità superiore.

Nel Diopside studiato difficilmente ho avuto cristalli costituiti da un solo individuo, ordinariamente essi si compongono di più individui aggruppati in posizione parallela, sviluppati più o meno distintamente ed in modo vario, e ciascuno terminato, per lo più dalle medesime forme massime per le predominanti.

---

(13) *System of Mineralogy*, Nuova York e Londra, V ediz. 1868, pag. 213.

Non cita le seguenti forme indicate da altri autori.

$\bar{1}02 = \frac{1}{2} \mathrm{P} \infty$ indicata da Miller; probabilmente per errore invece di 102 che non si trova anteriormente riportata da altro autore:

$\bar{2}11 = +2 \mathrm{P} 2$ e $061 = +6 \mathrm{P} \infty$ e $\bar{1}42 = +2 \mathrm{P} 4$ date da Lévy secondo Descloizeaux.

$711 = +7 \mathrm{P} 7$ data da Phillips secondo Descloizeaux.

(14) *Krystall. studien Geolog. Förhandl.* n. 13, s. 364-381, Zeit. für Kry. IV, p. 527 (1880).

(15) Il Lehmann (vedi nota Zeit. für Kry. 1881, vol. V, pag. 533) crede che invece di 132 corrisponda meglio il simbolo (243).

(16) Zeit. für Kry. VII, p. 118.

(17) Zeit. für Kry. VIII, 1. Egli dà per nuova la (301) riportata dal Dana, forse è nuova per la Mussa.

(18) Zeit. für Kry. XI, B. 3, p. 236 e seg.

Tal fatto che contribuì ad aumentare la difficoltà del lavoro goniometrico onde ottenere misure esatte, ho cercato di rappresentare nei disegni onde dare un' idea del diverso aggruppamento e dello sviluppo vario degli individui in ciascun cristallo.

Rispetto all'aspetto generale delle singole forme nei cristalli, essi ordinariamente presentano nella parte anteriore, la (111) molto sviluppata e lucentissima nel più dei casi; la quale ordinariamente è accompagnata dalla (421) che presentasi curva, e più o meno estesa. In pochissimi cristalli l'ho trovata più estesa della precedente, come ad esempio osservasi nella fig. 16045, tav. II. In alcuni cristalli questa forma vi manca assolutamente come ad esempio nella fig. 15946, tav. II; 16064, tav. III, ed in altri mentre da un lato del piano di simmetria essa vi esiste estesa più o meno della ($\bar{1}11$) dall' altro lato essa non si osserva affatto. Es. fig. 15920 e 16043, tav. II.

Le altre forme per lo più son secondarie, poche volte ebbi la (221) molto sviluppata ed unita alla (421) e (111) o d'ambi i lati del piano di simmetria o da un solo. Es. 15920, 15921, 15919, tav. II. Una sola volta la (311) come predominante (16037), tav. III. Nella parte posteriore poi la forma predominante è la ($\bar{2}21$), la quale si riscontra in tutti i cristalli

Essa è accompagnata dalla ($\bar{3}31$) per lo più poco o pochissimo sviluppata rispetto alla prima ed a queste soventi aggiungesi la ($\bar{1}11$) strettissima e più raramente altre della zona [$\bar{1}10$: 001].

Tutte le faccie però di questa zona si presentano quasi sempre striate parallelamente ad essa zona; pel quale aspetto fisico proprio ben si distinguono dalle altre del cristallo. Nei disegni ho riprodotto tal carattere di esse faccie ritenendolo caratteristico di esse. Finalmente abbiamo le forme (001) e ($\bar{1}01$) le quali ordinariamente si presentano opache e più o meno estese, sebbene la prima sempre più della seconda. In pochissimi cristalli ho trovato la (001) lucentissima e di aspetto simile alla (111).

Rarissimo è stato il caso di aver la sola (001) ed estesa tanto da avere poi la (111) poco sviluppata, come osservasi nella fig. 16043 della tav. II.

In molti cristalli caratteristica si presenta per aspetto la zona [110: $\bar{1}11$] e ciò non per il numero delle faccie abbastanza rilevante che in essa trovansi, ma bensì perchè a partire dalla (021) che se vi esiste è lucentissima, tutte le altre faccie verso la ($\bar{1}11$) son per lo più curve in modo che spesso formano una sola superficie cilindrica colla direttrice parallela alla zona.

Sulle faccie della zona verticale spesso ho osservato una striatura parallela alla (001). Senza entrare nella discussione se trattasi di vera e propria geminazione come vuole il Vom Rath, o di un fatto avvenuto per pressione, noto l'osservazione la quale ho riprodotto anche in qualche disegno, vedi n. 15920, tav. II; però tale striatura osservasi nettamente verso l'estremità ove il cristallo era impiantato ed ove si ha la colorazione più chiara e lattiginosa su descritta.

Finalmente prima di lasciare il mio dire sull'aspetto generale dei cristalli di Diopside della Mussa debbo far notare che mi sono completamente astenuto dal distinguere tipi diversi per sviluppo puramente geometrico o per combinazione, poichè esaminando un grande numero di cristalli (ed oltre ai 90 sopra menzionati ne ho visti molte e molte centinaia di altri, non sottoposti a misure goniometriche) mi parve che il numero dei cristalli, formanti passaggio dall' uno all' altro tipo eventualmente da

stabilirsi, fosse talmente grande di fronte al numero dei cristalli tipici, da rendere illusoria la distinzione di tipi diversi; e si aggiunge ancora che i cristalli terminati alle due estremità, quasi senza eccezione, dovrebbero classificarsi sotto due tipi diversi.

## IV.

## Descrizione delle singole faccie.

### *Pinakoidi.*

I pinakoidi (100), (010) (001) sono note fin d'Haüy, nel cui trattato son distinte con le lettere *r*, *l*, *t*, ed incontransi costantemente.

I primi due si presentano alle volte egualmente estese, altre volte molto disegualmente, nel qual caso, i cristalli son tabulari or secondo l'una or secondo l'altra forma.

Il pinakoide (001) per lo più l'ho trovato opaco e poco sviluppato; in pochi cristalli era splendentissimo e potè misurarsi con le faccie adiacenti; in pochissimi cristalli l'ebbi molto sviluppato es. fig. 16043, tav. II.

### *Prismi verticali.*

I prismi verticali noti, sono (110) (310) (120) indicati dall' Haüy con le lettere M, *f*, *μ*; (210) dal Lévy con *g*; (130) dal Miller con *i*; (510) dall'Hessemberg; (920) dal Dana.

Di essi le forme predominanti e sempre trovate sono la (110) e (310) più o meno sviluppate. Frequentemente trovai la (510); poche volte la (920); una sol volta la (130) e (120) e precisamente nel cristallo segnato col n. 48.

Queste faccie per lo più sono striate parallelamente alla lor zona, onde poche furono le misure che poterono ritenersi attendibili.

In alcuni cristalli si sarebbero potute trovare delle nuove faccie, ma l'incertezza delle misure ottenute e la pochissima loro estensione mi ha fatto desistere dal presentarle.

Le misure goniometriche ritenute le più precise fra le numerose avute, per la zona di cui trattasi (1) sono le seguenti:

(1) La media delle letture di ciascun angolo l'ho ottenuta con la formola

$$V_1 = \frac{h_1^2 v_1 + h_2^2 v_2 + .... + h_n^2 v_n}{h_1^2 + h_2^2 + .... h_n^2}$$

ove $h_1\ h_2 .... h_n$ sono le precisioni delle osservazioni, e $v_1\ v_2 .... v_n$ i valori degli angoli.

| n. | 100:510 | p. | n. | 100:310 | p. | n. | 310:110 | p. | n. | 110:130 | p. | n. | 130:010 | p. | n. | 110:010 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11° 52′ 10″ | III | 1 | 19° 29′ — ″ | I | 1 | 27° 12′ 20″ | III | 48 | 26° 3′ 40″ | II | 48 | 17° 37′ 20″ | III | 1 | 43° 34′ 40″ | III |
| 60 | 57 — | I | | 9 20 | I | | 11 — | I | | | | | | | | 30 20 | III |
| 31 | 42 40 | I | | 14 40 | III | 22 | 7 — | III | | | | | | | 71 | 32 40 | II |
| 77 | 48 — | I | 30 | 9 — | III | | 26 58 20 | III | | | | | | | | 40 — | III |
| 50 | 60 — | I | 22 | 15 20 | II | 38 | 27 4 — | III | | | | | | | | 34 5 | III |
| | | | | 23 20 | III | 60 | 27 — | I | | | | | | | | 36 35 | III |
| | | | 12 | 24 — | II | | 9 — | III | | | | | | | 83 | 34 10 | III |
| | | | | 19 50 | II | | 1 — | I | | | | | | | 22 | 38 — | III |
| | | | | 27 50 | II | 61 | 9 20 | II | | | | | | | | 35 — | I |
| | | | 18 | 4 — | I | 31 | 8 20 | I | | | | | | | 12 | 38 28 | II |
| | | | 38 | 11 20 | III | 31*bis* | 4 20 | I | | | | | | | | 35 — | II |
| | | | | 13 40 | III | | 7 20 | I | | | | | | | 48 | 36 40 | III |
| | | | 60 | 18 54 20 | I | 77 | 13 — | II | | | | | | | 38 | 33 40 | II |
| | | | | 19 38 20 | II | | 13 — | I | | | | | | | 60 | 19 — | I |
| | | | 61 | 9 — | I | 50 | 14 — | I | | | | | | | | 35 — | III |
| | | | 31 | 8 20 | I | | | | | | | | | | | 39 — | II |
| | | | | 12 — | I | | | | | | | | | | 61 | 30 — | II |
| | | | | 14 40 | I | | | | | | | | | | 31 | 38 20 | III |
| | | | 31*bis* | 10 40 | I | | | | | | | | | | | 39 — | III |
| | | | 77 | 21 — | II | | | | | | | | | | 31*bis* | 47 — | III |
| | | | | 3 — | I | | | | | | | | | | | 45 — | II |
| | | | | 17 20 | I | | | | | | | | | | 77 | 27 20 | III |
| | | | 50 | 15 — | II | | | | | | | | | | | 33 20 | II |
| | | | | | | | | | | | | | | | 50 | 25 — | I |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 35 20 | II |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 31 20 | II |
| Media | 11 52 5 | | | 19 16 27 | | | 27 7 27 | | | 26 3 40 | | | 17 37 20 | | | 43 35 43 | |
| Calcolato | 11 51 26 | | | 19 17 10 | | | 27 6 16 | | | 25 59 35 | | | 17 36 59 | | | 43 36 34 | |
| Differenza | + 39 | | | — 43 | | | + 1 11 | | | + 4 5 | | | + 21 | | | — 51 | |

*Pinakoidi della forma* h o l.

Dei prismi di questa forma noti pel pirosseno; nel Diopside di Val d'Ala sono stati trovati ($\bar{1}01$) dal Lévy; (501) e (301) dal V. Rath; (401) dal Götz.

La ($\bar{1}01$) l'ho trovata quasi sempre, ma opaca, eccetto in una serie di cristallini bianchi terminati d'ambo l'estremità e precedentemente menzionata ad es. vedi fig. 16061, tav. I. La (501) che ho avuto quasi frequente è sempre lucentissima e riflettente immagini nette. Con questa, quasi raramente, ho trovato la (301) o la (401); però sempre pochissimo sviluppate. Vedi 15920, 15921, 15946, 16045, tav. II.

Gli angoli potuti misurare in questa zona sono:

| n. | 100:301 | p. | n. | 100:001 | p. | n. | 001:$\bar{1}$01 | p. | n. | 100:501 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 25° 60′ — ″ | I | 83 | 74° 3′ 47″ | I | 22 | 31° 23′ 20″ | III | 78 | 17° 59′ — ″ | I |
| 73 | 57 — | I | 11 | 18 20 | III | | | | 63 | 57 — | I |
| | | | | 16 40 | III | | | | 11 | 47 — | I |
| | | | 22 | 30 — | I | | | | 72 | 67 — | I |
| | | | 55 | 13 40 | III | | | | 64 | 54 — | I |
| | | | 59 | 73 32 40 | II | | | | 73 | 57 — | I |
| | | | | 74 8 — | II | | | | | | |
| | | | 77 | 11 40 | III | | | | | | |
| | | | 74 | 15 20 | III | | | | | | |
| | | | 51 | 11 20 | III | | | | | | |
| Misurato | 25 58 30 | | | 74 11 32 | | | 31 23 20 | | | 17 56 50 | |
| Calcolato | 26 55 46 | | | 74 8 53 | | | 31 22 — | | | 17 55 25 | |
| Differenze | — 57 16 | | | + 2 39 | | | + 1 20 | | | + 1 25 | |

*Prismi della forma* o k l.

Dei prismi di tal forma son noti pel Diopside di Val d'Ala (011) (021) indicati da Haüy con c e z; (041) da Lévy.

Di essi il più frequente ho trovato il (021), al quale non di rado è aggiunto il (041), e quando coesistono, or l'uno or l'altro è sviluppato maggiormente. Vedi fig. 16042, tav. II e 5601, 16051, 16077, 16065, tav. III.

Il (011) l'ho rinvenuto due sole volte e sempre solo e pochissimo esteso, e precisamente nei cristalli n. 5 e 39.

Essi prismi e massime i primi due sono lucentissimi e riflettono immagini nettissime.

Le misure ottenute per questa zona sono:

| n. | 010:041 | p. | n. | 041:001 | p. | n. | 010:021 | p. | n. | 041:021 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 23° 45′ — ″ | I | 55 | 66° 8′ 40″ | III | 72 | 41° 17′ — ″ | III | 70 | 17° 39′ 40″ | II |
| 81 | 53 | III | | | | | 25 — | I | 82 | 35 20 | II |
| 54 | 51 20 | I | | | | 81 | 26 — | III | 55 | 36, 40 | III |
| 41 | 52 — | II | | | | 41 | 21 — | III | | | |
| 42 | 52 — | II | | | | 55 | 28 — | III | | | |
| 48 | 43 40 | I | | | | 58 | 18 40 | II | | | |
| 18 | 51 — | II | | | | | 22 — | II | | | |
| 51 | 52 — | I | | | | 77 | 30 — | III | | | |
| | 48 59 | I | | | | 74 | 23 — | III | | | |
| | | | | | | | 24 — | III | | | |
| | | | | | | 51 | 27 13 | I | | | |
| Medie | 23 50 46 | | | 66 8 40 | | | 41 23 46 | | | 17 37 3 | |
| | 23 50 49 | | | | | | | | | | |
| Calcolate | 23 47 27 | | | | | | 41 24 12 | | | 17 36 45 | |
| Differenze | + 3 21 | | | | | | — 26 | | | + 18 | |

*Prismi della forma* h k l.

(111) Questa faccia indicata da Haüy con (u) l'ho trovata costantemente in tutti i cristalli studiati; ordinariamente presentasi lucentissima e riflettente bellissime immagini, sebbene non sempre semplici; qualche volta però opaca o traslucida.

Essa per lo più è una delle faccie più estese e quasi la predominante del cristallo; più raramente tale non la rinvenni. Vedi fig. 16064, 16073, tav. III e 17318, 16045, tav. II.

Misurata con (010) (1$\bar{1}$1) (100) (001) diede i risultati seguenti:

| n. | 111:010 | p. | n. | 111:1$\bar{1}$1 | p. | n. | 111:100 | p. | n. | 111:110 | p. | n. | 111:001 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 65° 35′ — ″ | II | 5 | 48° 56′ 40″ | II | 32 | 53° 48′ — ″ | I | 54 | 45° 16′ — ″ | III | 55 | 79° 7′ — ″ | III |
| 67 | 46 — | III | 67 | 14 20 | III | 71 | 51 — | II | 65 | 9 — | II | 77 | 9 — | II |
| 1 | 45 — | II | 32 | 32 40 | III | | 62 50 | III | 66 | 8 — | I | | | |
| 32 | 38 20 | III | 63 | 33 — | III | | p. diff. 59 — | III | | 16 — | I | | | |
| | 47 20 | I | 79 | 23 30 | III | 19 | 55 — | I | 13 | 13 40 | II | | | |
| 33 | 36 — | II | 71 | 41 — | III | 65 | 10 — | II | | 16 20 | III | | | |
| 79 | 37 40 | III | 10 | 48 — | I | | 18 20 | III | 55 | 26 — | III | | | |
| 19 | 43 40 | III | 83 | 43 20 | I | 21 | 28 20 | I | 3 | 7 — | III | | | |
| | 27 — | II | 53 | 39 — | I | 23 | 52 50 | II | 77 | 19 — | III | | | |
| 83 | 32 20 | I | 72 | 40 — | II | | 54 25 | II | | 18 — | III | | | |
| | 40 — | I | 41 | 46 30 | III | 55 | 62 40 | III | $45_1$ | 21 — | I | | | |
| 11 | 6 30 | I | 2 | 26 — | I | | 66 20 | III | | | | | | |
| 81 | 56 — | I | 21 | 29 — | I | 3 | 52 — | I | | | | | | |
| | 31 — | I | 23 | 27 — | III | 38 | p. diff. 69 20 | III | | | | | | |

| n. | 111:010 | p. | n. | 111:1$\bar{1}$1 | p. | n. | 111:100 | p. | n. | 111:110 | p. | n. | 111:001 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 65° 45′ 20″ | III | 12 | 48° 46′ 53″ | II | 38 | p. diff. 66′ 40″ | II | | | | | | |
| | 46 20 | III | 13 | 31 20 | III | 49 | „ 66 38 | III | | | | | | |
| 41 | 45 40 | III | 55 | 22 20 | III | | 67 — | II | | | | | | |
| 42 | 45 40 | III | 3 | 27 20 | III | 31 | 56 20 | II | | | | | | |
| 2 | 43 — | III | 25 | 32 — | I | | 58 40 | II | | | | | | |
| 22 | 35 — | III | 74 | 24 20 | III | 31*bis* | 54 40 | I | | | | | | |
| | 48 20 | I | 15 | 22 — | II | | 56 — | I | | | | | | |
| 23 | 50 — | II | 37 | 24 40 | III | | p. diff. 49 40 | II | | | | | | |
| | 51 — | II | $9_6$ | 30 — | II | | „ 56 20 | III | | | | | | |
| 12 | 44 53 | II | 59 | 21 20 | II | 50 | „ 62 40 | III | | | | | | |
| 13 | 50 20 | II | 38 | 29 40 | III | $45_1$ | 55 24 | III | | | | | | |
| | 50 — | I | 49 | 28 — | I | | 56 40 | III | | | | | | |
| 25 | 44 — | I | 18 | 28 20 | III | 14 | 61 20 | I | | | | | | |
| | 45 — | I | 31 | 32 — | I | | | | | | | | | |
| 15 | 51 — | II | 31*bis* | 29 40 | III | | | | | | | | | |
| 59 | 62 20 | I | 77 | 26 — | III | | | | | | | | | |
| | 61 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 48 | 47 — | III | | | | | | | | | | | | |
| 38 | 49 20 | III | | | | | | | | | | | | |
| | 41 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 49 | 58 40 | I | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 69 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 54 40 | III | | | | | | | | | | | | |
| | 36 — | III | | | | | | | | | | | | |
| 31 | 49 40 | I | | | | | | | | | | | | |
| | 50 40 | I | | | | | | | | | | | | |
| 31*bis* | 46 20 | III | | | | | | | | | | | | |
| | 44 20 | III | | | | | | | | | | | | |
| 50 | 30 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 74 | 47 40 | III | | | | | | | | | | | | |
| 45 | 47 17 | I | | | | | | | | | | | | |
| | 45 47 | I | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 46 — | I | | | | | | | | | | | | |
| | 43 20 | I | | | | | | | | | | | | |
| Medie | 65 44 14 | | | 48 30 7 | | | 53 55 41 | | | 45 16 15 | | | 33 52 39 | |
| | | 65 44 30 | | | | | | | | | | | | |
| Calcolati | | 65 45 54 | | | | | 53 55 54 | | | 45 18 29 | | | 33 49 57 | |
| Differenze | | — 1 24 | | | | | — 13 | | | — 2 14 | | | + 2 42 | |

(421) Questa faccia indicata dal Descloizeaux come trovata da Marignac l'ho incontrata con moltissima frequenza assieme alla (111) e presentasi quasi costantemente curva, a superficie irregolare e riflettente più immagini sbiadite ed incerte per il che poche e brutte misure poterono aversi. Essa per lo più è poco estesa, però in alcuni cristalli è una della faccie predominanti rimanendo allora poco estesa la (111).

In altri cristalli poi, mentre da un lato del piano di simmetria è la faccia più estesa e non esiste o quasi la (111), dall'altro lato si osserva assieme alla (111) più o meno di questa sviluppata, vedi ad es. fig. 16045, 15920, tav. II.

Le poche misure potutesi avere sono:

| n. | 421:010 | p. | n. | 421:100 | p. |
|---|---|---|---|---|---|
| $9_1$ | 66° 63′ 20″ | I | 1 | 30° 6′ — ″ | I |
| 63 | 33 20 | I | | | |
| 11 | 121 — | I | | | |
| 29 | 65 45 — | I | | | |
| Medie | 66 50 40 | | | 30 6 | |
| Calcolati | 66 34 13 | | | 31 25 36 | |
| Differenze | + 16 27 | | | — 1 19 36 | |

(221) Questa forma notata dal Lévy l'ho avuta meno frequente delle precedenti; essa accompagna ordinariamente la (421) ed allora partecipa della curvatura di questa, sebbene l'immagine da essa data sia più netta; alle volte però la sostituisce completamente. Essa l'ebbi sempre relativamente poco sviluppata, e nei cristalli in cui la (110) è estesa ed incontrante direttamente la (111) essa se vi esiste è strettissima ed allungata secondo la zona di esse faccie. Vedi fig. 15936 e 17318, tav. II.

| n. | 221:010 | p. | n. | 221:2$\bar{2}$1 | p. | n. | 221:100 | p. | n. | 221:110 | p. | n. | 221:111 | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 78 | 55° 42′ — ″ | I | 34 | 68° 28′ — ″ | I | 22 | 47° 35′ — ″ | II | 65 | 29° 7′ — ″ | I | 65 | 15° 48′ — ″ | III |
| 34 | 24 20 | II | 37 | 25 20 | III | | 46 53 20 | I | 66 | 6 40 | II | 12 | 53 36 | III |
| 64 | 32 — | I | 51 | 58 40 | II | | | | 22 | 11 — | I | 37 | 74 20 | III |
| 12 | 35 50 | III | | | | | | | 12 | 12 56 | III | 58 | 68 40 | II |
| 47 | 53 — | II | | | | | | | | | | | | |
| 29 | 39 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 36 | 37 20 | II | | | | | | | | | | | | |
| 37 | 27 — | II | | | | | | | | | | | | |
| 51 | 50 40 | II | | | | | | | | | | | | |
| | 39 — | I | | | | | | | | | | | | |
| Medie | 55 37 41 | | | 68 35 16 | | | 47 26 40 | | | 29 9 43 | | | 15 59 56 | |
| | 55 38 46 | | | | | | | | | | | | | |
| Calcolati | 55 40 02 | | | | | | 47 41 36 | | | 29 14 04 | | | 16 4 25 | |
| Differenze | — 1 16 | | | | | | — 14 56 | | | — 4 21 | | | — 4 29 | |

(311) Questa faccia notata dal Vom Rath sul diopside la Mussa, incontrasi abbastanza frequentemente.

Per lo più la rinvenni poco estesa e nei cristalli ov'essa è accoppiata con la (421) presentasi come limite di curvatura di questa sebbene se ne distingue per lucentezza. Vedi fig. 15919, 15920, 15921, 15936, tav. II. In altri cristalli essa sta fra (100) e (111) e presentasi più estesa e ben sviluppata, vedi ad es. 17294, tav. III; ma dove l'ebbi bellissima e quasi come forma predominante si fu nel cristallo n. 34 e rappresentato nel disegno n. 16037, tav. III, il quale è terminato da ambo l'estremità, e solo da una di esse ci mostra la (311) come firma predominante e d'ambo i lati del piano di simmetria.

Le misure che ho potuto ritenere esatte son le seguenti:

| n. | 311:010 | p. | n. | 311:3$\bar{1}$1 | p. |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 75° 10′ — ″ | II | 75 | 29° 44′ 20″ | I |
| 47 | 32 — | II | 34 | 60 20 | I |
| 36 | 13 — | II | 15 | 47 — | I |
| 37 | 74 41 40 | II | 37 | 77 20 | II |
| 51 | 75 15 — | I | 51 | 62 20 | III |
| | 75 9 28 | | | 30 3 52 | |
| Media | | | 75 3 46 | | |
| Calcolato | | | 75 3 7 | | |
| Differenza | | | + 39 | | |

(131) Questa forma attribuita al Phillips dal Descloizeaux, l'ho trovata in pochi cristalli.

Essa presentasi o strettissima fra (010) e (111) con le quali è in zona, es. fig. 16042, 15946, tav. II; 16047, tav. I; 16051, tav. III o pochissimo estesa fra (221) ($\bar{2}$21) (021) (010) come ad es. fig. 15920, tav. II.

Potei misurarla con (010) e (021) ed ottenni:

| n. | 131:010 | p. | n. | 131:021 | p. |
|---|---|---|---|---|---|
| 78 | 36° 29′ — ″ | I | 41 | 15° 50′ — ″ | III |
| 41 | 45 — | I | | | |
| 48 | 20 — | I | | | |
| 17 | 33 20 | I | | | |
| Medie | 36 31 50 | | | 15 50 — | |
| Calcolati | 36 31 10 | | | 15 59 14 | |
| Differenze | + 40 | | | — 9 14 | |

(152) Questa faccia è riportata dal Trattato del Miller e dal Descloizeaux; io l'ho rinvenuta con ancor minore frequenza della precedente e pochissimo estesa fra le faccie 041, 021, 111 e 010. Ovvero fra 010, 111, $\bar{2}21$, 041. Vedi fig. 16065, 16073, 16077, tav. III.

Essa più che con le misure goniometriche è stata determinata con le zone, giacchè per la sua sottigliezza non fu possibile avere valori angolari certi.

(241) Con ancor minor frequenza trovai questa faccia che il Kokscharow ha notato sul Diopside di Achmatowsk.

Essa è strettissima, quanto la precedente, e sta fra (010) e (221) con le quali è in zona. Fig. 15920, 15921, tav. II.

Anch'essa fu determinata con le zone, le misure goniometriche mi riuscirono approssimate ma verificarono, nel limite dell'osservazione, il simbolo dalle zone ottenuto.

(121) Questa forma è stata notata da Haüy con ($\mu$) su cristalli provenienti dalla valle di Fassa, ed anche da Descloizeaux che trovò rara su cristalli bianchi un po' alterati di Warwick (Stati Uniti).

Io l'ho trovata due sole volte sui cristalli 79 e 82, nel primo sta fra (111) e (131) e giace nella zona [100:421]. Nel secondo è combinata con (111) e (131) con le quali è in zona e con (221) e (021) altra sua zona.

In ambo i campioni è strettissima e non potè determinarsi che con le zone indicate; le misure angolari furono approssimate ma concordavano nei risultati.

(112) Questa faccia si trova notata dal Lévy su cristalli del S. Gottardo e di Ersby, Pargas, Finland: secondo Descloizeaux è attribuita a Marignac l'averla osservata su cristalli di Val d'Ala; il Kokscharow l'attribuisce al Miller.

Io l'ho osservata in un sol cristallo e precisamente sul n. 77. Vedi fig. 17318, tav. II fra (111) e (001), in cui essa esiste d'ambo i lati del piano di simmetria ma disegualmente sviluppata, sempre però poco estesa.

Potei misurarla con (111) e (001) ed ottenni:

| Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|
| $112 : 111 = 14^\circ\ 8''$ | $14^\circ\ 7'\ 38''$ | $+\ 0'\ 22''$ |
| $112 : 001 = 19\ \ 41$ | $19\ \ 42\ \ 19$ | $-\ 1\ \ 19$ |

Verificai inoltre che stava nella zona [100 : $\bar{1}12$] trovandosi nel cristallo anche la ($\bar{1}12$).

(461) Questa forma è stata osservata dal Kokscharow sul Diopside verde di Achmatowsck; io l'ho trovata una sol volta nel cristallo N. 28.

Essa è strettissima fra (130) e (421) e potei determinarla a mezzo delle zone

[010 : 421], [110 : $\bar{1}$10]. Le misure goniometriche sono state molte approssimate tal faccetta misurandosi molto male; non pur di manco credo di registrarle:

| Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|
| 461 : 111 = 34° 29′ | 35° 23′ 20″ | — 54′ 20″ |
| 461 : 010 = 38° 47′ | 37° 34′ 02″ | + 1° 12′ 58″ |

Debbo far notare che la (111) rifletteva più immagini, ma le altre non mi han dato migliore approssimazione ai valori calcolati.

*Prismi della forma* $\bar{h}$ k l.

($\bar{2}$21) Questa faccia è stata notata da Haüy (o) e nel Diopside esiste sempre per lo più come forma predominante.

Essa ha aspetto fisico caratteristico essendo quasi sempre striata parallelamente alla zona [$\bar{1}$10 : 001], pel qual carattere si distingue facilissimamente dalle altre.

Poche volte la rinvenni poco sviluppata, ma esistente sempre.

Le misure ottenute con le adiacenti facce sono state le seguenti:

| n. | $\bar{2}21:010$ | p. | n. | $\bar{2}21:\bar{2}\bar{2}1$ | p. | n. | $\bar{2}21:\bar{1}00$ | p. | n. | $\bar{2}21:001$ | p. | n. | $\bar{2}21:\bar{1}10$ | p. | n. | $\bar{2}21:\bar{3}10$ | p. | n. | $\bar{2}21:221$ | p. | n. | $\bar{2}21:111$ | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 47° 56′ 20″ | II | 9₁ | 84° 30′ 20″ | II | 9₁ | 61° 34′ 40″ | II | 81 | 65° 21′ — ″ | III | 65 | 35° 19′ 40″ | I | 38 | 47° 56′ 20″ | III | 12 | 70° 38′ 40″ | II | 38 | 66° 52′ 40″ | III |
| 1 | 55 40 | III | 63 | 9 40 | II | 11 | 21 30 | I | 65 | 20 — | III | 66 | 29 — | I | | | | | | | | 49 — | III |
| 11 | 58 50 | III | 81 | 8 — | III | 12 | 37 44 | I | 22 | 20 — | III | 13 | 25 — | II | | | | | | | | | |
| 72 | 54 — | III | 54 | 15 — | III | 48 | 31 40 | III | 55 | 26 — | II | 55 | 32 40 | III | | | | | | | | | |
| | 11 — | I | 41 | 6 20 | III | 38 | 31 20 | III | 59 | 8 20 | II | 38 | 36 40 | III | | | | | | | | | |
| 12 | 55 36 | III | 25 | 13 — | II | | 29 20 | II | 77 | 20 — | I | 4 | 20 20 | III | | | | | | | | | |
| 3 | 51 — | I | 38 | 12 20 | III | 49 | 40 — | II | 74 | 23 — | I | 61 | 39 — | II | | | | | | | | | |
| 49 | 52 40 | II | 61 | 83 58 40 | III | | 33 40 | III | | 15 — | I | 27 | 36 — | III | | | | | | | | | |
| | 48 — | II | 50 | 84 15 — | III | 4 | 21 — | I | | | | | | | | | | | | | | | |
| 61 | 52 — | II | 74 | 10 20 | I | | p. diff. 24 — | II | | | | | | | | | | | | | | | |
| 51 | 54 — | II | 27 | 2 — | I | 61 | 34 — | III | | | | | | | | | | | | | | | |
| 74 | 51 40 | III | | | | | 40 — | III | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 77 | 31 20 | I | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 50 | 28 — | III | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 34 20 | III | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 14 | 29 — | I | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 27 | 32 40 | III | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 34 40 | I | | | | | | | | | | | | | | | |

| | 47 53 33 | 84 10 37 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Misurati | 47 54 6 | | 61 33 48 | 65 19 42 | 35 31 12 | 47 56 20 | 70 38 40 | 66 50 50 |
| Calcolati | 47 54 50 | | 61 30 25 | 65 22 55 | 35 28 39 | 47 48 19 | 70 47 59 | 67 2 16 |
| Differenze | — 44 | | + 3 23 | — 3 13 | + 2 33 | + 8 1 | — 9 19 | — 11 26 |

($\bar{3}31$) Questa forma tanto dal Kokscharow che dal Descloizeaux è attribuita al Phillips al quale con ragione spetta la priorità, sebbene sia riportata dal Lévy ($\lambda$) cui il Phillips se non precesse fu almeno contemporaneo, il che non ho potuto verificare non essendo a mia disposizione la 3ª e la 4ª edizione del Trattato di tal mineralista.

Nei cristalli studiati tal faccia l'ho trovata sempre esistente, però raramente sviluppata come la ($\bar{2}21$), per lo più è stretta ed in alcuni cristalli finisce per essere appena visibile.

Anch'essa come la precedente $\bar{2}21$ è striata parallelamente alla zona $[\bar{1}10 : 001]$.

Per le ragioni anzidette poche sono state le misure che poterono esser prese fra essa e le faccie adiacenti; le ottenute sono le seguenti:

| n. | $\bar{3}31 : \bar{1}10$ | p. | n. | $\bar{3}31 : 001$ | p. | n. | $\bar{3}31 : \bar{1}00$ | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53 | 24° 28′ — ″ | I | 22 | 76° 20′ — ″ | III | 4 | 55° 19′ 40″ | II |
| | 27 — | I | | | | | | |
| 65 | 35 — | III | | | | | | |
| 66 | 31 — | II | | | | | | |
| 55 | 31 20 | III | | | | | | |
| 38 | 84 — | I | | | | | | |
| 4 | 23 40 | III | | | | | | |
| 27 | 42 — | I | | | | | | |
| Misurati | 24 31 51 | | | 76 20 — | | | 55 19 40 | |
| Calcolati | 24 26 18 | | | 76 25 16 | | | 55 24 57 | |
| Differenze | + 5 33 | | | — 5 16 | | | — 5 17 | |

($\bar{1}11$) Questa forma è stata notata da Haüy con (s); nei cristalli del Diopside di Val d'Ala incontrasi con una certa frequenza e per lo più o poco estesa, o strettissima; in pochissimi cristalli la rinvenni relativamente più sviluppata da potermi permettere misure goniometriche.

Anch'essa è striata come la precedente e come ordinariamente tutte le faccie della zona $[\bar{1}10 : 001]$.

Essa potè esser misurata in pochi cristalli, con le faccie adiacenti ed ottenni i risultati seguenti:

| n. | $\bar{1}11 : 001$ | p. | n. | $\bar{1}11 : \bar{2}21$ | p. | n. | $\bar{1}11 : 111$ | p. | n. | $\bar{1}11 : \bar{1}00$ | p. | n. | $\bar{1}11 : 021$ | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 41° 50′ — ″ | III | 48 | 23° 13′ 20″ | III | 22 | 49° 28′ 20″ | II | 48 | 76° 40′ 20″ | I | 83 | 30° 28′ — | I |
| 55 | 60 — | I | | | | 55 | 23 — | I | | 46 — | I | | | |
| 48 | 53 — | III | | | | 48 | 18 20 | III | | | | | | |
| 77 | 50 — | II | | | | | 32 40 | I | | | | | | |
| | 49 — | I | | | | | | | | | | | | |
| 51 | 63 20 | III | | | | | | | | | | | | |
| Medie | 41 54 43 | | | 23 13 20 | | | 49 22 16 | | | 76 43 10 | | | 30 28 — | |
| Calcolati | 42 3 36 | | | 23 19 19 | | | 49 31 3 | | | 76 33 3 | | | 30 31 — | |
| Differenze | — 8 53 | | | — 5 59 | | | — 8 47 | | | + 10 7 | | | — 3 | |

($\bar{1}12$) Questa faccia è notata dal Lévy ($r$) ed è stata osservata anche da Hessimberg (1856) e da Scacchi al Vesuvio.

Io la rinvenni solo 19 volte fra i cristalli studiati e quindi con poca frequenza.

In quanto ad aspetto fisico partecipa delle precedenti; per estensione essa non è al certo una delle forme predominanti giacchè se vi esiste la è sempre strettissima.

Misure attendibili poterono essere instituite sopra un cristallo e mi diedero i seguenti risultati:

| n. | $\bar{1}12:010$ | p. | n. | $\bar{1}12:\bar{1}\bar{1}2$ | p. | n. | $\bar{1}12:001$ | p. | n. | $\bar{1}12:111$ | p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 77 | 73° 30′ 20″ | II | 77 | 32° 52′ — | I | 77 | 22° 25′ 40″ | I | 77 | 38° 4′ — ″ | I |
| | 29 — | II | | | | | 25 — | I | | 2 — | I |
| | 73 29 40 | | | 32 52 | | | | | | | |
| Medie | 73 30 9 | | | | | | 22 25 20 | | | 38 3 | |
| Calcolati | 73 34 38 | | | | | | 22 32 56 | | | 38 12 30 | |
| Differenze | — 4 29 | | | | | | — 7 36 | | | — 9 30 | |

($\bar{3}12$) Questa faccia è stata osservata da Hessemberg (1856) sebbene il Kokscharow la dia per nuova nella sua monografia del pirosseno del 1862, forse intendeva parlare della 312 dimenticandone il segno per errore.

Secondo Descloizeaux questa forma è stata pur notata da Marignac sul Diopside di Val d'Ala, io infatti la ritrovai ma come faccia molto rara non avendola avuta che solo 4 volte sotto forma di faccette triangolari fra ($\bar{2}21$) ($\bar{1}00$) ($\bar{1}01$) e d'ambo i lati del piano di simmetria. Vedi fig. 16061, tav. I, 16077 e 16074, tav. III, eccetto in quest'ultimo che si ha da un sol lato del piano di simmetria molto sviluppata e di aspetto fisico lucentissimo, tanto che mi permise le misure goniometriche seguenti:

| | Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|
| $\bar{3}12:\bar{2}\bar{2}1$ | = 57° 21′ 20″ | 57° 23′ 6″ | — 1′ 46″ |
| » $:\bar{2}21$ | = 29 15 — | 29 11 37 | + 3 23 |
| » $:\bar{1}11$ | = 19 46 30 | 19 43 17 | + 3 13 |
| » $:001$ | = 46 39 — | 46 48 30 | — 9 30 |

($\bar{3}32$) Questa forma è stata notata da Hessemberg ($\varrho$) nel 1863 sul Diopside della Valle di Saas ed anch'io la rinvenni come il Vom Raht nel Diopside di Val d'Ala sebbene sembra rara; difatti solo in tre cristalli essa vi esiste e precisamente in quelli segnati coi n. 65, 58, 51; nei primi due strettissima in modo da poter essere misurata solo approssimativamente, nel terzo osservasi da un sol lato del piano di simmetria e potè meglio misurarsi, essendo più estesa delle precedenti.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

| | Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|
| $\bar{3}32 : \bar{2}21 =$ | 9° 52′ — | 9° 23′ 51″ | + 28′ 9″ |
| „ : $\bar{1}11 =$ | 13 28 30 | 13 55 27 | — 26 57 |
| „ : 010 = | 52 30 — | 52 19 50 | + 10 10 |

($\bar{1}51$) Questa forma è stata osservata dal Kokscharow e notata con ($\gamma$) sulla Baikalite.

A me non fu dato trovarla che due sole volte nei cristalli di Val d'Ala, e precisamente sui n. 71 e 83 nel primo strettissima fra ($\bar{1}10$) e (041). Vedi fig. 15946, tav. II, nel secondo è una faccetta piccolissima che sta nelle zone [010 : $\bar{1}11$] e [041 : $\bar{1}10$] a mezzo delle quali fu determinata e che per verifica potei prendere approssimativamente l'angolo fra $\bar{1}51 : 010 = 18° 49$; calcolato 19° 23′ 51″; differenza — 34′ 51″.

($\bar{8}85$) Anche questa faccia osservata dal Kokscharow sulla Baikalite e segnata con ($\beta$) è stata da me trovata una sol volta e sotto forma di faccia strettissima nel cristallo n. 47.

Essa sta nella zona [$\bar{1}10 : 001$] tra ($\bar{2}21$) e ($\bar{1}11$) e le misure approssimate mi han dato:

| | Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|
| $\bar{8}85 : \bar{2}21 =$ | 7° 48′ | 7° 12′ 40″ | + 35′ 20″ |
| „ : $\bar{1}11 =$ | 15 36 | 16 06 39 | — 30′ 39″ |

($\bar{3}35$) Questa faccia è stata osservata da Hessemberg (1856) ed io pur la trovai una sol volta nel Diopside di Val d'Ala precisamente sul cristallo n. 74. Vedi fig. 16074, tav. III ove si è presentata fra (001) e ($\bar{1}11$) strettissima, ma che non pur di manco misurata ottenni:

| | Misurato | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|
| $\bar{3}35 : 001 =$ | 26° 26′ | 26° 51′ 15 | — 25′ 15″ |
| „ : $\bar{1}11 =$ | 15 29 | 15 12 21 | + 16 39 |

## V.

## Disamina delle nuove faccie.

Nella ricerca delle nuove faccie ho avuto la cura costante di non presentar che quelle della cui esistenza mi son potuto accertare per averle vedute ad occhio nudo o con l'aiuto della semplice lente e queste son le seguenti:

### *Faccie della forma* h o l *e* $\bar{\text{h}}$ o l.

(702) Questa forma la ritrovai in sette dei cristalli studiati ed essi sono i n. 64, 68, 72 73, 75, 78, 79. Essa nella zona [100 : 001] trovasi or con la faccia 501 or con questa e la (301), una sol volta la trovai con (501) e (401).

Si presentò sempre strettissima ed appena sviluppata e soventi con la (301) o (401) formava una superficie convessa per le quali ragioni le immagini da essa date non furon mai nette e precise.

Io nel mio lavoro, *Sui geminati polisintetici del Diopside di Val d'Ala*, presentai questa nuova forma e la discussi; qui ora riporto le ulteriori misure ottenute e precisamente con le adiacenti (501) e (301) impossibile essendomi stato poterla misurare con altre faccie del cristallo.

| n. | 702:501 | p. | n. | 702:301 | p. |
|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 6° 15′ — ″ | II | 73 | 2° 49′ — ″ | I |
| 78 | 5 26 — | I | 78 | 3 3 — | I |
| 75 | 5 13 — | I | | | |
| 72 | 5 7 — | I | | | |
| 64 | 6 41 — | II | | | |
| 73 | 5 11 — | I | | | |
| Media | 6 3 25 | | | 2 58 30 | |
| Calcolato | 6 2 41 | | | 2 57 40 | |
| Differenza | + 44 | | | — 50 | |

($\bar{2}01$) Questa forma trovasi riportata dal Dana fra le forme note, come trovata da Quenstedt il quale nel suo trattato (edizione 1877) la cita; però nella proiezione stereografica tal ($\bar{2}01$) corrisponde a ($\bar{3}01$) onde con tutta probabilità è a credersi che trattasi di errore di stampa nella notazione di ($\bar{2}01$) invece che ($\bar{3}01$) e non che sia errata la proiezione. Comunque sia io ho trovato questa forma nei cristalli studiati in due soli esemplari e cioè sui n. 39 e 68.

In ambo i cristalli essa è strettissima e molto allungata nel senso della zona [010 : $\bar{2}21$] giacchè sviluppatissime sono in quei cristalli ($\bar{2}21$) e ($\bar{2}\bar{2}1$).

In essi fu determinata a mezzo della suddetta zona e verificata con l'altra [421 : 111].

*Prismi della forma* h k l.

(732) Questa forma l'ho trovata studiando i geminati polisintetici del Diopside di Val d'Ala; or la ritrovai in altri cristalli semplici e precisamente sui n. 75, 79 e 82.

In essi presentasi sempre accoppiata con (421) e solo in due cristalli con (421) e (311).

È una faccia che partecipa della curvatura della (421) e come questa avendo l'aspetto, le immagini da essa date sono indecise ed incerte. Da ciò le misure riuscirono molto approssimate; e veramente sulle sole misure goniometriche avrei tralasciato di presentarla se non avessi potuto constatare l'esistenza a mezzo delle zone [110 : 311] e [010 : 702].

Le misure ottenute di cui sopra sono:

| | Misurato | | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| 732 : 311 | 4° 8′ | appr. | 5° 34′ 43″ | — 1° 26′ 43″ |
| » : 110 | 34 31 | » | 33 4 50 | + 1 26 10 |
| » : 100 | 30 34 | | 30 41 11 | — 7 11 |
| » : 010 | 70 8 | { 69 52 / 70 24 | 70 14 29 | — 6 29 |

(433) Nel n. 80 ho trovato una faccetta strettissima nella zona [311 : 111] e fra le facce 421 e 001. Vedi fig. 15947, tav. I.

Le misure che mi fu possibile ottenere sono:

| | Medie | Limiti | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| 433 : 010 | 68° 6′ 20″ | { 68° 4′ / 68 9 | 67° 42′ 09″ | + 24′ 11″ |
| » : 100 | 48 6 | — | 48 20 36 | — 14 36 |
| » : 111 | 6 16 app. | | 5 35 19 | + 40 41 |

(134) Nel cristallo segnato n. 77 e rappresentato col n. 17318, tav. II, ho osservato questa nuova forma fra (111) ($\bar{1}11$) ($\bar{1}\bar{1}2$) e (001).

In esso presentasi d'ambo i lati del piano di simmetria però non parimenti ben sviluppata nè egualmente ben riflettente le immagini.

Le zone in cui essa giace sono [$\bar{1}10$ ; 011] [111 : $\bar{1}\bar{1}2$].

Le misure ottenute con le facce adiacenti sono le seguenti:

| | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| 134 : 001 = | 23° 49′ 40″ | 23° 49′ — 23° 50 | | |
| $1\bar{3}4$ : 001 = | 23 3 40 | 23 2 — 23 5 | | |
| Media | 23 26 40 | | 23° 12′ 50″ | + 13′ 50″ |
| 134 : 111 = | 15 28 | 15 25 — 15 33 | | |
| $1\bar{3}4$ : $1\bar{1}1$ = | 16 14 | 16 13 — 16 15 | | |
| Media | 15 51 | | 15 57 23 | — 6 23 |
| 134 : $\bar{1}12$ | 22 35 20 | 22 30 — 22 39 | | |
| $1\bar{3}4$ : $\bar{1}\bar{1}2$ | 21 47 70 | 21 46 — 21 49 | | |
| Media | 22 11 30 | | 22 15 07 | — 3 37 |
| 134 : $\bar{1}11$ | 35 17 40 | 35 16 — 35 20 | | |
| $1\bar{3}4$ : $\bar{1}\bar{1}1$ | 34 47 — | 34 45 — 34 49 | | |
| | 35 2 20 | | 35 16 24 | — 14 04 |
| 134 : 010 | 67 16 40 | 67 16 — 67 18 | 67 51 15 | — 34 35 |

(136) Nel medesimo cristallo n. 77 ho trovato quest'altra nuova faccia la quale sta nelle zone [100 : 112] [001 : 134]. Essa è una faccetta strettissima allungata secondo la zona [001 : 134]. Potei misurarla con (100) e (001) ed ottenni:

| | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| 136 : 001 | 16° 29′ | 16° 12′ — 16° 47′ | 16° 8′ 17″ | + 20′ 43″ |
| » : 100 | 70 12 | — | 70 5 34 | — 6 26 |

*Prismi della forma* $\bar{h}\,k\,l$.

Le nuove facce rispondenti a tal forma in massima parte le ho trovate nelle zone [110 : $\bar{1}11$] e [110 : $\bar{1}12$].

Le prime sono per lo più facce più o meno estese, le quali in molti cristalli costituiscono tutti assieme una superficie curva con direttrice la zona stessa; solo in pochi cristalli mi fu possibile ottener delle immagini distinte e tali da poter determinare i relativi simboli.

Le seconde poi si presentano strettissime fra le precedenti e la (001) ed anche esse partecipano della convessità delle prime.

Ciò detto rispetto all'aspetto fisico generale di tal nuove forme ecco le osservazioni relative:

1° Zona [110 : $\bar{1}11$].

($\bar{3}54$) Questa forma è una delle più distinte fra le nuove trovate, la quale si è presentata misurabile in soli tre cristalli e precisamente in quelli segnati coi n. 32 40 e 74, ma che però fu osservata in ben 12 cristalli che per grossezza e per aspetto della faccia in parola non poterono essere sottoposte a misure goniometriche. Ad es. vedi fig. 15885, tav. I.

Essa presentasi sempre abbastanza sviluppata fra (111) ($\bar{2}21$) (001) e qualche volta anche fra (111) e ($\bar{1}01$). Vedi fig. 15885 suddetta; però ha caratteristico il suo aspetto fisico in quanto che solo all'estremità presenta dei lembi splendenti, mentre il resto è una superficie scabra e ruvida; è per questo che non potè misurarsi in tutti i cristalli ov'essa fu riconosciuta e che solo fu possibile nei tre succennati.

Le misure ottenute sono state le seguenti:

| | Misurato | Limite | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{3}54$ : 010 = | 53° 34′ 40″ | 53 32 — 53 38 | 53 52 11 | — 17′ 31″ |
| : 111 = | 43 4 40 | 42 58 — 43 15 | 42 43 42 | + 20 58 |
| : 100 = | 96 54 | approssimato | 96 18 12 | + 35 48 |
| : 111 = | 8 44 | » | 9 11 15 | — 27 15 |
| : 110 = | 70 11 | 70 3 — 70 15 | 69 26 23 | + 44 37 |

($\bar{4}65$) Questa forma l'ho osservata in sette cristalli e precisamente in quelli corrispondenti ai n. 46, 54, 55, 67, 74, 81, 83.

Essa in genere è abbastanza sviluppata e potè misurarsi più o meno bene nei suddetti cristalli; in alcuni dei quali però essendo combinata anche con le altre della zona finisce per presentarsi a superficie curva ed allora non riflette più alcuna imagine netta e ben distinta.

Nei cristalli n. 67, 81, 55 essa sta fra le altre; con: (111) ($\bar{2}21$) ($\bar{1}11$) (001) (021) e (041) vedi fig. 5601, 16051 e 16065, tav. III.

Nel cristallo n. 83 sta fra (111) ($\bar{2}21$) (021) e le nuove forme ($\bar{6}87$) ($\bar{2}35$) vedi fig. 16042, tav. II.

Nel n. 54 sta fra (111) ($\bar{2}21$) ($\bar{1}11$) ($\bar{1}12$) (001) (041) (152), e negli altri due più o meno fra le medesime forme.

Le misure ottenute con le adiacenti facce sono:

| | | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{4}65 : 001$ | n. 83 | 42 5 | | | |
| | 81 | 42 3 | 42 00 — 42 8 | | |
| | 54 | 41 56 | 41 54 — 41 59 | | |
| | 55 | 42 8 40 | 42 8 — 42 9 | | |
| | Media | 42 3 10 | | 42 7 6 | — 3′ 56″ |
| $\bar{4}65 : 021$ | n. 67 | 21 55 | appross. | | |
| | 83 | 22 41 | 22 39 — 22 45 | | |
| | | 22 36 40 | | 23 5 47 | — 29 7 |
| $\bar{4}65 : \bar{2}21$ | n. 81 | 24 33 20 | 24 31 — 24 35 | | |
| | 46 | 25 10 | 25 00 — 25 40 | | |
| | Media | 24 51 40 | | 24 51 38 | + 2 |
| $\bar{4}65 : 010$ | n. 83 | 55 7 | esatto | 55 5 17 | + 1 43 |

Questa forma e la precedente ($\bar{3}54$) son molto vicine fra loro e potrebbe obiettarsi che potendo ottenere misure goniometriche più perfette e maggior numero di valori angolari con le facce adiacenti, si potrebbe ottenere un sol simbolo.

Dalle mie osservazioni però risulta che più d'ogni altro queste due forme si distinguono visibilmente per l'aspetto fisico; e difatti per esso la prima mai potrebbe confondersi con la seconda; oltrechè quella si rinviene sola e caratteristica; mentre questa se apparentemente non è curva, pure fra essa e la ($\bar{1}11$) o vi esiste constatabile la ($\bar{6}87$), o vi è un incurvamento che dà immagini non misurabili e che accenna alla costituzione di essa forma.

($\bar{6}87$) Da quanto ho qui sopra fatto osservare quest'altra nuova faccia fra ($\bar{4}65$) e ($\bar{1}11$) potè misurarsi completamente in un sol cristallo e precisamente nel n. 83 rappresentato nella fig. 16042, tav. II.

Le misure goniometriche ottenute, a mezzo delle quali ne determinai il simbolo, sono le seguenti:

| | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{6}87 : 001$ | 41° 53′ | 41° 51′ — 41° 54 | 41° 59′ 42″ | — 6′ 42″ |
| » :021 | 25 43 | 25 36 — 25 51 | 25 9 44 | + 33 16 |
| » :010 | 57 13 | 57 11 — 57 15 | 56 32 14 | + 40 46 |

Però la ritrovai altra volta nel n. 80 ove potei misurare solo l'angolo fra (021) e ($\bar{6}87$) ed ottenni 25° 46′, e nel n. 74 di aspetto molto imperfetto per l'incurvamento.

($\bar{1}\bar{8}$. 20. 19) Questa forma è stata osservata in tre cristalli e cioè nei n. 74, 76 e 80. Essa è una faccetta più o meno estesa vicinissima a ($\bar{1}11$) ma pur distinguibile macroscopicamente.

Nel primo cristallo essa potè esser ben misurata ed è posta fra le facce (111) (021) ($\bar{2}21$) ($\bar{1}\bar{1}1$) ($\bar{1}12$) (001).

Nel secondo sta fra (111) ($\bar{6}87$) ($\bar{2}21$) (001) e sostituisce la ($\bar{1}11$); difatti non sta nella zona [100:111], mentre sta nell'altra [110:021]. Nel terzo è curva come tutte le facce della zona.

Le misure ottenute con le quali ne calcolai il simbolo sono le seguenti.

| | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}\bar{8}$. 20. 19:010 | 58° 54′ | 58° 50′ — 58° 59′ | 58° 56′ 27″ | — 2′ 27″ |
| » :1$\bar{1}$1 | 75 46 | 75 43 — 75 51 | 75 46 23 | + 0 23 |
| » :$\bar{2}$21 | 23. 28. 40 | 23 25 — 23 31 | 23 31 48 | — 3 08 |
| » :021 | 27 34 | appross. | 28 30 55 | — 56 55 |

2°. Zona [110:$\bar{1}$12].

($\bar{2}35$) e ($\bar{3}47$) Queste due forme le ho osservate negli stessi cristalli su citati ove si son trovate la ($\bar{4}65$) e ($\bar{6}87$). Esse son faccette strettissime fra queste e la (001) aventi il medesimo aspetto di quelle.

Non mi fu mai possibile poter prendere misure goniometriche; ho potuto solo determinare i loro simboli per mezzo delle zone e cioè la [110:$\bar{1}$12] per ambidue e poi [001:$\bar{4}$65] per la ($\bar{2}35$) e [001:$\bar{6}$87] per la ($\bar{3}47$).

($\bar{1}52$) Nel n. 76 ho osservata tal nuova faccia la quale è strettissima fra (021) ($\bar{2}21$) ($\bar{1}11$) ($\bar{1}12$) ($\bar{3}31$).

Non potei che determinarla con le zone [$\bar{1}$10:021] e [010:$\bar{1}$12].

($\bar{1}\bar{3}$. 21. 13) Nel cristallo n. 77 assieme alle altre nuove facce riscontrate e cioè alla (134), (136) ed (112) vi esiste anche quest'altra bellissima e ben sviluppata che si determina dalle zone [010:$\bar{1}$11] e [134:$\bar{3}$31] di cui fa parte. Vedi fig. 17318, tav. II.

Le misure goniometriche con le adiacenti facce sono le seguenti:

| | Misurato | Limiti | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}\bar{3}$. 21. 13:134 | 38° 6′ 20″ | 38° 1 — 38° 10′ | 37° 54′ 59″ | + 11′ 21″ |
| » :$\bar{3}$31 | 27 38 40 | 27 25 — 27 50 | 27 51 34 | — 12 54 |
| » :010 | 46 44 40 | 46 44 — 46 45 | 47 27 43 | — 43 3 |
| » :$\bar{1}$11 | 13 43 40 | 13 38 — 13 43 | 12 56 28 | + 47 12 |

Questo simbolo essendo un po' complicato potrebbe pensarsi che potesse esser sostituito da altro più semplice conveniente a facce molto vicine.

Tali simboli p. e. sarebbero ($\bar{2}32$) e ($\bar{4}74$). In tali ipotesi si avrebbero le seguenti differenze fra osservazione e calcolo.

| | Calcolato | Differenza |
|---|---|---|
| $\bar{2}32:134$ | 37° 14′ | + 52′ 20″ |
| » $:\bar{3}31$ | 28 38 59″ | — 1° 00 19 |
| » :010 | 49 34 6 | — 2 49 26 |
| » $:\bar{1}11$ | 10 50 4 | + 2 53 36 |
| $\bar{4}74:134$ | 38 45 29 | — 39 9 |
| » $:\bar{3}31$ | 27 8 48 | + 29 52 |
| » :010 | 45 10 19 | + 1 34 21 |
| » $:\bar{1}11$ | 15 13 52 | — 1 30 12 |

Da questi risultati si scorge, come le differenze sono assai superiori a quelle ottenute pel simbolo $\bar{1}\bar{3}.21.13$, il quale del resto è messo fuor di dubbio dalle due zone in cui è compreso.

## VI.

## Calcolo delle costanti.

Pel calcolo delle costanti cristallografiche mi son servito delle misure angolari che mi presentarono la massima precisione e che potei ripetere nel maggior numero di cristalli.

Di più applicai il metodo dei minimi quadrati col quale ottenni di poter migliorare sensibilmente le costanti parziali richieste da esso metodo; e difatti l'errore medio $\mu$ (1) calcolato con le quattro serie di differenze fra valori misurati e calcolati mi risultò:

| | |
|---|---|
| pel 1° calcolo | 3′ 31″ |
| » 2° | 3 35 |
| » 3° | 3 23 |
| » 4° | 3 29 |

mentre con le nuove costanti in fine ottenute e cioè

$$\beta = 74° 8' 53''$$
$$a:b:c = 1{,}0912577:1:0{,}5894907$$
$$\mu = 2' 20''.$$

Con tali nuove costanti ho riepilogato nel quadro seguente il calcolo di tutti gli angoli, notando in esso con asterisco quelli che presi per ottenere esse costanti, e finalmente mostrando tutte le differenze fra i valori degli angoli misurati e quelli calcolati.

(1) Il $\mu$ errore medio di una osservazione l'ho calcolato con la formula $\mu = \sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-\omega}}$ ove $\Sigma\varepsilon^2$ è la somma dei quadrati degli errori moltiplicati pel numero delle relative osservazioni; $n$ è il numero delle osservazioni, ed $\omega$ quello delle variabili indipendenti che nel nostro caso son tre.

| | Angoli | Misurati | Calcolati | Differenza | Misurato da Kokscharow |
|---|---|---|---|---|---|
| × | 100:510 | 11° 52′ 5″ | °51′26″ | + ′39″ | |
| × | :310 | 19 16 27 | 17 10 | — 43 | 19° 13′ 47″ |
| × | :110 | 46 23 54 | 23 26 | — 28 | 46 26 59 |
| | :130 | 72 22 40 | 23 1 | — 21 | |
| | :501 | 17 56 50 | 55 25 | + 1 25 | |
| | :702 | 23 60 15 | 58 6 | + 2 9 | |
| | :301 | 25 58 30 | 26 55 46 | — 57 16 | |
| × | :001 | 74 11 32 | 8 53 | + 2 39 | |
| | :$\bar{1}$01 | 105 34 52 | 30 53 | + 3 59 | |
| × | 010:041 | 23 50 49 | 47 27 | + 3 21 | |
| × | :021 | 41 23 46 | 24 12 | — 26 | |
| × | 111:010 | 65 44 30 | 45 54 | — 1 24 | 65 45 37 |
| × | :100 | 53 55 41 | 55 54 | — 13 | |
| × | :110 | 45 16 15 | 18 29 | — 2 14 | |
| × | :001 | 33 52 39 | 49 57 | + 2 42 | |
| | 421:010 | 66 50 40 | 34 13 | + 16 27 | |
| × | 221:010 | 55 38 46 | 40 2 | — 1 16 | |
| | :100 | 47 26 40 | 41 36 | — 14 56 | |
| × | :110 | 29 9 43 | 14 4 | — 4 21 | |
| × | :111 | 15 59 56 | 64 25 | — 4 29 | |
| × | 311:010 | 75 3 46 | 3 7 | + 39 | |
| × | 131:010 | 36 31 50 | 31 10 | + 40 | |
| | :021 | 15 50 — | 59 14 | — 9 14 | |
| | 112:111 | 14 8 — | 7 38 | + 22 | |
| | :001 | 19 41 — | 42 19 | — 1 19 | |
| | 461:111 | 34 29 — | 83 20 | — 54 20 | |
| | :010 | 38 47 — | 37 34 2 | + 72 58 | |
| | 732:010 | 70 8 — | 14 29 | — 6 29 | |
| | :100 | 30 34 — | 41 11 | — 7 11 | |
| | 433:010 | 68 6 20 | 67 42 9 | + 24 11 | |
| | :100 | 48 6 — | 20 36 | — 14 36 | |
| | :111 | 6 16 — | 5 35 19 | + 40 41 | |
| | 134:001 | 23 26 40 | 12 50 | + 13 50 | |
| | :111 | 15 51 — | 57 23 | — 6 23 | |
| | :$\bar{1}$12 | 22 11 30 | 15 7 | — 3 37 | |
| | :$\bar{1}$11 | 35 2 20 | 16 24 | — 14 4 | |
| | :010 | 67 16 40 | 51 15 | — 34 35 | |
| | 136:001 | 16 29 — | 8 17 | + 20 43 | |
| | :100 | 70 12 — | 5 34 | + 6 26 | |
| × | $\bar{2}$21:010 | 47 54 6 | 54 50 | — 44 | 47 55 50 |
| × | :$\bar{1}$00 | 61 33 48 | 30 25 | + 3 23 | |
| × | :001 | 65 19 42 | 22 55 | — 3 13 | |

| | Angoli | Misurati | Calcolati | Differenza | Misurato da Kokscharow |
|---|---|---|---|---|---|
| × | $\bar{2}21:\bar{1}10$ | 35° 31′ 12″ | °28′ 39″ | + 2′ 33″ | |
| | :$\bar{3}10$ | 47 56 20 | 48 19 | + 8 1 | 47° 49′ 57″ |
| | :221 | 70 38 40 | 47 59 | — 9 19 | |
| | :111 | 66 50 50 | 62 16 | — 12 16 | 65 8 |
| × | $\bar{3}31:\bar{1}10$ | 24 31 51 | 26 18 | + 5 33 | |
| × | :001 | 76 20 — | 25 16 | — 5 16 | |
| | :$\bar{1}00$ | 55 19 40 | 24 57 | — 5 17 | |
| | $\bar{1}11$:001 | 41 54 43 | 63 36 | — 8 53 | |
| | :$\bar{2}21$ | 23 13 20 | 19 19 | — 5 59 | |
| × | :111 | 49 22 16 | 31 3 | — 8 47 | |
| × | :$\bar{1}00$ | 76 43 10 | 33 3 | + 10 7 | |
| | :021 | 30 28 — | 31 1 | — 3 00 | |
| | $\bar{1}12$:010 | 73 30 9 | 34 38 | — 4 29 | |
| | :001 | 22 25 20 | 32 56 | — 7 36 | |
| | :111 | 38 3 — | 12 30 | — 9 30 | |
| | $\bar{3}12:\bar{2}21$ | 29 15 — | 11 37 | + 3 23 | |
| | :$\bar{1}11$ | 19 46 30 | 43 17 | + 3 13 | |
| | :001 | 46 39 — | 48 30 | — 9 30 | |
| | $\bar{3}32:\bar{2}21$ | 9 52 — | 23 51 | + 28 9 | |
| | :$\bar{1}11$ | 13 28 30 | 55 28 | — 26 58 | |
| | :010 | 52 30 — | 19 50 | + 10 10 | |
| | $\bar{1}51$:010 | 18 49 — | 19 23 51 | — 34 51 | |
| | $\bar{8}85:\bar{2}21$ | 7 48 — | 12 40 | + 35 20 | |
| | :$\bar{1}11$ | 15 36 — | 16 6 39 | — 30 39 | |
| | $\bar{3}35$:001 | 26 26 — | 51 15 | — 25 15 | |
| | :$\bar{1}11$ | 15 29 — | 12 21 | + 16 39 | |
| | $\bar{3}54$:010 | 53 34 40 | 52 11 | — 17 31 | |
| | :111 | 43 4 40 | 42 43 42 | + 20 58 | |
| | :100 | 96 54 — | 18 12 | + 35 48 | |
| | :$\bar{1}11$ | 8 44 — | 9 11 15 | — 27 15 | |
| | :110 | 70 11 — | 69 26 23 | + 44 37 | |
| | $\bar{4}65$:001 | 42 3 10 | 7 6 | — 3 56 | |
| | :021 | 22 36 40 | 65 47 | — 29 7 | |
| | :$\bar{2}21$ | 24 51 40 | 51 38 | + 2 | |
| | :010 | 55 7 — | 5 17 | + 1 43 | |
| | $\bar{6}87$:001 | 41 53 — | 59 42 | — 6 42 | |
| | :021 | 25 43 — | 9 44 | + 33 16 | |
| | :010 | 57 13 — | 56 32 14 | + 40 46 | |
| | $\bar{1}\bar{8}$.20.19:010 | 58 54 — | 56 27 | — 2 27 | |
| | :1$\bar{1}$1 | 75 46 — | 46 23 | — 23 | |
| | :$\bar{2}21$ | 23 28 40 | 31 48 | — 3 8 | |
| | :021 | 27 34 — | 28 30 55 | — 56 55 | |

| | Angoli | Misurati | Calcolati | Differenza | Misurato da Kokscharow |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\bar{1}\bar{3}.21.13:134$ | 38° 6′ 20″ | 37° 54′ 59″ | + 11′ 21″ | |
| | $:\bar{3}31$ | 27 38 40 | 51 34 | — 12 54 | |
| | :010 | 46 44 40 | 87 43 | — 43 3 | |
| | $:\bar{1}11$ | 13 43 40 | 12 56 28 | + 47 12 | |

## VII.

### Forme e combinazioni osservate.

Nel quadro che segue presento le forme e le combinazioni osservate nei cristalli misurati, tralasciando quelle degli altri cristalli che solo osservai, ma che non sono misurabili.

Da esso risulta, rispetto al grado di frequenza di ciascuna forma, che eccetto i pinakoidi (100), (010), (001); i prismi verticali (110), (310) e le forme prismatiche (111) e ($\bar{2}21$) che osservansi sempre; le altre si seguono in quest'ordine.

$\bar{3}31$ . . . . . osservata n. 74 volte
$\bar{1}01$ . . . . . „ „ 63 „
421 . . . . . „ „ 59 „
$\bar{1}11$ . . . . . „ „ 48 „
021 . . . . . „ „ 33 „
221 . . . . . „ „ 28 „
041 . . . . . „ „ 27 „
510 . . . . . „ „ 25 „
311 . . . . . „ „ 21 „
$\bar{1}12$ . . . . . „ „ 19 „
501, 131 . . . . . „ „ 17 „
152 . . . . . „ „ 11 „
702, $\bar{4}65$ . . . . . „ „ 7 „
241 . . . . . „ „ 6 „
301, $\bar{3}12$ . . . . . „ „ 4 „
920, 401, 732, $\bar{3}32$, $\bar{3}54$, $\bar{2}35$, $\bar{6}87$, $\bar{1}\bar{8}.20.19$. . . . . „ „ 3 „
011, 121, $\bar{2}01$, $\bar{1}51$ . . . . . „ „ 2 „
130, 120, 112, 461, 433, 134, 136, $\bar{8}85$, $\bar{3}35$, $\bar{3}47$, $\bar{1}52$, $\bar{1}\bar{3}.21.13$ „ „ 1 „

Rispetto alle combinazioni poi, osservate sui 90 cristalli esse sono in numero di 83 ripartite come segue per numero di forme:

| | | |
|---|---|---|
| a n. 8 forme n. 4 | a n. 13 forme n. 13 | a n. 18 forme n. 4 |
| „ „ 9 „ „ 4 | „ „ 14 „ „ 10 | „ „ 20 „ „ 1 |
| „ „ 10 „ „ 10 | „ „ 15 „ „ 5 | „ „ 24 „ „ 1 |
| „ „ 11 „ „ 13 | „ „ 16 „ „ 8 | |
| „ „ 12 „ „ 7 | „ „ 17 „ „ 3 | |

Ciò detto brevemente sul risultato ecco il quadro:

*Quadro*

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi | | | Prismi h k o | | | | | | Pinakoidi h o l | | | | | | Prismi o k l | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 010 | 001 | 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | $\bar{1}01$ | 501 | 301 | 401 | $\overset{*}{7}\bar{0}2$ | $\overset{*}{2}\bar{0}1$ | 021 | 041 | 011 | 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 1 |
| 1 | 8 | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 2 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 3 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 4 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 5 | 9 | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 6 | | × | × | × | × | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 7 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 8 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 9 | 10 | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 10 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 11 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 12 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |
| 13 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 14 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 15 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | . . | . . | . . | . |
| 16 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |
| 17 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | × | . . | . . | . |
| 18 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . |
| 19 | 11 | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 20 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 21 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |
| 22 | | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | . . | . . | . . | × | . . | . . | . |
| 23 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 24 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | × | . . | . . | . . | . |
| 25 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 26 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |
| 27 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 28 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 29 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | × | . . | . . | . . | . |
| 30 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | × | . . | . . | . |
| 31 | | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | ? | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . |
| 32 | 12 | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |
| 33 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . |
| 34 | | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | × | . . | . . | . . | . |
| 35 | | × | × | × | × | × | . . | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . |

*ominazioni osservate.*

| k l | | | | | Prismi $\bar{h}$ k l | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 32 | *433 | *134 | *136 | $\bar{2}21$ | $\bar{3}31$ | $\bar{1}11$ | $\bar{1}12$ | $\bar{3}12$ | $\bar{3}32$ | $\bar{1}51$ | $\bar{8}85$ | $\bar{3}35$ | *$\bar{3}54$ | *$\bar{4}65$ | *$\bar{6}87$ | *$\bar{1}8$ 20 19 | *$\bar{2}35$ | *$\bar{3}47$ | *$\bar{1}52$ | *$\bar{1}3$ 21 13 | | | | | |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15884) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16058) |
| | | | | | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16067) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17310) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (5590) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16054) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16071) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17290) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15882)(15922)(15924)(15925) (17296)(17301) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16039) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16043) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16063) |
| | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16064) |
| | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16077/4) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17283) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17305) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17311) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17312) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16038) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16048) |
| | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16061/2) |
| | | | | | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16061/4) |
| | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16062) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16068) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16070) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16075) |
| | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | s. n. |
| × | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17284) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17288) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17291) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17312/4) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | × | | | | | | | | | | | | (15885) (15888) |
| | | | | | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15932) |
| | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16037) |
| | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16060) |

*Quadro delle combinazioni osservate.*

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi 100 | 010 | 001 | Prismi h k o 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | Pinakoidi h o l ī01 | 501 | 301 | 401 | *702 | *201 | Prismi o k l 021 | 041 | 011 | 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 121 | Prismi h k l 461 | 732 | *433 | *134 | *136 | 221 | 331 | ī11 | ī12 | 312 | 332 | ī51 | 885 | 335 | *354 | *465 | 687 | *18 20 19 | *235 | *347 | *152 | *13 21 13 | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15884) |
| 2 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16058) |
| 3 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16067) |
| 4 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17310) |
| 5 | 9 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (5590) |
| 6 | | × | × | × | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16054) |
| 7 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16071) |
| 8 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17290) |
| 9 | 10 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15882)(15922)(15924)(15925) |
| 10 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16039) (17296)(17301) |
| 11 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16043) |
| 12 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16063) |
| 13 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16064) |
| 14 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16077/4) |
| 15 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | × | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17283) |
| 16 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17305) |
| 17 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | × | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17311) |
| 18 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | . | . | × | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17312) |
| 19 | 11 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16038) |
| 20 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16048) |
| 21 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16061/2) |
| 22 | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | × | . | . | . | . | × | . | | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16061/4) |
| 23 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16062) |
| 24 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | × | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16068) |
| 25 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16070) |
| 26 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16075) |
| 27 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | s. n. |
| 28 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17284) |
| 29 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | × | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17288) |
| 30 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | × | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17291) |
| 31 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | ? | . | . | . | . | . | × | . | . | × | . | . | . | . | × | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17312/4) |
| 32 | 12 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | (15885) (15888) |
| 33 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15932) |
| 34 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | . | . | . | | | | | | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16037) |
| 35 | | × | × | × | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | × | . | . | . | . | | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16060) |

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi | | | Prismi h k o | | | | | | Pinakoidi h o l | | | | | | Prismi o k l | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 010 | 001 | 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | $\bar{1}01$ | 501 | 301 | 401 | $70\overset{*}{2}$ | $\bar{2}0\overset{*}{1}$ | 021 | 041 | 011 | 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 12 |
| 36 | 12 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | .. | .. | .. | . |
| 37 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | .. | . |
| 38 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 39 | 13 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 40 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 41 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | . |
| 42 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | . |
| 43 | | × | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 44 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | . |
| 45 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | . |
| 46 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | . |
| 47 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | .. | .. | .. | . |
| 48 | | × | × | × | × | × | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 49 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 50 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 51 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | .. | .. | .. | . |
| 52 | 14 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | × | .. | .. | .. | × | . |
| 53 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | . |
| 54 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | . |
| 55 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | . |
| 56 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | . |
| 57 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | . |
| 58 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | × | × | .. | .. | .. | . |
| 59 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | . |
| 60 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | × | . |
| 61 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | .. | × | × | .. | . |
| 62 | 15 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | . |
| 63 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | . |
| 64 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | .. | . |
| 65 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | . |
| 66 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | × | .. | .. | .. | .. | . |
| 67 | 16 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | × | .. | .. | .. | × | . |
| 68 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | × | . |
| 69 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | × | × | × | × | .. | .. | . |
| 70 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | . |
| 71 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | × | .. | .. | .. | × | × | .. | . |
| 72 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | × | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | . |

| k l | | | | | | Prismi $\bar{h}$ k l | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 461 | 32 | *433 | 134 | *136 | | $\bar{2}21$ | $\bar{3}31$ | $\bar{1}11$ | $\bar{1}12$ | $\bar{3}12$ | $\bar{3}32$ | $\bar{1}51$ | $\bar{8}85$ | $\bar{3}35$ | *$\bar{3}54$ | *$\bar{4}65$ | *$\bar{6}87$ | *$\bar{1}8$ 20 19 | *$\bar{2}35$ | *$\bar{3}47$ | *$\bar{1}52$ | *$\bar{1}3$ 21 13 | | | | | | |
| | | | | | | × | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17292) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17294) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17307) |
| | | | | | | × | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (5598) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | × | | | | | | | | | | | | | (15916) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16053) |
| | | | | | | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16056) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16057) |
| | | | | | | × | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16073) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16077/2) (16077/3bis) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | × | | | | | | | | | | | | (16077/5) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | (17286) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17306) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17308) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17319) |
| | | | | | | × | × | × | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | s. n. |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15926) |
| | | | | | | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16045) |
| | | | | | | × | | × | × | | | | | | | × | | | × | | | | | | | | | (16052) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | × | | | | | | | | | | | | (16065) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16076) |
| | | | | | | × | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16077/1) |
| | | | | | | × | × | × | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | (17298) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17302) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17312/2) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (17312/2) |
| | | | | | | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (5596) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15929) |
| | | | | | | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16049) |
| | | | | | | × | × | × | × | | × | | | | | | | | | | | | | | | | | (16061/1) |
| | | | | | | × | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16061/3) |
| | | | | | | × | × | × | × | | | | | | | × | | | | | | | | | | | | (5601) |
| | | | | | | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15919) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15936) |
| | | | | | | × | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (15940) |
| | | | | | | × | × | × | | | | × | | | | | | | | | | | | | | | | (15946) |
| | | | | | | × | × | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | (16047) |

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi 100 | 010 | 001 | Prismi h k o 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | Pinakoidi h o l $\bar{1}01$ | 501 | 301 | 401 | $\overset{*}{7}02$ | $\overset{*}{2}01$ | Prismi o k l 021 | 041 | 011 | 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 121 | $1_{\frac{1}{13}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 12 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | . | . | . | . |
| 37 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | × | . | . | . | . |
| 38 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . |
| 39 | 13 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | × | . | . | × | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 40 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 41 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | . | . | . | × | . | . | . |
| 42 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | × | . | . | . | . | . |
| 43 | | × | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 44 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | × | . | . |
| 45 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | × | . | . |
| 46 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . |
| 47 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | . | . | . | . |
| 48 | | × | × | × | × | × | . | . | × | × | . | . | . | . | . | . | × | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 49 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 50 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . |
| 51 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | . | . | . | . |
| 52 | 14 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | × | . | . | . | × | . |
| 53 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | . | . | × | . | . | . |
| 54 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | . | × | . | . |
| 55 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | × | . | . |
| 56 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | × | × | . | . | . | . | . |
| 57 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | . | . | × | . | . |
| 58 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | × | . | × | × | . | . | . | . |
| 59 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . |
| 60 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | . | . | × | . | × | . |
| 61 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | × | × | . | . | × | × | . | . |
| 62 | 15 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | × | . | × | × | × | . | . | . | . | . |
| 63 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | × | . | . | × | × | . | × | × | . | × | . | . | . | . |
| 64 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | × | . | . | × | . | . | . | . | × | × | × | × | . | . | . | . |
| 65 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | . |
| 66 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | . | . | × | × | × | . | . | . | . | . |
| 67 | 16 | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | × | . | . | . | × | . |
| 68 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | . | × | × | . | . | . | × | × | × | × | . | . | × | . |
| 69 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | × | . | × | × | × | × | × | . | . | . |
| 70 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | . | . | . | × | × | . | × | × | . | . | × | . | . | . |
| 71 | | × | × | × | × | × | × | . | . | . | × | × | . | . | . | . | . | × | . | × | . | . | . | × | × | . | . |
| 72 | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | × | × | . | × | × | . | × | . | . | × | × | . | . | × | . | . | . |



| h k l | Prismi $\bar{h}$ k l $\overset{*}{7}32$ | $\overset{*}{4}33$ | $1\overset{*}{3}4$ | $\overset{*}{1}36$ | $\bar{2}21$ | $\bar{3}31$ | $\bar{1}11$ | $\bar{1}12$ | $\bar{3}12$ | $\bar{3}32$ | $\bar{1}51$ | $\bar{8}85$ | $\bar{3}35$ | $\overset{*}{3}54$ | $\overset{*}{4}65$ | $\overset{*}{6}87$ | $\overset{*}{18}$ 20 19 | $\overset{*}{2}35$ | $\overset{*}{3}47$ | $\overset{*}{1}52$ | $\overset{*}{13}$ 21 13 | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17292) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17294) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17307) |
| | | | | | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (5598) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | (15916) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16053) |
| | | | | | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16056) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16057) |
| | | | | | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16073) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16077/2) (16077/3bis) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | (16077/5) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17286) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17306) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17308) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17319) |
| | | | | | × | × | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | s. n. |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15926) |
| | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16045) |
| | | | | | × | . | × | × | . | . | . | . | . | . | × | . | . | × | . | . | . | (16052) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | (16065) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16076) |
| | | | | | × | . | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16077/1) |
| | | | | | × | × | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17298) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17302) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17312/3) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (17312/2) |
| | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (5596) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15929) |
| | | | | | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16049) |
| | | | | | × | × | × | × | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16061/1) |
| | | | | | × | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16061/3) |
| | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | (5601) |
| | | | | | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15919) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15936) |
| | | | | | × | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15940) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (15946) |
| | | | | | × | × | × | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | (16047) |

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi | | | Prismi h k o | | | | | | Pinakoidi h o l | | | | | | Prismi o h l | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 010 | 001 | 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | $\bar{1}01$ | 501 | 301 | 401 | $7\overset{*}{0}2$ | $\bar{2}\overset{*}{0}1$ | 021 | 041 | 011 | 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 1[illegible] | [illegible] |
| 73 | 16 | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | × | .. | × | .. | × | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | . | |
| 74 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | . | |
| 75 | 17 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | × | . | |
| 76 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | × | .. | .. | .. | . | |
| 77 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | . | |
| 78 | 18 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | × | .. | × | . | |
| 79 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | | |
| 80 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | . | |
| 81 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | × | × | .. | | |
| 82 | 20 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | × | × | .. | × | .. | × | × | × | .. | .. | | |
| 83 | 24 | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | × | .. | × | .. | .. | | |
| | | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 25 | 3 | 1 | 1 | 63 | 17 | 4 | 3 | 7 | 2 | 33 | 27 | 2 | 90 | 59 | 28 | 21 | 17 | 11 | 6 | | |

| | | | | Prismi $\bar{h}\,k\,l$ | | | | | | | | | | | | | | | | | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73* | 433* | 134* | 136* | $\bar{2}21$ | $\bar{3}31$ | $\bar{1}11$ | $\bar{1}12$ | $\bar{3}12$ | $\bar{3}32$ | $\bar{1}51$ | $\bar{8}85$ | $\bar{3}35$ | $\bar{3}54$* | $\bar{4}65$* | $\bar{6}87$* | $\bar{1}\bar{8}$ 20 19* | $\bar{2}35$* | $\bar{3}47$* | $\bar{1}52$* | $\bar{1}\bar{3}$ 21 13* | |
| . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | (16055) |
| . | . . | . . | . . | × | . . | × | . . | × | . . | . . | . . | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | (16074) |
| × | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | (15921) |
| . | . . | . . | . . | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | . . | (15939) |
| . | . . | × | × | × | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | (17318) |
| . | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | (15920) |
| × | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | (15944) |
| . | × | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | (15947) |
| . | . . | . . | . . | × | . . | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | × | . . | . . | × | . . | . . | . . | (16051) |
| × | . . | . . | . . | × | × | × | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | (15943) |
| . | . . | . . | . . | × | × | × | × | × | . . | × | . . | . . | . . | × | × | . . | × | × | . . | . . | (16042) |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 90 | 74 | 48 | 19 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | |

| N. d'ordine | N. delle forme | Pinakoidi 100 | 010 | 001 | Prismi h k o 110 | 310 | 510 | 920 | 130 | 120 | Pinakoidi h o l $\bar{1}01$ | 501 | 301 | 401 | 702* | $\bar{2}01$* | Prismi o h l 021 | 041 | 011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | 16 | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | × | .. | × | .. | × | .. | .. |
| 74 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. |
| 75 | 17 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. |
| 76 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. |
| 77 | | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. |
| 78 | 18 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. |
| 79 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. |
| 80 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. |
| 81 | | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. |
| 82 | 20 | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | × | × | .. | .. | × | × | .. |
| 83 | 24 | × | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | × | × | .. |
| | | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 25 | 3 | 1 | 1 | 63 | 17 | 4 | 3 | 7 | 2 | 33 | 27 | 2 |

| N. d'ordine | Pri[illegible]k l 111 | 421 | 221 | 311 | 131 | 152 | 241 | 121 | 11[illegible] | [illegible]61 | 732* | 433* | 134* | 136* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 74 | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 75 | × | × | × | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. |
| 76 | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 77 | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | .. | × | × |
| 78 | × | × | × | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 79 | × | × | .. | × | × | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | .. | .. |
| 80 | × | × | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. |
| 81 | × | × | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| 82 | × | .. | × | × | × | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | .. | .. |
| 83 | × | × | × | .. | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| | 90 | 59 | 28 | 21 | 17 | 11 | 6 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |

| N. d'ordine | Prismi $\bar{h}$ k l $\bar{2}21$ | $\bar{3}31$ | $\bar{1}11$ | $\bar{1}12$ | $\bar{3}12$ | $\bar{3}32$ | $\bar{1}51$ | $\bar{8}85$ | $\bar{3}35$ | $\bar{3}54$* | $\bar{4}65$* | $\bar{6}87$* | $\bar{1}\bar{8}$ 20 19* | $\bar{2}35$* | $\bar{3}47$* | $\bar{1}52$* | $\bar{1}\bar{3}$ 21 13* | N. di catalogo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | (16055) |
| 74 | × | .. | × | .. | × | .. | .. | .. | × | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | (16074) |
| 75 | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | (15921) |
| 76 | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | (15939) |
| 77 | × | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | (17318) |
| 78 | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | (15920) |
| 79 | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | (15944) |
| 80 | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | (15947) |
| 81 | × | .. | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | × | .. | .. | × | .. | .. | .. | (16051) |
| 82 | × | × | × | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | (15943) |
| 83 | × | × | × | × | × | .. | × | .. | .. | .. | × | × | .. | × | × | .. | .. | (16042) |
| | 90 | 74 | 48 | 19 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | |

## VIII.

### Conclusione.

Riepilogando si ha che le forme note nel Pirosseno di Val d'Ala erano in numero di 42 e cioè:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pinakoidi | | | | | 3 |
| Pinakoidi | della | forma | h o l | e $\bar{h}$ o l | 5 |
| Prismi | » | » | h k o | | 6 |
| » | » | » | o k l | | 3 |
| » | » | » | h k l | | 15 |
| » | » | » | $\bar{h}$ k l | | 10 |
| | | | | Totale | 42 |

delle quali non rinvenni le seguenti 12 forme:

120
$\bar{1}02$
621, 211, 411, 511, 922, 10.4.1, 138
$\bar{3}13$, $\bar{1}21$, $\bar{1}31$.

A queste aggiunsi cinque forme già note pel Diopside di altre località, ma non per Val d'Ala, e cioè:

920, 241, 461, $\bar{8}85$, $\bar{1}51$

e di più 14 forme nuove per il pirosseno in genere, le quali sono:

702, $\bar{2}01$
732, 433, 134, 136
$\bar{3}54$, $\bar{4}65$, $\bar{6}87$, $\bar{1}\bar{8}.20.19$, $\bar{2}35$, $\bar{3}47$, $\bar{1}52$, $\bar{1}\bar{3}.21.13$.

Dal che si ha che le forme ora note pel Diopside della sopradetta località sono in n. di 61, e cioè:

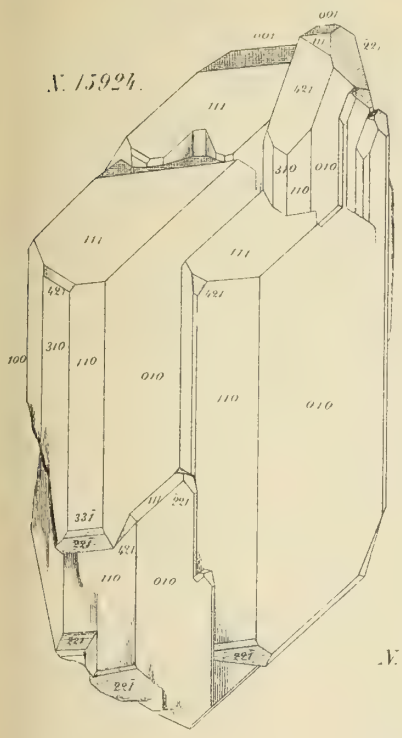
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pinakoidi | | | | | 3 |
| Pinakoidi | della | forma | h o l | e $\bar{h}$ o l | 7 |
| Prismi | » | » | h k o | | 7 |
| » | » | » | o k l | | 3 |
| » | » | » | h k l | | 21 |
| » | » | » | $\bar{h}$ k l | | 20 |
| | | | | Totale | 61 |

## NOTA

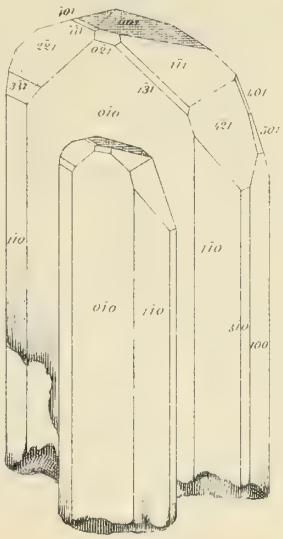
Nel mentre il presente lavoro era in corso di stampa, nella Zeitsch. für Kryst. 1886 vol. XI, pag. 449 e seg., è stata pubblicata da G. Flink una Memoria intitolata: *Studien über schwedische Pyroxenmineralien.* Da essa risulta che l'autore ha trovato le seguenti forme nuove per il Pirosseno; la più parte sul Diopside di Nordmarken, e cioè:

| Lettera | Simboli di Miller | Simboli di Naumann | Simboli di Weiss | Simboli di Lévy |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 150 | $\infty$ P 5 | 5 a : b : $\infty$ c | $g^{\frac{3}{2}}$ |
| *L* | 170 | $\infty$ P 7 | 7 a : b : $\infty$ c | $g^{\frac{4}{3}}$ |
| *X* | 015 | $\frac{1}{5}$ P $\infty$ | $\infty$ a : b : $\frac{1}{5}$ c | $e^{5}$ |
| *F* | 201 | — 2 P $\infty$ | a : $\infty$ b : 2 c | $o^{\frac{1}{2}}$ |
| *H* | $\bar{4}03$ | $\frac{4}{3}$ P $\infty$ | a′ : $\infty$ b : $\frac{3}{4}$ c | $a^{\frac{3}{4}}$ |
| *S* | 119 | $-\frac{1}{9}$ P | a : b : $\frac{1}{9}$ c | $d^{\frac{9}{2}}$ |

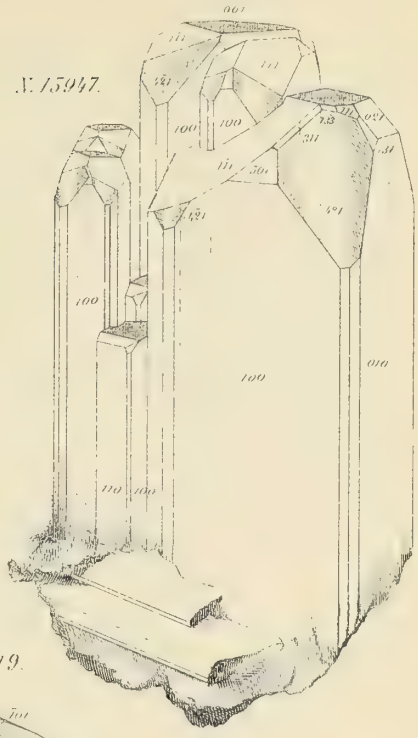
N. 15924.



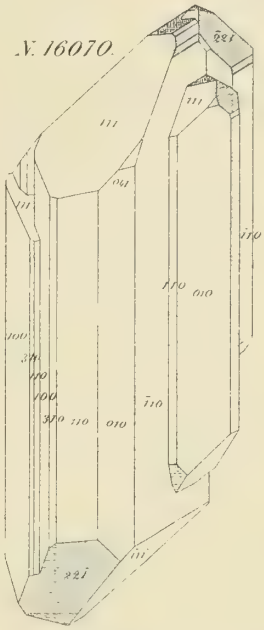
N. 16047.



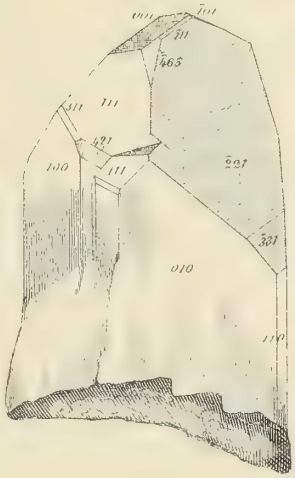
N. 15947.



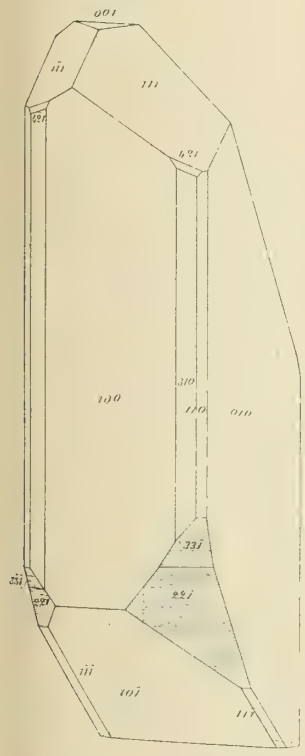
N. 16070.



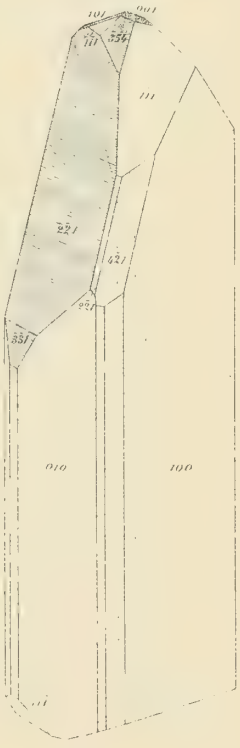
N. 18219.



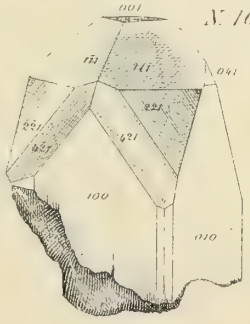
N. 15922.



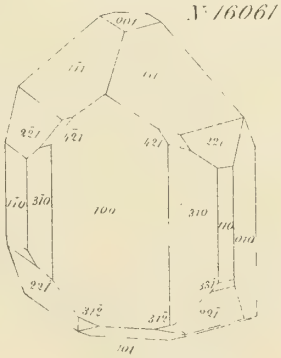
N. 15885.



N. 16056.



N. 16061.



N. 16045.

N. 16043

N. 15919.

N. 16042.

N. 15921.

N. 15920.

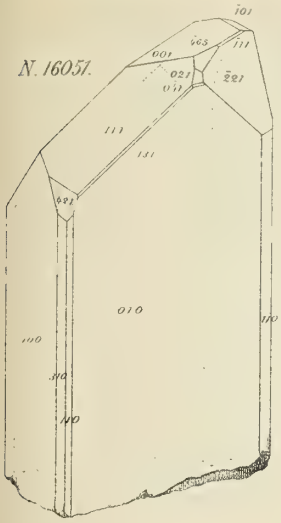
N. 15936.

N. 15946.

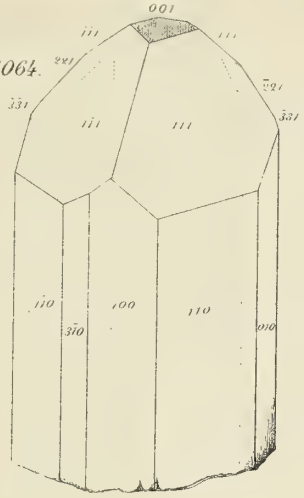
N. 17318.

Lit. Bruno e Salomone, Roma

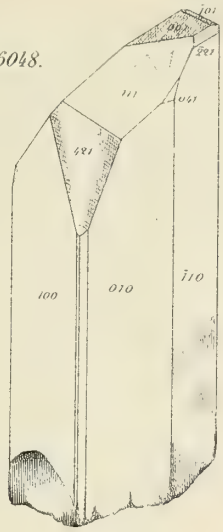
N. 16051.



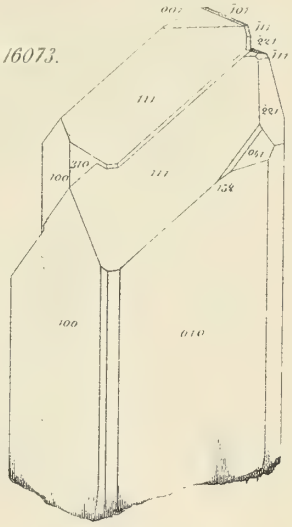
N. 16064.



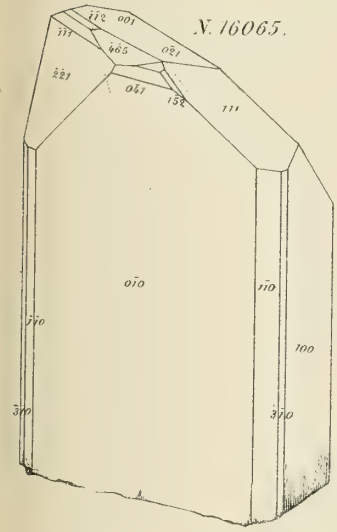
N. 16048.



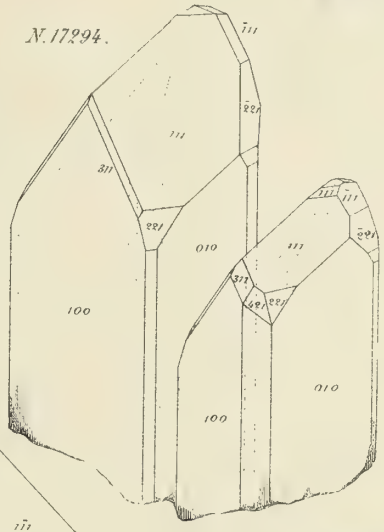
N. 16073.



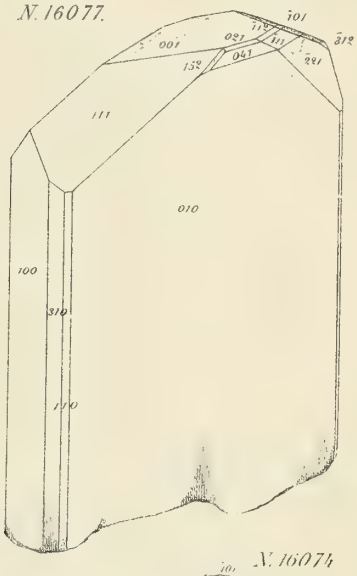
N. 16065.



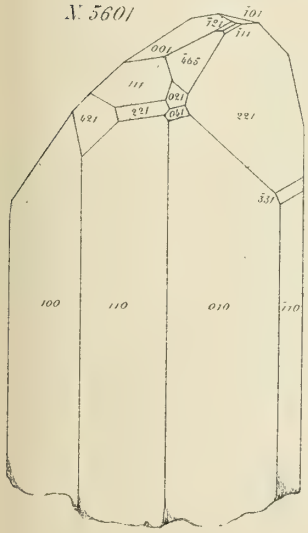
N. 17294.



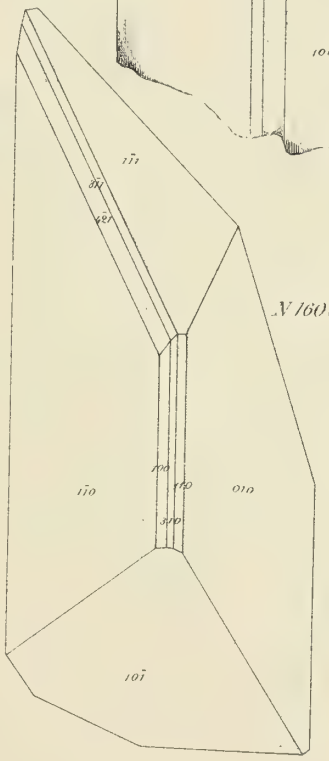
N. 16077.



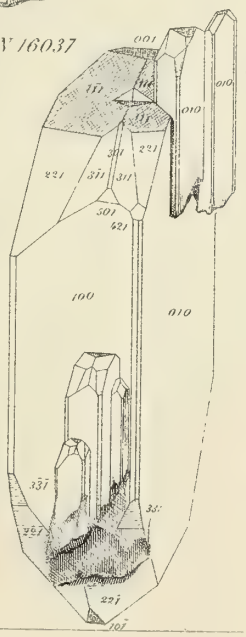
N. 5601



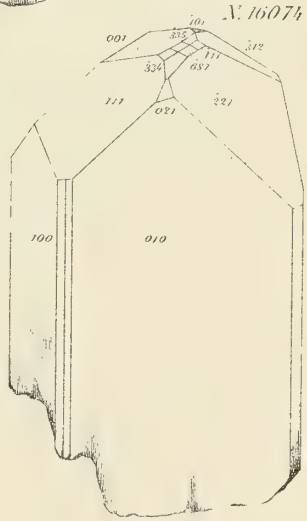
N. 16068.



N. 16037

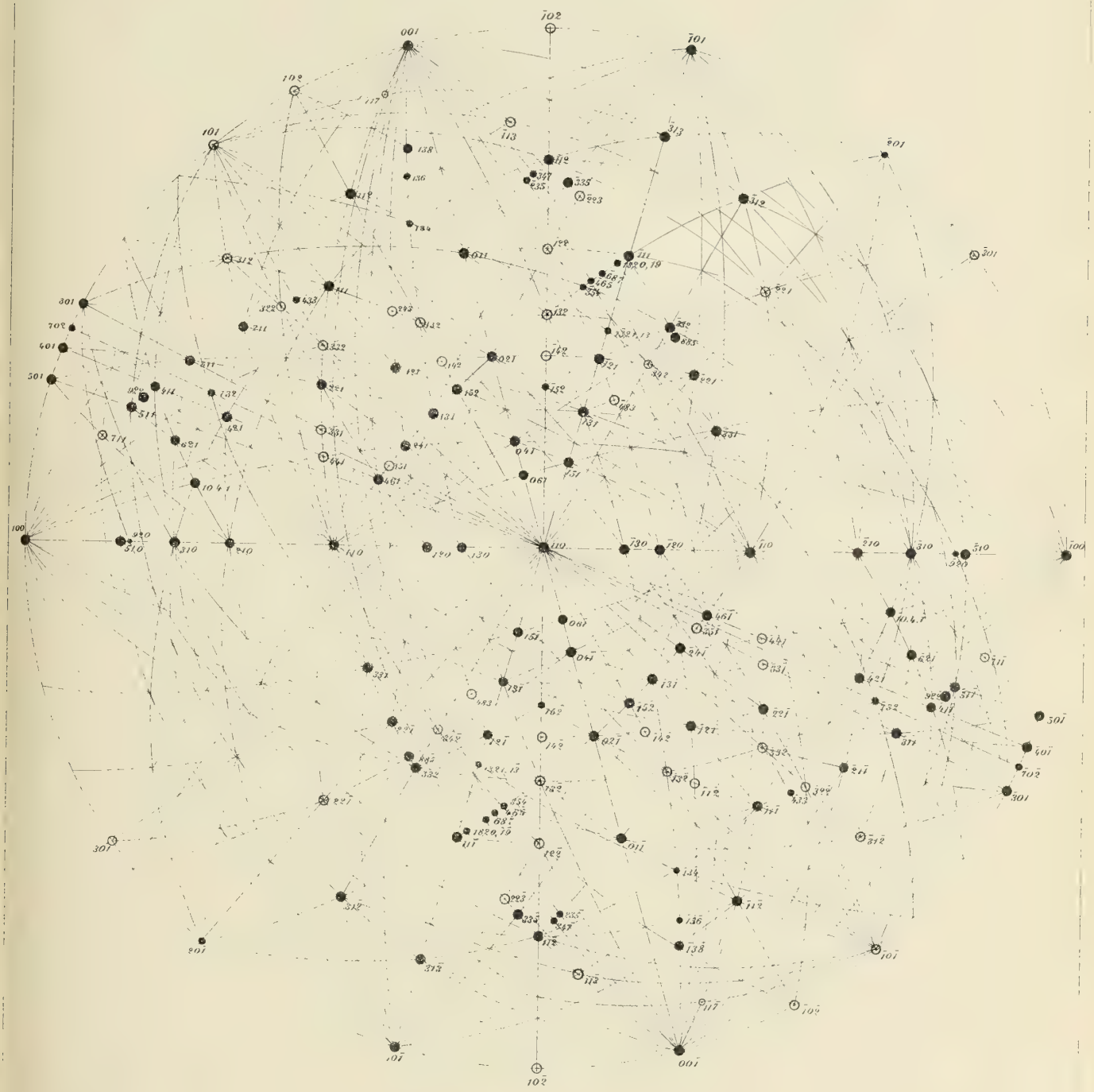


N. 16074



G. La Valle, dis.

Lit. Bruno e Sc[illegible]



# Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari.

Memoria del Socio RICCARDO DE PAOLIS

*letta nella seduta del 20 giugno 1886.*

## 1. Un cenno sulle curve armoniche e sulla teoria generale delle curve polari.

1. Indicheremo sempre con $C_n$, $\Gamma_n$ due curve di ordine $n$ o di classe $n$, e con:

$$a_x^n = 0 \quad , \quad u_\alpha^n = 0$$

le loro equazioni.

L'espressione $a_\alpha^n$ è l'*armonizzante* di $C_n$, $\Gamma_n$, invariante simultaneo delle forme $a_x^n$, $u_\alpha^n$ e lineare nei coefficienti di ciascuna. Le curve $C_n$, $\Gamma_n$ si dicono *armoniche* quando è:

$$a_\alpha^n = 0 .$$

2. Se $a_x = 0$ è una tangente di $u_\alpha^n = 0$, o $u_\alpha = 0$ è un punto di $a_x^n = 0$, dobbiamo avere $a_\alpha^n = 0$; ma $a_\alpha^n$ è l'armonizzante di $u_\alpha^n$ e della potenza $n^a$ di $a_x$, o di $a_x^n$ e della potenza $n^a$ di $u_\alpha$, dunque:

I. Una curva di classe $n$ è armonica rispetto ad una retta contata $n$ volte quando la retta è una tangente della curva, e viceversa.

II. Una curva di ordine $n$ è armonica rispetto ad un punto contato $n$ volte quando il punto appartiene alla curva, e viceversa.

Se poniamo $n = 1$ troviamo che un punto è armonico rispetto ad una retta quando la retta passa per il punto, e viceversa.

3. I. Se una curva di classe $n$, o di ordine $n$, è armonica rispetto ad $r+1$ curve di ordine $n$, o di classe $n$, è armonica rispetto a tutte quelle del sistema lineare $\infty^r$ che esse individuano.

Ponendo:

$$N\,(n) = \frac{n\,(n+3)}{2},$$

possiamo dire che:

II. Ogni sistema lineare $\infty^r$, di curve di ordine $n$ o di classe $n$, ne individua un altro $\infty^{N(n)-r-1}$, di curve di classe $n$ o di ordine $n$, in modo che tutte le curve di ciascun sistema sono armoniche rispetto a tutte quelle dell'altro.

Diremo *associati* due sistemi lineari che godono di questa proprietà.

III. Un sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$, di curve di ordine $n$ o di classe $n$, è associato ad una sola curva, di classe $n$ o di ordine $n$, armonica

rispetto a tutte quelle del sistema, e che è l'inviluppo delle rette contate $n$ volte, o il luogo dei punti contati $n$ volte, che appartengono al sistema.

Ne segue che:

IV. Due curve, una di ordine $n$ e l'altra di classe $n$, sono armoniche quando la prima appartiene al sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$ individuato da un gruppo generale di $N(n)$ tangenti della seconda, ciascuna contata $n$ volte, e quindi la seconda appartiene al sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$ individuato da un gruppo generale di $N(n)$ punti della prima, ciascuno contato $n$ volte, o viceversa.

Si potrebbe scegliere la proprietà enunciata in questo ultimo teorema per definire geometricamente le curve armoniche (1).

4. Se $m<n$, tutte le curve $\Gamma_{n-m}$ che insieme ad una stessa $\Gamma_m$ sono armoniche rispetto ad una data $C_n$, costituiscono un sistema lineare $\infty^{N(n-m)-1}$ associato ad una curva $P_{n-m}$ (3, III), che chiameremo polare di $\Gamma_m$ rispetto a $C_n$.

Essendo:

$$u_\alpha{}^m = 0 \quad , \quad a_x{}^n = 0 ,$$

le equazioni di $\Gamma_m$, $C_n$, l'equazione di $P_{n-m}$ è:

$$a_\alpha{}^m a_x{}^{n-m} = 0 .$$

Analogamente, rispetto ad una curva di classe $n$, ogni curva di ordine $m<n$ individua una polare di classe $n-m$.

Se $im$ è il massimo multiplo di $m$ minore di $n$, essendo $i$ intero e positivo, possiamo contare la $\Gamma_m$ successivamente 1, 2, 3, ..., $i$ volte, allora abbiamo $i$ curve *polari successive* che indicheremo con:

$$P_{n-m} \ , \ P_{n-2m} \ , \ \dots \ , \ P_{n-im} ,$$

(1) Battaglini, in alcune Memorie (*Sulle forme binarie di terzo grado; Sulle forme binarie cubiche; Sulle forme binarie di quarto grado; Sulle forme binarie biquadratiche; Sulle forme binarie biquadratiche in involuzione*, R. Accademia di Napoli), pubblicate fino dal 1864, considera l'*armonizzante* di due forme binarie cubiche o biquadratiche, ed i sistemi lineari *associati* che con queste forme si possono costruire. Più tardi, nel 1867, in un'altra Memoria (*Sulle forme binarie di grado qualunque*, R. Accademia di Napoli) definisce l'*armonizzante* di due forme binarie di grado qualunque, la *involuzione* $(r-1)$-*pla di grado* n, o *forma sizigetica*, cioè il sistema lineare $\infty^{r-1}$ di forme binarie di grado $n$ ed i sistemi lineari *associati*. Ne trova poi le principali proprietà e ne fa una applicazione alla espressione delle forme binarie con una somma di potenze di forme binarie lineari. Questi ed altri importanti risultati sono stati estesi, dallo stesso Battaglini, alle forme ternarie (*Sulle forme ternarie di grado qualunque*. R. Accademia di Napoli) nel 1868.

Ordinariamente si attribuisce a Rosanes il merito di avere introdotto ed utilizzato, nelle quistioni geometriche, il concetto di forme armoniche; però le citate ricerche di Battaglini, che meriterebbero di essere maggiormente conosciute dai Geometri, sono anteriori a quelle di Rosanes, il quale, solamente nel 1872, in una piccola nota alla sua Memoria: *Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen* (G. di Crelle, vol. 75) parla dell'armonizzante di due forme binarie, senza distinguerlo con un nome speciale, considerandolo come un invariante simultaneo il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè ciascuna delle due forme binarie possa esprimersi con una somma di potenze dei fattori lineari dell'altra. In una Memoria posteriore: *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen* (G. di Crelle, vol. 76), pubblicata nel 1873, Rosanes considera le forme armoniche con $p$ variabili, chiamandole *coniugate*, e deduce i principali teoremi relativi ai loro sistemi lineari, teoremi che costituiscono una generalizzazione di quelli di Battaglini, relativi alle forme ternarie.

essendo rispettivamente:

$$n-m\ ,\ n-2m\ ,\ \ldots\ ,\ n-im$$

i loro ordini.

Se $m=1$ abbiamo $i=n-1$ e troviamo le $n-1$ *polari successive ordinarie* di un punto rispetto alla data curva di ordine $n$. Possiamo anche supporre che la $\Gamma_m$ si spezzi in più punti, ciascuno contato un certo numero di volte, allora nascono le ordinarie *polari miste* del gruppo di punti.

5. Applicando convenientemente le proprietà enunciate è facile dedurre che:

I. La polare di $\Gamma_m$ rispetto a $C_n$ è il luogo dei punti che contati $n-m$ volte insieme a $\Gamma_m$ dànno una linea di classe $n$ armonica rispetto a $C_n$ (3, III).

II. La polare di $\Gamma_m$ rispetto a $C_n$ è il luogo dei punti le cui polari di ordine $m$ sono armoniche rispetto a $\Gamma_m$.

III. Se due curve $\Gamma_m, \Gamma_n$, insieme prese, sono armoniche rispetto ad una $C_{m+n}$, ciascuna è armonica rispetto alla polare dell'altra.

IV. Le polari di tutte le curve di uno stesso sistema lineare $\infty^r$, contate una sola volta, prese rispetto ad una stessa curva, formano pure un sistema lineare $\infty^r$ proiettivo al primo.

V. Le polari di una stessa curva, contata una o più volte, prese rispetto a tutte quelle di un sistema lineare $\infty^r$, formano pure un sistema lineare $\infty^r$ ad esso proiettivo (1).

6. La curva $\Gamma_m$ si dice *apolare* rispetto alla $C_n$, quando la sua polare $P_{n-m}$ è indeterminata, cioè quando è identicamente nulla l'espressione: $a_\alpha{}^m a_x{}^{n-m}$. Se la $\Gamma_m$ è apolare i coefficienti di $u_\alpha{}^m$ devono soddisfare $N(n-m)+1$ equazioni lineari omogenee, ed affinchè ciò sia possibile, per una $C_n$ generale, deve essere:

$$N(m) \geqq N(n-m)+1\ ,$$

ovvero:

$$2m(n+3) \geqq (n+1)(n+2).$$

I. Se: $2m(n+3) \geqq (n+1)(n+2)$, esiste un sistema lineare $\infty^{N(m)-N(m-n)-1}$ di curve $\Gamma_m$ apolari rispetto a $C_n$.

Se è indeterminata la polare di ordine $n-m$ di un dato punto, presa rispetto a $C_n$, il punto è multiplo secondo $n-m+1$ per la $C_n$, dunque:

II. Un punto contato $m$ volte è apolare rispetto ad una data curva di ordine $n$, se per essa è multiplo secondo $n-m+1$, e viceversa.

7. Dalla definizione stessa di curva apolare si ha subito che:

I. La $\Gamma_m$ è apolare rispetto a $C_n$ se insieme ad una qualunque $\Gamma_{n-m}$ è armonica rispetto ad essa, e viceversa.

(1) La teoria delle polari, così generalizzata, è dovuta a Clifford (*On a generalization of the theory of polars*, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. II, 1868, ovvero : Mathematical Papers, London, Macmillan and Co. 1882) ed a Reye (*Trägheits und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen*, Crelle, vol. 72, 1870. *Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen*, Crelle, vol. 78, 1874).

È poi facile dimostrare che:

II. Rispetto ad una data curva è apolare ogni curva che contiene come parte una curva apolare.

III. Se $r+1$ curve di $\Gamma_m$, della stessa classe, contate una sola volta sono apolari rispetto ad una stessa curva $C_n$, rispetto ad essa sono pure apolari tutte le curve del sistema lineare $\infty^r$ che individuano.

IV. Se una curva $\Gamma_m$ è apolare rispetto ad $r+1$ curve $C_n$, dello stesso ordine, è apolare rispetto a tutte quelle del sistema lineare $\infty^r$ che individuano (1).

8. Se un gruppo di $n$ punti è armonico rispetto a $C_n$, ciascuno di essi, contato una sola volta, insieme ai rimanenti $n-1$ forma una $\Gamma_n$ armonica rispetto a $C_n$, dunque (5, I):

I. Se un gruppo di $n$ punti è armonico rispetto ad una curva di ordine $n$, la retta polare di $n-1$ qualunque passa per il rimanente (2).

Per una data $C_n$ esistono gruppi di $n+1$ punti $n$ qualunque dei quali costituiscono un gruppo armonico rispetto a $C_n$. Questi gruppi di $n+1$ punti li diremo *coniugati* rispetto a $C_n$.

II. Dato un gruppo di $n+1$ punti coniugati rispetto ad una curva di ordine $n$, la retta polare di $n-1$ qualunque passa per i due rimanenti (3).

9. Un gruppo di $n-1$ punti è apolare rispetto ad una $C_n$ quando è indeterminata la loro retta polare, essa è la retta polare di $i$ qualunque punti del gruppo rispetto alla polare di ordine $i+1$ dei rimanenti $n-i-1$, dunque:

I. Dato un gruppo apolare di $n-1$ punti, $i$ qualunque tra essi costituiscono un gruppo apolare rispetto alla polare di ordine $i+1$ dei rimanenti.

Supposto $i=n-2$ o $i=1$, abbiamo che:

II. Dato un gruppo apolare di $n-1$ punti, $n-2$ qualunque tra essi costituiscono un gruppo apolare rispetto alla prima polare del punto rimanente, e la loro conica polare si spezza in due rette che passano per il punto rimanente (6, II).

(1) Le curve *apolari* sono state studiate da Reye nell'ultima Memoria che ho citato e nell'altra: *Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind* (Crelle, vol. 79, 1875). Su questo e sopra argomenti affini si possono consultare anche le seguenti Memorie dello stesso autore: *Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen; Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades; Ueber die reciproke Verwandtschafte von* $F^2$ *Systemen und* $\Phi^2$ *Geweben, und die quadratische* $F^2$ *Systeme achter Stufe* (Crelle, vol. 82, 1877); *Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme* (Crelle, vol. 77, 1873).

(2) Questi gruppi di $n$ punti sono stati considerati da Battaglini (*Sulle forme ternarie di grado qualunque*, R. Accademia di Napoli, 1868), da Rosanes (*Ueber linear abhängige Punktsysteme*, Crelle, vol. 87, 1879), e da Caporali (*Teoremi sulle curve di terzo ordine*; *Teoremi sui fasci di curve del terzo ordine*. R. Accademia dei Lincei, serie 3ª, vol. I, 1877).

(3) Questi gruppi di $n+1$ punti sono stati considerati da Reye (*Trägheits und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen*, Crelle, vol. 72, 1870). Alcune proprietà dei gruppi di quattro punti coniugati rispetto ad una curva di terzo ordine sono state enunciate da Caporali (l. c.).

Se si tratta di un gruppo apolare di $n-1$ punti, dei quali $n-2$ coincidono in $M_1$ mentre il rimanente $M_2$ sia distinto da $M_1$, abbiamo che la conica polare di $M_1$ deve avere un punto doppio in $M_2$ e la prima polare di $M_2$ deve avere un punto doppio in $M_1$, perchè $M_1$ contato $n-2$ volte deve essere apolare rispetto ad essa. I punti $M_1$, $M_2$ sono punti corrispondenti sulla essiana e sulla steineriana di $C_n$.

III. È apolare rispetto ad una curva di ordine $n$ ogni punto della sua essiana, contato $n-2$ volte, insieme al corrispondente punto della sua steineriana, e viceversa.

IV. Presi ad arbitrio $n-3$ punti di un gruppo apolare, di $n-1$ punti, gli altri due descrivono una cubica che è la essiana della cubica polare degli $n-3$ punti presi (9, I, III).

## 2. Espressione della equazione di una curva in funzione lineare delle equazioni di altre curve.

10. Affinchè l'equazione di una curva $C_n$ sia una funzione lineare delle equazioni di $r$ curve $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$, essendo $n \leqq N(n)$, è necessario e sufficiente che tutte le curve $\Gamma_n$ armoniche rispetto alle $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$ siano armoniche rispetto a $C_n$.

Supponiamo che tra le $r$ curve $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$ ve ne siano $\varrho \leqq r$ linearmente indipendenti, supponiamo cioè che le dette curve individuino un sistema lineare S $\infty^{\varrho-1}$; allora tutte le curve $\Gamma_n$ armoniche rispetto ad esse costituiscono il sistema lineare associato $\Sigma$, che è $\infty^{N(n)-\varrho}$ (3, II).

Se l'equazione della $C_n$ si può scrivere nel detto modo, la $C_n$ è una curva del sistema S, quindi tutte le $\Gamma_n$ di $\Sigma$ sono armoniche rispetto a $C_n$. Resta così dimostrato che la condizione enunciata nel teorema è necessaria.

Supposto poi che la $C_n$ sia armonica rispetto a tutte le $\Gamma_n$ del sistema $\Sigma$ naturalmente la $C_n$ deve appartenere al sistema lineare associato S, quindi la sua equazione deve potersi scrivere sotto la detta forma. Resta così dimostrato che la condizione enunciata nel teorema è pure sufficiente.

11. Il teorema precedente è vero qualunque siano le curve $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$, anche se sono costituite da una o più parti contate una o più volte. Consideriamo particolarmente il caso in cui siano $r$ rette, ciascuna contata $n$ volte. Allora siccome una retta contata $n$ volte è armonica rispetto ad una curva, di classe $n$, se la tocca, e viceversa (2, I), possiamo dire:

I. Affinchè l'equazione di una curva $C_n$ si possa esprimere con una somma di potenze $n^e$ delle equazioni di $r$ rette, essendo $r \leqq N(n)$, è necessario e sufficiente che tutte le curve $\Gamma_n$ tangenti alle $r$ rette siano armoniche rispetto a $C_n$.

Un *r-latero* è la figura costituita da $r$ rette comunque prese, i suoi *vertici* sono i punti comuni alle sue rette. Una curva è *inscritta* in un $r$-latero, che allora è *circoscritto* alla curva, quando essa tocca tutte le rette dell'$r$-latero. Una curva è *circoscritta* ad un $r$-latero, che allora è *inscritto* alla curva, quando essa passa per tutti i vertici dell'$r$-latero. Diremo che un $r$-latero è *armonico* rispetto ad una data

curva, di ordine $n$, quando sono armoniche rispetto ad essa tutte le curve inscritte, di classe $n$. Posto ciò il teorema precedente si può enunciare come segue:

II. Affinchè l'equazione di una curva di ordine $n$ si possa esprimere con una somma di potenze $n^e$ delle equazioni di $r$ rette, essendo $r \leqq N(n)$, è necessario e sufficiente che l'$r$-latero, da esse costituito, sia armonico rispetto alla curva.

Se una curva $\Gamma_m$, di classe $m < n$, è inscritta in un $r$-latero armonico rispetto a $C_n$, insieme ad una qualunque $\Gamma_{m-n}$ deve essere armonica rispetto a $C_n$, quindi $\Gamma_m$ deve essere apolare rispetto a $C_n$.

III. Rispetto ad una curva $C_n$ è apolare ogni curva $\Gamma_m$, di classe $m < n$, inscritta in un $r$-latero armonico.

12. Prendiamo un $r$-latero ed un $s$-latero armonici rispetto ad una stessa $C_n$, essendo naturalmente $r \leqq N(n)$, $s \leqq N(n)$; se è $m \leqq n$ ed $r \leqq N(m)$, $s \leqq N(m)$, vi sono $\infty^{N(m)-r}$, $\infty^{N(m)-s}$ curve $\Gamma_m$ rispettivamente inscritte nell'$r$-latero o nell'$s$-latero ed apolari o armoniche rispetto a $C_n$, secondo che è $m < n$ o $m = n$. Ora tutte le $\Gamma_m$ apolari o armoniche rispetto a $C_n$ costituiscono un sistema lineare $\infty^{N(m)-N(n-m)-1}$ (6, I), se: $r + s \leqq N(m) + N(n-m) + 1$ due sistemi lineari $\infty^{N(m)-r}$, $\infty^{N(m)-s}$ immersi in esso hanno comune un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(r+s)}$, dunque:

I. Presi un $r$-latero ed un $s$-latero armonici rispetto ad una stessa $C_n$, se $m \leqq n$, $r \leqq N(m)$, $s \leqq N(m)$ e $r + s \leqq N(m) + N(n-m) + 1$, vi è un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(r+s)}$ di curve $\Gamma_m$ contemporaneamente inscritte nell'$r$-latero e nell'$s$-latero.

Se: $r + s = N(m) + N(n-m) + 1$ una sola curva $\Gamma_m$ è contemporaneamente inscritta nell'$r$-latero e nell'$s$-latero.

Se: $m = n$ vi è un sistema lineare $\infty^{N(n)+1-(r+s)}$ di $\Gamma_n$ inscritte nell'$r$-latero e nell'$s$-latero, che sono armoniche rispetto a $C_n$.

II. Un $r$-latero ed un $s$-latero sono armonici rispetto ad una stessa curva di ordine $n$, se è $r \leqq N(n)$, $s \leqq N(n)$ e se vi è un sistema lineare $\infty^{N(n)+1-(r+s)}$ di curve di classe $n$ contemporaneamente inscritte nell'$r$-latero e e nell'$s$-latero.

Infatti tutte le $\Gamma_n$ inscritte nell'$r$-latero e tutte quelle inscritte nell'$s$-latero costituiscono due sistemi lineari $\infty^{N(n)-r}$, $\infty^{N(n)-s}$, i quali hanno comune un sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$, da essi individuato. Tutte le $\Gamma_n$ di questo sistema sono armoniche rispetto ad una stessa $C_n$ associata, e perciò rispetto ad essa sono armonici l'$r$-latero e l'$s$-latero.

13. Vi è una sola $\Gamma_n$ inscritta in un $r$-latero, se $r = N(n)$; affinchè esso sia armonico rispetto ad una data curva $C_n$ è necessario e sufficiente che $\Gamma_n$ sia armonica rispetto a $C_n$.

I. Gli $N(n)$-lateri armonici rispetto ad una data curva di ordine $n$ sono $\infty^{2N(n)-1}$. Una sola curva di classe $n$, armonica rispetto a quella data, tocca $N(n) - 1$ rette prese ad arbitrio, un'altra qualunque delle sue tangenti, insieme ad esse, dà uno degli $N(n)$-lateri armonici.

In un $r$-latero sono inscritte tutte le $\Gamma_n$ di un fascio, se $r = N(n) - 1$; affinchè l'$r$-latero sia armonico rispetto ad una data $C_n$ è necessario e sufficiente che tutte le $\Gamma_n$ del fascio siano armoniche rispetto a $C_n$. Ora tutte le $\Gamma_n$ armoniche rispetto a $C_n$ formano un sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$, quindi tra queste $\Gamma_n$ tutte quelle di un fascio toccano $N(n) - 2$ rette prese ad arbitrio, e tutte le $\Gamma_n$ di questo fascio sono tangenti ad altre $n^2 - N(n) + 2 = N(n-3) + 2$ rette, ciascuna delle quali evidentemente insieme alle $N(n) - 2$ prese dà un $\{N(n) - 1\}$-latero armonico rispetto a $C_n$.

II. Gli $\{N(n) - 1\}$-lateri armonici rispetto ad una data curva, di ordine $n$, sono $\infty^{2N(n)-4}$. Vi è un fascio di curve di classe $n$, armoniche rispetto alla curva data, che toccano $N(n) - 2$ rette prese ad arbitrio, tutte le curve del fascio toccano altre $N(n-3) + 2$ rette fisse, ciascuna, insieme a quelle prese ad arbitrio, dà un $\{N(n) - 1\}$-latero armonico.

Vi è una rete di curve $\Gamma_n$ inscritte in un $r$-latero, se $r = N(n) - 2$; affinchè esso sia armonico rispetto ad una data $C_n$ è necessario e sufficiente che tutte le $\Gamma_n$ della rete siano armoniche rispetto a $C_n$. Ora tutte le $\Gamma_n$ armoniche rispetto a $C_n$ formano un sistema lineare $\infty^{N(n)-1}$, quindi tra queste $\Gamma_n$ tutte quelle di un sistema lineare $\infty^3$ toccano $N(n) - 4$ rette prese ad arbitrio, altre 2 rette qualunque sono toccate da $\infty^1$ curve $\Gamma_n$ del sistema $\infty^3$, però vi sono infinite coppie di rette le quali invece sono tangenti a tutte le $\Gamma_n$ di una rete appartenente al sistema $\infty^3$, queste rette inviluppano una curva di classe $n\,N(n-3) + 3$ che tocca $N(n-3) + 1$ volte ciascuna delle $N(n) - 4$ rette prese, e ciascuna coppia, insieme ad esse, dà un $\{N(n) - 2\}$-latero armonico rispetto a $C_n$. Il luogo dei punti comuni alle dette coppie di rette è dell'ordine: $\frac{(n-2)(n^2 - 5n + 8)}{2}$ (1).

III. Gli $\{N(n) - 2\}$-lateri armonici rispetto ad una data curva, di ordine $n$, sono $\infty^{2N(n)-7}$. Si possono prendere ad arbitrio $N(n) - 4$ rette di uno, le rimanenti due inviluppano una curva di classe $n\,N(n-3) + 3$, che tocca $N(n-3) + 1$ volte ciascuna delle rette prese arbitrariamente (2).

Le rette che in tutti i modi possibili congiungono due a due $n + 1$ punti di un gruppo coniugato rispetto a $C_n$ costituiscono un $\frac{n(n+1)}{2}$-latero al quale sono

(1) Il problema « Dato un sistema lineare $\infty^3$, di curve di ordine $n$, determinare il luogo delle « coppie di punti per i quali passa una rete di curve del sistema » è stato risoluto da Clebsch (*Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*, M. Annalen Bd. 1, 1869); e poi anche da Caporali (*Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, Collectanea mathematica, in memoriam Dominici Chelini, Hoepli, Milano 1881), il quale ha pure trovato l'inviluppo delle rette determinate delle suddette coppie di punti.

(2) Sarebbe risoluto in generale il problema: « Trovare gli $r$-lateri armonici rispetto ad una « data curva di ordine $n$, essendo $r \gtreqless N(n)$ » qualora fosse risoluto l'altro: « Dato un sistema « lineare $\infty^{N(n)-1}$, di curve di classe $n$, trovare gli $r$-lateri, essendo $r \gtreqless N(n)$, nei quali sono « inscritte $\infty^{N(n)-r}$ curve del sistema ».

inscritte $\infty^n$ curve $\Gamma_n$. Fra queste ve ne sono $n+1$ che si spezzano ciascuna in $n$ punti del gruppo coniugato di $n+1$ punti, queste $n+1$ $\Gamma_n$ sono armoniche rispetto a $C_n$, perciò rispetto ad essa sono armoniche tutte le $\infty^n$ inscritte e l'$\frac{n(n+1)}{2}$-latero è armonico rispetto a $C_n$.

IV. Rispetto ad una data curva di ordine $n$ è armonico ogni $\frac{n(n+1)}{2}$-latero costituito dalle rette che, in tutti i modi possibili, congiungono due a due gli $n+1$ punti di un gruppo coniugato rispetto alla data curva (1).

### 3. Applicazione alle curve di 2° ordine e di 2ª classe.

14. *Pentalateri armonici.*

I. Vi sono $\infty^9$ pentalateri armonici rispetto ad una data conica. Una sola conica, armonica rispetto a quella data, tocca 4 rette prese ad arbitrio, un'altra qualunque delle sue tangenti, insieme ad esse, dà uno dei pentalateri armonici (13, I).

*Quadrilateri armonici.*

II. Vi sono $\infty^6$ quadrilateri armonici rispetto ad una data conica. Vi è un fascio di coniche, armoniche rispetto a quella data, che toccano 3 rette prese ad arbitrio, tutte le coniche del fascio sono tangenti ad un'altra retta fissa che, insieme alle prime tre, dà uno dei quadrilateri armonici (13, II).

Una coppia di vertici opposti di un quadrilatero armonico costituisce una linea inscritta di 2ª classe, le tre coppie di vertici opposti sono quindi armoniche rispetto alla data $C_2$ (8). Si deduce così che per costruire un quadrilatero armonico basta prendere ad arbitrio due coppie $M_1, M_2$ e $M_3, M_4$ di punti armonici rispetto a $C_2$, e poi costruire il quadrilatero i cui lati sono $M_1M_3$, $M_1M_4$, $M_2M_3$, $M_2M_4$. Infatti si ha un fascio di coniche inscritte nel quadrilatero, fra queste sappiamo che le due costituite dalle coppie di punti $M_1$, $M_2$, e $M_3$, $M_4$ sono armoniche rispetto a $C_2$, quindi tutte le altre del fascio sono pure armoniche rispetto a $C_2$. Si deduce così il teorema: « Se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero sono armoniche rispetto ad una conica anche la terza coppia è armonica rispetto ad essa », che sotto altra forma è stato enunciato da Hesse (2).

15. *Trilateri armonici.*

(1) Questi particolari $\frac{n(n+1)}{2}$-lateri armonici sono stati considerati da Reye (*Trägheits und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen*, Crelle, vol. 82, 1870) e da Rosanes (*Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen*, Crelle, vol. 76, 1873), i quali hanno dimostrato che l'equazione di una curva di ordine $n$ si può esprimere con una somma delle potenze $n^{\text{e}}$ delle equazioni delle loro $\frac{n(n+1)}{2}$ rette, cioè che sono *armonici*, secondo la nostra definizione, rispetto alla curva di ordine $n$.

(2) « De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis » (*Dissertatio pro venia legendi*. Regiomonti, 1840).

Prendiamo un trilatero armonico rispetto ad una conica $C_2$. Ciascun vertice insieme ad un punto qualunque del lato opposto costituisce una linea di 2ª classe inscritta al trilatero e quindi armonica rispetto a $C_2$; perciò ciascun vertice deve essere il polo del lato opposto (8, I). Viceversa, se ciascun vertice di un trilatero è polo del lato opposto rispetto a $C_2$, le tre coppie di vertici del trilatero sono armoniche rispetto a $C_2$, quindi i vertici costituiscono un gruppo coniugato rispetto a $C_2$, e il trilatero è armonico rispetto a $C_2$ (13, IV).

Vi sono $\infty^3$ trilateri armonici rispetto ad una data conica. Ciascuno dei vertici di un trilatero armonico è il polo del lato opposto rispetto alla conica (13, III).

16. In generale non vi sono 2-lateri nè 1-lateri armonici rispetto ad una data $C_2$. Se ve ne fossero l'equazione di una conica generale si potrebbe esprimere colla somma di due quadrati o con un solo quadrato, ciò che è evidentemente impossibile, perchè nel 1° caso la $C_2$ dovrebbe essere costituita da due rette e nel 2° caso da una retta contata due volte. Allo stesso risultato si giunge applicando il metodo fin qui seguìto. Il punto comune alle due rette di un 2-latero armonico deve essere apolare rispetto alla $C_2$ (11, III), cioè doppio per essa (6, II), quindi la $C_2$ deve spezzarsi in due rette. Due punti presi comunque, uno su ciascuna delle due rette del 2-latero, devono essere armonici rispetto a $C_2$, quindi le due rette che la costituiscono devono essere separate armonicamente dalle 2 rette del 2-latero, e viceversa.

Se vi fosse un 1-latero armonico rispetto a $C_2$ ogni punto della retta dell'1-latero dovrebbe essere apolare rispetto a $C_2$, ossia doppio per essa, quindi la $C_2$ sarebbe costituita dalla retta dell'1-latero contata 2 volte, e viceversa.

17. I teoremi generali dimostrati nel n. 12, quando si tratta di due trilateri armonici rispetto ad una stessa conica, che è insieme una curva di 2° ordine e di 2ª classe, si possono enunciare come segue:

I. Due trilateri armonici rispetto ad una stessa conica sono circoscritti ad una stessa conica ed inscritti in un'altra (12, I) [1].

II. Due trilateri inscritti, o circoscritti, ad una stessa conica sono armonici rispetto ad un'altra (12, II),

e perciò:

III. Se due trilateri sono circoscritti ad una stessa conica sono inscritti in un'altra, e viceversa [2].

Da questo teorema si deduce subito che:

IV. Date due coniche, se vi è un trilatero circoscritto ad una ed inscritto all'altra ve ne sono infiniti [3].

18. I trilateri armonici rispetto ad una data conica $C_2$ sono $\infty^3$, ciascuno dà $\infty^2$ coniche inscritte $\Gamma_2$, armoniche rispetto a $C_2$, ma tutte le $\Gamma_2$ armoniche rispetto a $C_2$ sono $\infty^4$, dunque ciascuna deve essere data da $\infty^1$ trilateri armonici.

[1] Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, Fincke, 1832, p. 308; *Gesammelte Werke*. Berlin, Reimer, 1881, p. 448, Bd. I.

[2] Brianchon, *Mémoire sur les lignes du second ordre*, p. 35. Paris, Bachelier, 1817.

[3] Poncelet, *Traité des propriété projectives des figures*, n. 565, 1822.

I. Date due coniche, se esiste un trilatero circoscritto, o inscritto, alla prima e armonico rispetto alla seconda, ne esistono altri $\infty^1$, vi sono $\infty^1$ trilateri inscritti, o circoscritti, alla seconda ed armonici alla prima, e le due coniche sono armoniche.

II. Se due coniche sono armoniche esistono $\infty^1$ trilateri circoscritti, o inscritti, ad una qualunque delle due e armonici rispetto all'altra (1).

I quadrilateri, o pentalateri, armonici rispetto ad una data $C_2$ sono $\infty^6$, o $\infty^9$, ciascuno dà $\infty^1$, o $\infty^0$, $\Gamma_2$ inscritte, armoniche rispetto a $C_2$; ma tutte le $\Gamma_2$ armoniche rispetto a $C_2$ sono $\infty^4$, dunque ciascuna deve essere data da $\infty^3$, o $\infty^5$, quadrilateri, o pentalateri, armonici.

III. Date due coniche, se esiste un quadrilatero o pentalatero circoscritto, o un quadrangolo o pentagono inscritto, alla prima e armonico rispetto alla seconda, ne esistono altri $\infty^3$ o $\infty^5$, vi sono $\infty^3$ o $\infty^5$ quadrangoli o pentagoni inscritti, o quadrilateri o pentalateri circoscritti, alla seconda ed armonici rispetto alla prima, e le due coniche sono armoniche.

IV. Se due coniche sono armoniche esistono $\infty^3$ o $\infty^5$ quadrilateri o pentalateri circoscritti, o quadrangoli o pentagoni inscritti ad una qualunque delle due e armonici rispetto all'altra.

## 4. Applicazione alle curve di 3° ordine o di 3ª classe.

19. *Ennalateri armonici.*

I. Vi sono $\infty^{17}$ ennalateri armonici rispetto ad una data curva di 3° ordine. Una sola curva di 3ª classe, armonica rispetto alla curva data, tocca 8 rette prese ad arbitrio, un'altra qualunque delle sue tangenti, insieme ad esse, dà uno degli ennalateri armonici (13, I).

*Ottolateri armonici.*

II. Vi sono $\infty^{14}$ ottolateri armonici rispetto ad una data curva di 3° ordine. Vi è un fascio di curve di 3ª classe, armoniche rispetto alla curva data, che toccano 7 rette prese ad arbitrio, tutte le curve di 3ª classe del fascio sono tangenti ad altre due rette fisse, ciascuna delle quali, insieme alle prime 7, dà uno degli ottolateri armonici (13, II).

*Ettalateri armonici.*

III. Vi sono $\infty^{11}$ ettalateri armonici rispetto ad una data curva di 3° ordine. Si possono prendere ad arbitrio 5 rette di un ettalatero armonico, le rimanenti due inviluppano una curva di 3ª classe, che tocca ciascuna delle 5 rette prese arbitrariamente ed è armonica rispetto alla data curva di 3° ordine (13, III).

Se $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ sono 5 rette prese ad arbitrio e se $R_6, R_7$ sono altre due rette che insieme ad esse costituiscono un ettalatero armonico rispetto ad una

(1) Vedi p. es. Salmon, *Conic sections.*

data $C_3$, le $R_6$, $R_7$ inviluppano una $\Gamma_3$, armonica rispetto a $C_3$, ed il loro punto comune genera una retta $P_1$ (13), che è la retta polare della conica che tocca le 5 rette date, presa rispetto a $C_3$. Infatti la suddetta conica insieme al punto comune alla $R_6$, $R_7$ costituisce una curva di 3ª classe inscritta nell'ettalatero e quindi armonica rispetto a $C_3$, perciò il punto $R_6$ $R_7$ deve appartenere alla retta polare $P_1$ della conica (5, I).

La corrispondenza [1, 1] tra le coppie di tangenti $R_6$, $R_7$ di $\Gamma_3$ è nota; sappiamo che la $P_1$ è una tangente di $\Gamma_3$. Quale retta $P_2$ insieme a $P_1$ ed alle 5 prese ad arbitrio dà un ettalatero armonico rispetto a $C_3$?

La retta polare di una conica tangente a $P_1$ ed a 4 delle 5 rette prese ad arbitrio deve incontrare la quinta nel punto in cui è incontrata da $P_2$, dunque le rette polari delle 5 coniche tangenti rispettivamente alle rette $R_1, R_2, R_3, R_4, P_1$; $R_1, R_2, R_3, P_1, R_5$; $R_1, R_2, P_1, R_4, R_5$; $R_1, P_1, R_3, R_4, R_5$; $P_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ incontrano le $R_5$, $R_4$, $R_3$, $R_2$, $R_1$ in 5 punti che stanno sopra una stessa retta $P_2$, la quale rimane così costruita. La $\Gamma_3$ tocca la $P_1$ nel punto $P_1$ $P_2$ e tocca la $P_2$.

20. *Esalateri armonici.*

Chiamiamo $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ le rette di un esalatero armonico rispetto ad una data $C_3$. La conica tangente a 5 delle 6 rette ed un punto qualunque della sesta formano una $\Gamma_3$ inscritta all'esalatero e quindi armonica rispetto a $C_3$, perciò possiamo dire che:

I. Dato un esalatero armonico rispetto ad una curva di 3° ordine, ciascuna sua retta è la polare della conica tangente alle altre 5.

Viceversa se due rette $R_1$, $R_2$ di un esalatero sono polari rispetto a $C_3$ delle coniche $\Gamma_2'$, $\Gamma_2''$ che toccano le altre 5 $R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ e $R_1, R_3, R_4, R_5, R_6$, l'esalatero è armonico rispetto a $C_3$. Infatti la $\Gamma_2'$ insieme a due punti qualunque della $R_1$ e la $\Gamma_2''$ insieme a due punti qualunque della $R_2$ costituiscono 4 linee di 3ª classe, linearmente indipendenti, inscritte nell'esalatero ed armoniche rispetto a $C_3$. Queste $\Gamma_3$ individuano un sistema lineare $\infty^3$ di $\Gamma_3$, tutte inscritte nell'esalatero ed armoniche rispetto a $C_3$, dunque l'esalatero è armonico rispetto a $C_3$.

II. Se rispetto ad una curva di 3° ordine 2 rette di un esalatero sono rispettivamente polari delle coniche tangenti alle altre 5, ciascuna retta dell'esalatero è la polare della conica che tocca le altre 5 e l'esalatero è armonico rispetto alla curva data di 3° ordine.

Ora possiamo costruire un esalatero armonico rispetto a $C_3$, prese ad arbitrio 4 delle sue rette. Una qualunque retta è polare, rispetto a $C_3$, di un sistema lineare $\infty^3$ di coniche, quello determinato dai 4 poli della retta, ciascuno contato 2 volte. Presa la retta $R_1$ dell'esalatero abbiamo una conica $\Gamma_2^{(1)}$ che tocca le altre 3 rette $R_2, R_3, R_4$ ed ha la $R_1$ come polare, così pure abbiamo una conica $\Gamma_2^{(2)}$ che tocca le 3 rette $R_1, R_3, R_4$ ed ha come polare la $R_2$. Le due coniche $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_2^{(2)}$ hanno 4 tangenti comuni, due sono le rette $R_3, R_4$, le altre due siano $R_5, R_6$. Per ciò che è stato detto precedentemente si vede subito che sono tangenti ad $R_5, R_6$ anche le altre due coniche $\Gamma_2^{(3)}$, $\Gamma_2^{(4)}$, che hanno come polari $R_3, R_4$ e toccano le rette $R_1, R_2, R_4$ e $R_1, R_2, R_3$, e che le 6 rette $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ costituiscono un esalatero armonico rispetto a $C_3$.

III. Gli esalateri armonici rispetto ad una data curva di 3° ordine sono $\infty^8$, ciascuno è individuato da 4 delle sue rette prese ad arbitrio.

Tra le $\Gamma_3$ inscritte in un esalatero ve ne sono 15 che si spezzano in tre punti, 3 vertici per i quali passano tutti e 6 i lati, perciò:

IV. Se un esalatero è armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, con i suoi vertici si possono formare 15 terne, in modo che due qualunque vertici di una terna non stiano sopra una stessa retta dell'esalatero, ciascuna di queste 15 terne è armonica rispetto alla curva di 3° ordine.

V. Per ciascun vertice di un esalatero armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, passano le tre rette polari delle coppie di vertici opposti del quadrilatero formato dalle 4 rette dell'esalatero che non contengono il detto vertice.

Da ciò si deduce che per costruire un esalatero armonico, prese 4 delle sue rette, basta costruire la conica che ne tocca 3 ed ha la quarta come retta polare, il punto comune a due rette polari di due coppie di vertici opposti del quadrilatero formato dalle 4 rette prese, e finalmente le due rette che partono da questo punto e toccano la conica costruita.

21. *Esalateri armonici particolari.*

Esistono esalateri armonici le cui rette toccano una stessa conica $\Gamma_2$? Se ve ne sono, la $\Gamma_2$ deve essere apolare rispetto a $C_3$ (11, III), ora esiste una rete di coniche apolari rispetto a $C_3$ (6, I), presa una qualunque $\Gamma_2$ tra esse e presa una delle $\infty^5$ terne di punti armoniche rispetto a $C_3$, se dai punti della terna conduciamo le 6 rette che toccano $\Gamma_2$ abbiamo un esalatero armonico rispetto a $C_3$. Infatti i punti della terna armonica rispetto a $C_3$ e la $\Gamma_2$ insieme a 3 punti qualunque del piano, dànno 4 $\Gamma_3$, linearmente indipendenti, inscritte nell'esalatero ed armoniche rispetto a $C_3$, dunque abbiamo un sistema lineare $\infty^3$ di curve di 3ª classe inscritte all'esalatero ed armoniche rispetto a $C_3$, dunque l'esalatero è armonico rispetto a $C_3$.

I. Rispetto ad una data cubica vi sono $\infty^7$ esalateri armonici circoscritti ad una conica.

Nella rete di coniche apolari rispetto a $C_3$ ve ne sono $\infty^1$ le quali si spezzano in due punti, che sono coppie di punti corrispondenti sulla essiana di $C_3$ (9, III). Le 6 rette che dai punti di una di queste coppie vanno ai punti di una terna armonica rispetto a $C_3$ costituiscono un esalatero armonico pure rispetto a $C_3$.

II. Rispetto ad una data cubica vi sono $\infty^6$ esalateri armonici, tre delle cui rette passano per uno stesso punto e le altre tre per un altro.

Sappiamo che esistono $\infty^4$ quadrangoli, gruppi di 4 punti, coniugati rispetto a $C_3$ (8). Per costruirne uno basta prendere arbitrariamente due vertici qualunque o due lati opposti ([1]). Presi due vertici $M_1, M_2$ la loro retta polare $P_1$, rispetto a $C_3$, deve contenere gli altri due $M_3, M_4$, e questi, dovendo separare armonicamente le coniche polari di $M_1, M_2$, sono subito determinati. Presi due lati opposti $M_1 M_2$ e $M_3 M_4$ le coniche polari dei punti di ciascuno tagliano l'altro in

coppie di punti di una involuzione i cui punti doppî sono i vertici $M_1$, $M_2$ e $M_3$, $M_4$ del quadrangolo.

III. Vi sono $\infty^4$ esalateri armonici, rispetto ad una data curva di 3° ordine, le cui 6 rette sono i lati di un quadrangolo ad essa coniugato (13, IV).

22. *Pentalateri armonici.*

Chiamiamo $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ le 5 rette di un pentalatero armonico rispetto ad una data $C_3$. La conica $\Gamma_2$ inscritta deve essere apolare rispetto a $C_3$. Due vertici, come $R_1 R_2$, $R_3 R_4$, non situati sopra una stessa retta del pentalatero, insieme ad un punto qualunque della rimanente retta $R_5$, che non passa per alcuno di essi, costituiscono una $\Gamma_3$ inscritta al pentalatero e quindi armonica rispetto a $C_3$, perciò la $R_5$ è polare dei punti $R_1 R_2$, $R_3 R_4$ rispetto a $C_3$.

I. Se un pentalatero è armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, la conica che tocca le sue 5 rette è apolare a 2 vertici, non situati sopra una stessa retta del pentalatero, hanno come polare quella delle sue rette che non passa per alcuno di essi.

Viceversa supponiamo che la $\Gamma_2$ sia apolare rispetto a $C_3$ e che la $R_5$ sia la polare dei punti $R_1 R_2$, $R_3 R_4$; allora questi 2 punti insieme a due punti comunque presi sulla $R_5$ e la $\Gamma_2$ insieme a tre punti qualunque del piano costituiscono 5 $\Gamma_3$, linearmente indipendenti, armoniche rispetto a $C_3$ ed iscritte al pentalatero, perciò tutte le $\infty^4$ $\Gamma_3$ inscritte al pentalatero sono armoniche rispetto a $C_3$ e rispetto ad essa è armonico il pentalatero.

II. Un pentalatero è armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, se rispetto ad essa è apolare la conica inscritta, e se 2 vertici, non situati sopra una stessa retta del pentalatero, hanno come polare quella delle sue rette che non passa per alcuno di essi.

Le coniche apolari rispetto a $C_3$ formano una rete, per cui una $\Gamma_2$, ed una sola, tocca due date rette $R_1$, $R_2$. La conica polare $C_2$ del punto $R_1 R_2$, rispetto a $C_3$, è armonica rispetto a $\Gamma_2$, vi sono dunque $\infty^1$ trilateri circoscritti a $\Gamma_2$ ed armonici rispetto a $C_2$; siano $R_3$, $R_4$, $R_5$ le rette di uno qualunque. Il pentalatero delle rette $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ è armonico rispetto a $C_3$. Infatti esiste una conica inscritta $\Gamma_2$ apolare rispetto a $C_3$ e la retta polare dei punti $R_1 R_2$, $R_3 R_4$ è la retta polare di $R_3 R_4$ rispetto alla conica polare $C_2$ di $R_1 R_2$, cioè la retta $R_5$ (22, II).

III. I pentalateri armonici, rispetto ad una data curva di 3° ordine, sono $\infty^5$; 2 rette prese ad arbitrio appartengono ad $\infty^1$ pentalateri armonici, la conica apolare che le tocca è l'inviluppo delle altre 3.

23. *Quadrilateri armonici.*

Se un quadrilatero è armonico rispetto ad una data $C_3$ ciascuna conica $\Gamma_2$ inscritta nel quadrilatero deve essere apolare rispetto a $C_3$. Due vertici opposti del

(1) Caporali, *Teoremi sulle curve di terzo ordine; Teoremi sui fasci di curve del terzo ordine* (Acc. dei Lincei, serie 3ª, vol. I, 1877).

quadrilatero costituiscono una $\Gamma_2$ inscritta, quindi devono essere apolari, cioè punti corrispondenti sulla essiana di $C_3$ (9, III).

I. Un quadrilatero armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, è inscritto nella sua essiana, essendo le coppie di vertici opposti punti corrispondenti su di essa. Vi è un fascio di coniche inscritte che sono tutte apolari.

Chiamiamo $R_1, R_2, R_3, R_4$ le rette di un quadrilatero e supponiamo che due coppie di vertici opposti, come $R_1 R_2$, $R_3 R_4$ ed $R_1 R_3$, $R_2 R_4$, siano apolari rispetto a $C_3$. Ciascuna di queste due coppie insieme a 3 qualunque punti del piano dà 3 $\Gamma_3$ armoniche rispetto a $C_3$, in tutto abbiamo 6 $\Gamma_3$, linearmente indipendenti, inscritte al quadrilatero ed armoniche rispetto a $C_3$, e perciò rispetto ad essa è armonico il quadrilatero.

II. Se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero sono punti corrispondenti sulla essiana di una data curva del 3° ordine, anche quelli della terza coppia sono punti corrispondenti sulla essiana e il quadrilatero è armonico rispetto alla data curva di 3° ordine.

Per costruire un quadrilatero armonico rispetto a $C_3$ basta prendere ad arbitrio una $R_1$ delle sue rette. Siano $M_1, M_2, M_3$ i punti in cui la $R_1$ incontra la essiana di $C_3$ e siano $M_1', M_2', M_3'$ i punti corrispondenti sulla essiana. Le due coppie di punti corrispondenti $M_1, M_1'$; $M_2, M_2'$ sono vertici di un quadrilatero armonico, uno dei suoi lati è $R_1$, gli altri siano $R_2, R_3, R_4$. I vertici opposti della terza coppia, dovendo pure essere punti corrispondenti sulla essiana, saranno i punti $M_3, M_3'$.

III. Vi sono $\infty^2$ quadrilateri armonici, rispetto ad una data curva di 3° ordine, 3 punti della essiana, posti in linea retta, ed i 3 punti corrispondenti su di essa sono vertici di un quadrilatero armonico (1).

Dovendo essere apolari rispetto a $C_3$ tutte le coniche inscritte in un quadrilatero armonico, se prendiamo ad arbitrio una delle sue rette abbiamo un fascio di coniche apolari che la toccano, le altre tre rette del quadrilatero sono le altre tangenti comuni a tutte le coniche del fascio.

IV. Data una curva di 3° ordine, tutte le coniche apolari che toccano una retta qualunque ne toccano altre 3 che insieme ad essa costituiscono un quadrilatero armonico.

24. *Trilateri armonici.*

Non vi sono trilateri armonici rispetto ad una generale $C_3$. Infatti se ne esistesse uno ciascuno dei suoi vertici insieme ad un punto qualunque del lato opposto dovrebbe costituire una coppia apolare rispetto a $C_3$, cioè una coppia di punti corrispondenti sulla essiana di $C_3$, la quale essiana dovrebbe per conseguenza ridursi alle 3 rette del trilatero. È poi noto che ciò avviene solamente quando è nullo l'invariante S di $C_3$, cioè quando la $C_3$ è equianarmonica.

(1) Le proprietà di questi quadrilateri, inscritti nella essiana di una curva del 3° ordine, sono notissime (vedi p. es. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n. 134).

Esiste un trilatero armonico, rispetto ad una data curva di 3° ordine, ed uno solo, quando la curva è equianarmonica; la sua essiana è costituita dalle 3 rette del trilatero.

25. Non vi sono 2-lateri nè 1-lateri armonici rispetto ad una curva generale di 3° ordine. Applicando i principî stabiliti, ovvero osservando che se esiste un 2-latero o un 1-latero armonico l'equazione della curva si può esprimere colla somma di 2 cubi o di un solo cubo, si deduce facilmente che se esiste un 2-latero armonico la curva si deve spezzare in 3 rette, passanti per il vertice del 2-latero, e che le sue due rette devono costituire il gruppo essiano delle 3 che formano la curva di 3° ordine; se esiste un 1-latero armonico la curva di 3° ordine si deve ridurre alla sua retta contata 3 volte.

26. Il primo teorema generale dimostrato nel n. 12, nel caso delle curve di 3° ordine, ci dà il seguente caso particolare:

I. Due quadrilateri armonici, rispetto ad una stessa curva di 3° ordine, sono circoscritti ad una stessa conica (1).

Viceversa, se sono dati due quadrilateri circoscritti ad una stessa conica, i due fasci di coniche inscritte ad essi appartengono ad una stessa rete di coniche $\Gamma_2$, la rete associata di coniche $C_2$ (3, II) è costituita, come è noto, dalle coniche polari dei punti del piano rispetto ad una stessa $C_3$, evidentemente le $\Gamma_2$ della rete sono le coniche apolari rispetto a $C_3$ e rispetto ad essa sono armonici i due dati quadrilateri.

II. Due quadrilateri circoscritti ad una stessa conica sono armonici rispetto ad una stessa curva di 3° ordine.

I teoremi generali dimostrati nel n. 12, nel caso delle curve di 3° ordine, dànno anche i seguenti casi particolari:

III. Due pentalateri armonici, rispetto ad una stessa curva di 3° ordine, sono circoscritti ad una stessa curva di 3ª classe, e viceversa (12, I, II).

IV. Un esalatero e un quadrilatero armonici, rispetto ad una stessa curva di 3° ordine, sono circoscritti ad una stessa curva di 3ª classe, e viceversa (12, I, II).

V. Un pentalatero e un quadrilatero armonici, rispetto ad una stessa curva di 3° ordine, sono circoscritti a tutte le curve di 3ª classe di un fascio, e viceversa (12, I, II).

VI. Due quadrilateri armonici, rispetto ad una stessa curva di 3° ordine, sono circoscritti a tutte le curve di 3ª classe di una rete, e viceversa (12, I, II).

27. I pentalateri armonici rispetto a $C_3$ sono $\infty^5$, ciascuno dà $\infty^4$ $\Gamma_3$ inscritte, armoniche rispetto a $C_3$; ma tutte le $\Gamma_3$ armoniche rispetto a $C_3$ sono $\infty^8$, dunque ciascuna deve essere data da $\infty^1$ pentalateri.

I. Se una curva di 3ª classe ed una di 3° ordine sono armoniche, esistono $\infty^1$ pentalateri circoscritti alla prima ed armonici rispetto

(1) Rosanes, l. c. 1873. Beltrami, *Ricerche di geometria analitica.* Acc. di Bologna, serie 3ª, Tomo X. 1879.

alla seconda, ed $\infty^1$ pentagoni inscritti alla seconda ed armonici rispetto alla prima.

II. Data una curva di 3ª classe ed una di 3° ordine, se esiste un pentalatero circoscritto alla prima e armonico rispetto alla seconda, ne esistono altri $\infty^1$, vi sono $\infty^1$ pentagoni inscritti alla seconda ed armonici alla prima, e le due curve sono armoniche.

I polilateri armonici di 6, 7, 8, 9 rette sono $\infty^8$, $\infty^{11}$, $\infty^{14}$, $\infty^{17}$, ciascuno dà $\infty^3$, $\infty^2$, $\infty^1$, $\infty^0$ curve $\Gamma_3$ inscritte, armoniche rispetto a $C_3$; ma le $\Gamma_3$ armoniche rispetto a $C_3$ sono $\infty^8$, dunque ciascuna deve essere data da $\infty^3$, $\infty^5$, $\infty^7$, $\infty^9$ polilateri di 6, 7, 8, 9 rette.

III. Se una curva di 3ª classe ed una di 3° ordine sono armoniche esistono $\infty^3$, $\infty^5$, $\infty^7$, $\infty^9$ polilateri di 6, 7, 8, 9 rette circoscritti alla prima ed armonici rispetto alla seconda, ed $\infty^3$, $\infty^5$, $\infty^7$, $\infty^9$, poligoni di 6, 7, 8, 9 punti inscritti alla seconda ed armonici rispetto alla prima.

IV. Data una curva di 3ª classe ed una di 3° ordine, se esiste un polilatero di 6, 7, 8, 9 rette circoscritto alla prima ed armonico rispetto alla seconda, ne esistono altri $\infty^3$, $\infty^5$, $\infty^7$, $\infty^9$, vi sono $\infty^3$, $\infty^5$, $\infty^7$, $\infty^9$, poligoni di 6, 7, 8, 9 vertici inscritti alla seconda ed armonici rispetto alla prima, e le due curve sono armoniche.

# Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz. Memoria terza del Socio G. V. SCHIAPARELLI (Opposizione 1881-1882)

*letta nella seduta del 6 giugno 1886.*

(Con tre tavole)

## NOTA PRELIMINARE

436. La presente Memoria è una continuazione di quelle, che sopra identica materia ebbi l'onore di consegnare alla R. Accademia dei Lincei nel 1879 e nel 1881 (1), e comprende un riassunto delle cose da me notate sopra l'aspetto di Marte nell'opposizione 1881-82. Le osservazioni abbracciarono un periodo di circa sei mesi, dal 26 ottobre 1881 al 29 aprile 1882. Durante l'ottobre però e il novembre, e la massima parte del dicembre il tempo fu poco favorevole a così delicate ricerche; dopo il febbrajo il pianeta cominciò ad esser troppo lontano. Ma nei cinquanta giorni corsi fra il 26 dicembre 1881 e il 13 febbraio 1882 si ebbero circostanze atmosferiche per lo più eccellenti, e quali raramente presso di noi si hanno in tale stagione. Le altissime pressioni, che dominarono in quell'intervallo, produssero una serie di giornate calme e serene con mite temperatura, le quali grandemente favorirono il lavoro; in 16 giorni l'atmosfera permise di utilizzare tutta la forza ottica del nostro eccellente telescopio di Merz di 218 millimetri d'obbietivo, in altri 14 lasciò assai poco a desiderare; onde spesso invece dell'usata amplificazione 322 si trovò vantaggioso di adottare l'altra 417 di cui nelle opposizioni precedenti non molto frequente era stato l'uso (2). Pertanto, malgrado che il diametro apparente del pianeta non abbia mai raggiunto 16″ (laddove nel 1879 sorpassò 19″ e nel 1877 arrivò quasi a 25″), fu possibile, in questa terza delle opposizioni da me osservate, ottenere sulla natura fisica del pianeta un in-

(1) Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie 3ª vol. II e vol. X.

(2) Sopra quest'istrumento e sul modo di adoperarlo veggasi quanto è detto nelle Memorie precedenti, specialmente nella Nota preliminare alla 2ª Memoria, § 283.

sieme di notizie, che per novità e per interesse superano quanto negli anni scorsi ebbi l'onore di comunicare a quest'Accademia. Nessuna delle antiche linee oscure, schematicamente appellate *canali*, mancò questa volta; fu riveduto con piena certezza l'Hiddekel, il quale era rimasto dubbioso nel 1879, e fu ritrovato il Fonte della Gioventù, che nel 1879 non s'era più potuto vedere. Cause probabilmente connesse col Sole misero a nudo una enorme quantità di particolari neppur sospettati nelle opposizioni precedenti. Quel colore rosso chiaro splendente molto misto di bianco, che occupava nel 1877 tutta la zona equatoriale al nord del Grande Diaframma, e nel 1879 ne prendeva ancora molte parti, scomparì quasi intieramente nel gennajo e nel febbrajo 1882. Incominciarono a manifestarsi in quel velo luminoso delle ombre indistinte circondate da macchie informi di color aranciato forte; quelle ombre poco a poco divennero più oscure e meglio terminate, concentrandosi presero corpo, e si trasformarono in gruppi di linee più o meno nere; contemporaneamente il color aranciato si estese e finì per prendere, salvo poche eccezioni, tutta la zona detta continentale. Le vaste estensioni dette Oceano e Golfo Alcionio, che nel 1879 apparivano come sfumature indeterminate, e che sembrava dovessero appartenere alle aree dette *mari*, si risolvettero in viluppi complicatissimi di pure linee. Allora si venne poco a poco svelando il fatto curioso ed impreveduto della *geminazione* dei cosidetti canali, il quale probabilmente varrà a mutare d'assai le opinioni correnti sulla costituzione fisica del pianeta.

437. L'ordine di questa terza Memoria è affatto identico a quello osservato nelle due precedenti, soltanto manca questa volta la parte che in quelle formava il Capitolo II, concernente la determinazione areografica dei punti fondamentali. A questa parte, per ciò che riguarda le regioni australi e la zona equatoriale del pianeta, è stato già ampiamente provveduto nelle ricerche anteriori; le osservazioni del 1881-82, fatte con un diametro apparente tanto minore, non avrebbero potuto aggiungervi molto. Riguardo alle regioni boreali i rilievi anteriori furono necessariamente molto imperfetti, e l'opposizione del 1881-82 ha certamente dato il modo di estenderli e di migliorarli alquanto. Ma d'altra parte la giacitura dell'asse rotatorio nelle opposizioni seguenti 1883-84 e 1886 è stata tanto più favorevole allo studio delle regioni boreali, e quelle opposizioni han somministrato rispetto ad esse dati tanto più esatti, che si è creduto inutile di riferire a parte quel poco che dall'opposizione 1881-82 è risultato. Quindi parve opportuno di rinviare ad una prossima e più conveniente occasione la ricerca delle posizioni areografiche fondamentali determinate nelle latitudini più nordiche del pianeta. Però nelle carte formanti corredo di questa Memoria già si è profittato, per stabilirne i tratti essenziali, delle posizioni dei punti boreali, quali risultano dalla discussione complessiva delle misure prese negli anni 1881-82, 1883-84 e 1886.

438. Per dare un'idea delle condizioni geometriche, secondo cui Marte si presentava durante le osservazioni 1881-82 soggiungo il seguente estratto dell'*Ephemeris for Physical observations of Mars*, pubblicata dal signor Marth nel n. 2395 delle *Astronomische Nachrichten* di Kiel; in questo estratto si riferiscono di 10 in 10 giorni, e per tutto l'intervallo delle osservazioni, l'inclinazione del piano dell'equatore di Marte rispetto alla visuale condotta dalla terra, e il diametro apparente del pianeta. Tali numeri sono calcolati sopra elementi che si ha ragione di ritenere come già molto prossimi al vero.

| Data | Inclinazione | Diametro appar. | Data | Inclinazione | Diametro appar. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1881 Ott. 22 | + 6°,7 | 10″,75 | 1882 Gen. 30 | — 2°,0 | 12″,27 |
| Nov. 1 | + 7,4 | 11,62 | Feb. 9 | — 1,8 | 11,13 |
| Nov. 11 | + 7,6 | 12,57 | Feb. 19 | — 1,0 | 10,09 |
| Nov. 21 | + 7,2 | 13,56 | Mar. 1 | + 0,2 | 9,17 |
| Dic. 1 | + 6,2 | 14,49 | Mar. 11 | + 1,7 | 8,38 |
| Dic. 11 | + 4,7 | 15,19 | Mar. 21 | + 3,4 | 7,71 |
| Dic. 21 | + 2,8 | 15,47 | Mar. 31 | + 5,3 | 7,13 |
| Dic. 31 | + 0,9 | 15,22 | Apr. 10 | + 7,3 | 6,63 |
| 1882 Gen. 10 | — 0,7 | 14,49 | Apr. 20 | + 9,4 | 6,21 |
| Gen. 20 | — 1,7 | 13,44 | Apr. 30 | + 11,1 | 5,92 |

| | | emisfero boreale | emisfero australe |
|---|---|---|---|
| 1881 | 1 Luglio, | solstizio invernale, | solstizio estivo, |
| — | 8 Dicembre, | equinozio di primavera, | equinozio d'autunno, |
| 1882 | 25 Giugno, | solstizio estivo. | solstizio invernale. |

L'inclinazione è segnata positivamente o negativamente secondo che si trovava in vista il polo boreale o il polo australe. Considerando tali inclinazioni si vede, che in tutto il tempo più utile per le osservazioni (dalla fine di dicembre alla metà di marzo) i poli del pianeta furono vicinissimi al circolo terminatore dell'emisfero visibile, e che l'equatore fu sempre a piccola distanza dal centro del disco, riuscendo così ugualmente bene osservabili i due emisferi boreale ed australe. Soltanto nel novembre e nell'aprile il polo Nord si avanzò di parecchi gradi entro il limite dell'emisfero visibile, procurando così una prospettiva alquanto più vantaggiosa delle regioni boreali; ma in quei mesi non fu possibile fare studî di molta importanza.

## CAPITOLO I.

### Osservazioni sulla direzione dell'asse rotatorio di Marte.

439. Per le osservazioni sulla direzione dell'asse non si è potuto questa volta profittare della macchia polare australe, essendo dessa restata sempre invisibile durante il periodo conveniente per tali misure. Anche la macchia boreale fino verso la metà di gennajo non si potè distinguere nettamente. Apparvero bensì in quella parte del lembo diverse regioni più bianche, corrispondenti a ciò, che nell'opposizione precedente era stato considerato come un sistema di ramificazioni delle nevi boreali (§§ 428-435): ma l'incostanza del loro aspetto, la frequente indeterminazione del loro contorno, e la loro troppo bassa latitudine non permettevano di prenderle come base di osservazioni esatte. Verso la metà di gennajo cominciarono però tali rami a ritirarsi verso il polo, diminuendo di estensione, ma crescendo di bianchezza e di precisione nei contorni; e nelle giornate precedenti il 26 gennajo finirono per fondersi insieme in una calotta regolare ben terminata che appariva sul disco come sottile segmento, il quale nel principio di febbrajo prendeva circa 50° del lembo, ma poi venne diminuendo in modo assai sensibile fino a 30° ed anche meno nei mesi di marzo e di aprile. Tale forma regolare non fu raggiunta che per gradi; da principio il segmento non era tutto di bianchezza omogenea, ma in certi luoghi era più, in altri meno brillante; inoltre nei giorni 1, 6, e 10 febbrajo la calotta, malgrado il suo contorno regolare era ancora solcata da fessure o divisioni. Nondimeno già a partire dal 26 gennajo le misure si poterono fare senza incertezza e si mostrarono fra loro consistenti da un giorno all'altro, e da quell'epoca furono continuate per i mesi di febbrajo e di marzo fino al 21 aprile. A quest'ultima data il diametro apparente del pianeta era già ridotto 6″,2 e non si credette utile di continuar le misure più oltre. In tutto questo intervallo la parte del lembo occupata dal segmento bianco fu intieramente libera da ombra, il corno più prossimo della fase oscura essendo rimasto lontano dal centro della calotta polare non mai meno di 30° nel gennajo, di 27° nel febbrajo, di 25° nel marzo e di 22° nell'aprile. Durante le osservazioni di gennajo, febbrajo, e marzo il polo boreale di Marte fu sempre molto vicino al circolo terminatore, così che i paralleli del pianeta si presentavano alla prospettiva con poca curvatura, e quasi come linee rette. Anche il confine del segmento bianco polare in questo tempo fu alla vista rettilineo e formava come una corda del disco di Marte, sulla quale era possibile appoggiare con qualche precisione il filo micrometrico. Soltanto nell'aprile il confine del segmento cominciò a prendere una curvatura ellittica, ma le osservazioni non diventarono per questo più difficili. Le misure fatte dipendono tutte o quasi tutte da una sola applicazione del filo micrometrico sopra il segmento: esse sono in numero di 45, e nessuna è stata esclusa dal calcolo.

440. Il metodo di discussione è esattamente uguale a quello praticato per le osservazioni del 1879 (§ 288), l'unica diversità essendo questa, che nella formula allora impiegata e segnata (1) nel detto § si è dovuto cambiare il segno ai due ultimi termini per effetto del passaggio che si è fatto dal polo australe al polo boreale. Essendo

cioè P la posizione osservata della macchia bianca; $p$ la posizione dell'asse del pianeta quale risulta dal calcolo; $dp$ la correzione (supposta costante per tutto il tempo delle osservazioni) della quantità $p$; $\theta$ la longitudine areocentrica del punto mediano della macchia polare, contata al solito modo; $\lambda$ la distanza di detto punto mediano dal polo boreale di Marte in gradi di circolo massimo; $\omega$ finalmente la longitudine areografica del centro del disco nel momento della misura; si avrà la relazione

$$P - p = dp - \lambda \cos\theta . \sin\omega + \lambda \sin\theta . \cos\omega \ldots (a)$$

fra le incognite $dp$, $\lambda\cos\theta$, $\lambda\sin\theta$, e le quantità note P, $p$, $\omega$. Ogni osservazione di P fornirà una equazione per determinare le predette incognite. Nel formare tali equazioni ho desunto i valori di $p$ e di $\omega$ dell'Effemeride pubblicata per uso degli osservatori dal signor Marth [1] la quale è fondata sopra elementi già molto approssimati. Il quadro seguente, analogo a quello del § 288, dà nella quarta colonna il valore di $\omega$ nell'istante di ciascuna osservazione, nella quinta il valore osservato di P, nella sesta quello di P-$p$, cioè del 1° membro delle equazioni di cui ($a$) è il tipo. L'ultima colonna dà gli errori che restano nelle equazioni stesse, quando vi si surroghino i valori più probabili (da riferirsi qui appresso) delle incognite $dp$, $\lambda\cos\theta$, $\lambda\sin\theta$.

QUADRO *contenente le osservazioni di posizione della macchia polare boreale fatte nel 1882, e gli elementi del calcolo di ciascuna.*

| Num. | Data 1882 | Tempo siderale | $\omega$ | P | P-$p$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | h m | ° | ° | ° | ° |
| 1 | Gennaio 26 | 0. 36 | 273, 32 | 332, 04 | — 0, 58 | — 0, 74 |
| 2 | Gennaio 28 | 1. 30 | 266, 47 | 331, 64 | — 0, 91 | — 1, 08 |
| 3 | Gennaio 29 | 1. 39 | 258, 66 | 331, 14 | — 0, 38 | — 0, 55 |
| 4 | Gennaio 30 | 1. 34 | 247, 45 | 333, 04 | + 0, 54 | + 0, 37 |
| 5 | Gennaio 31 | 2. 26 | 250, 04 | 330, 74 | — 1, 75 | — 1, 92 |
| 6 | Febbraio 1 | 1. 36 | 333, 80 | 334, 14 | + 1, 66 | + 1, 72 |
| 7 | — | 5. 8 | 279, 37 | 329, 54 | — 2, 94 | — 3, 09 |
| 8 | — | 8. 52 | 227, 85 | 331, 94 | — 0, 54 | — 0, 68 |
| 9 | Febbraio 2 | 1. 51 | 221, 43 | 333, 84 | + 1, 37 | + 1, 25 |
| 10 | Febbraio 3 | 2. 6 | 294, 72 | 331, 54 | — 0, 93 | — 1, 04 |
| 11 | — | 3. 17 | 232 27 | 329, 14 | — 3, 33 | — 3, 48 |
| 12 | — | 7. 34 | 215, 02 | 333, 34 | + 0, 87 | + 0, 77 |
| 13 | Febbraio 4 | 1. 38 | 248, 66 | 331, 34 | — 1, 14 | — 1, 31 |
| 14 | — | 4. 4 | 233, 60 | 330, 04 | — 2, 44 | — 2, 59 |
| 15 | — | 5. 6 | 198, 12 | 333, 24 | + 0, 76 | — 0, 72 |
| 16 | Febbraio 5 | 3. 22 | 239, 80 | 331, 14 | — 1, 36 | — 1, 50 |
| 17 | — | 5. 11 | 213, 32 | 333, 04 | + 0, 54 | + 0, 44 |
| 18 | Febbraio 6 | 2. 14 | 186, 44 | 333, 74 | + 1, 22 | + 1, 24 |

[1] *Ephemeris for Physical observations of Mars, 1881-82* by A. Marth. *Astronom. Nachrichten*, n°. 2395.

| Num. | Data 1882 | Tempo siderale | $\omega$ | P | P-$p$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | h m | ° | ° | ° | ° |
| 19 | Febbraio 7 | 2. 23 | 226, 44 | 331, 14 | — 1, 41 | — 1, 55 |
| 20 | — | 3. 53 | 200, 43 | 329, 74 | — 2, 31 | — 2, 86 |
| 21 | — | 5. 40 | 178, 56 | 331, 94 | — 0, 61 | — 0, 55 |
| 22 | Febbraio 8 | 2. 16 | 166, 75 | 333, 14 | + 0, 56 | + 0, 68 |
| 23 | Febbraio 9 | 2. 49 | 164, 62 | 332, 60 | — 0, 02 | + 0, 11 |
| 24 | Febbraio 10 | 2. 48 | 171, 73 | 332, 30 | — 0, 36 | — 0, 27 |
| 25 | — | 4. 0 | 154, 23 | 335, 10 | + 2, 44 | + 2, 62 |
| 26 | Febbraio 11 | 2. 53 | 145, 32 | 333, 83 | + 1, 12 | + 1, 35 |
| 27 | Febbraio 13 | 3. 15 | 130, 37 | 331, 13 | — 1, 69 | — 1, 41 |
| 28 | Febbraio 14 | 3. 37 | 115, 54 | 332, 53 | — 0, 34 | — 0, 02 |
| 29 | Febbraio 16 | 3. 17 | 100, 31 | 328, 63 | — 4, 40 | — 4, 00 |
| 30 | Febbraio 17 | 3. 11 | 83, 40 | 330, 63 | — 2, 48 | — 2, 06 |
| 31 | Febbraio 18 | 3. 4 | 76, 50 | 330, 13 | — 3, 06 | — 2, 64 |
| 32 | Febbraio 22 | 3. 44 | 45, 31 | 330, 63 | — 2, 94 | — 2, 56 |
| 33 | Febbraio 24 | 4. 16 | 32, 52 | 332, 93 | — 0, 86 | — 0, 52 |
| 34 | Febbraio 27 | 4. 31 | 8, 42 | 335, 93 | + 1, 78 | + 2, 01 |
| 35 | Febbraio 28 | 3. 46 | 343, 95 | 335, 63 | + 1, 35 | + 1, 47 |
| 36 | Marzo 14 | 5. 28 | 223, 89 | 336, 70 | + 0, 20 | + 0, 07 |
| 37 | Marzo 15 | 5. 34 | 214, 94 | 339, 60 | + 2, 92 | + 2, 81 |
| 38 | Marzo 16 | 5. 31 | 203, 79 | 337, 15 | + 0, 28 | + 0, 22 |
| 39 | Marzo 17 | 5. 58 | 199, 98 | 339, 25 | + 1, 75 | + 1, 71 |
| 40 | Marzo 18 | 5. 43 | 185, 96 | 342, 25 | + 5, 00 | + 5, 02 |
| 41 | Marzo 19 | 5. 54 | 178, 23 | 338, 55 | + 1, 07 | + 1, 13 |
| 42 | Aprile 6 | 6. 28 | 4, 03 | 345, 16 | + 3, 60 | + 3, 82 |
| 43 | — | 7. 4 | 358, 28 | 344, 66 | + 3, 11 | + 3, 30 |
| 44 | Aprile 19 | 6. 6 | 243, 54 | 343, 42 | + 2, 36 | + 2, 19 |
| 45 | Aprile 21 | 7. 57 | 222, 11 | 347, 22 | + 1 59 | + 1, 46 |

441. Le 45 equazioni della forma ($a$) trattate al metodo dei minimi quadrati danno le equazioni normali

$$-1^{\circ},20 = +45,00 \,.\, dp + 10^{\circ},95 \,.\, \lambda\cos\theta - 15^{\circ},95 \,.\, \lambda\sin\theta$$
$$+4,91 = +10,95 \,.\, dp + 19,89 \,.\, \lambda\cos\theta - 5,97 \,.\, \lambda\sin\theta$$
$$-1,64 = -15,95 \,.\, dp - 5,97 \,.\, \lambda\cos\theta + 24,92 \,.\, \lambda\sin\theta$$

onde si ricavano per le incognite i valori

$$dp = -0^{\circ},124 \pm 0^{\circ},244 \ldots \text{ peso } 32,05 :$$
$$\lambda\cos\theta = +0,293 \pm 0,335 \ldots \text{ peso } 17,00 :$$
$$\lambda\sin\theta = -0,075 \pm 0,317 \ldots \text{ peso } 18,99.$$

L'error probabile di una delle osservazioni impiegate è $\pm 1^{\circ}.38$; valore che non sembra eccessivo, quando si rifletta che ogni misura risulta da una sola puntata, e che il diametro apparente del pianeta non superò mai $12'',7$, mentre nelle ultime osservazioni scese fino a $6'',2$. Da questo calcolo risulta, che la correzione della po-

sizione dell' asse supposta dall' Effemeride di Marth è minore del suo error probabile, così che anche questa volta, come nel 1879 tale effemeride rappresenta la detta quantità entro gli errori possibili delle misure. Altro risultato è, che anche le due coordinate $\lambda\cos\theta$, $\lambda\sin\theta$ del centro della macchia bianca rispetto al polo di Marte sono minori dei loro errori probabili; onde la conclusione interessante, che nel principio del 1882 questa macchia *si potè considerare come centrata sul polo del pianeta* entro i limiti dell' incertezza probabile di questa determinazione. L' esame degli errori residui della colonna intitolata $\varepsilon$ mostra in fatti, che ritenendo come reali i valori sopra trovati delle quantità $dp$, $\lambda\cos\theta$, $\lambda\sin\theta$, non si riesce a rappresentare le osservazioni in modo sensibilmente migliore che col fare tutte tre le incognite uguali a zero, ciò che lascia come errori residui le stesse quantità P-$p$. La somma dei quadrati di queste è infatti 181°,08, ed introducendo i valori più probabili si riduce alla sua grandezza minima 177°,11, che appena è minore dell' altra. — È pur necessario di avvertire che negli errori residui, a partir dalla metà di Febbraio si hanno lunghe serie di segni identici: onde nasce il sospetto non infondato, che la rapida diminuzione di grandezza subìta dalla calotta polare durante i mesi di Febbraio, Marzo, ed Aprile non sia avvenuta uniformemente su tutto il contorno, ma in modo irregolare, or più da una parte, or più da un' altra. Finalmente non ultima causa d' incertezza sta in questo, che le osservazioni non sono uniformemente ripartite su tutte le configurazioni possibili. Infatti dalle 45 osservazioni 35 corrispondono alla semicirconferenza compresa fra $\omega = 120°$ e $\omega = 300°$, e sole 10 se ne hanno per l' altra semicirconferenza di $\omega$.

442. Ad ogni modo adottando per $dp$ il valore più probabile, risulta per l' epoca media delle precedenti osservazioni (la quale assumo essere il dì 8 Febbraio 1882 a mezzogiorno medio di Greenwich), l' angoto di posizione della metà boreale dell'asse di Marte

$$p = 332°,45 \pm 0°,24$$

nel momento, in cui le coordinate geocentriche del pianeta, secondo il *Nautical Almanac*, erano

$$\text{A. R.} = 5.^{h}47.^{m}18^{s} \qquad D = +26°.44',3.$$

Questi tre numeri costituiscono gli elementi di un circolo massimo, lungo il quale debbono trovarsi le proiezioni dei poli di Marte sulla sfera celeste. In conseguenza degli errori d' osservazione questo circolo non passa esattamente pel polo determiuato dalle osservazioni combinate dagli anni 1877 e 1879 (vedi § 290), ne resta distante però solo 0°,05, che è quanto dire 3′ di gran circolo. La piccolezza inaspettata di questa deviazione è certamente un effetto del caso, e sarebbe facilmente stata possibile una deviazione dieci volte maggiore; in ogni modo possiamo dire, che l' accordo delle osservazioni del 1882 con quelle del 1877 e del 1879 è tale da non lasciar nulla a desiderare.

## CAPITOLO II.

## Osservazioni sull' aspetto presentato dalle varie regioni del pianeta durante l' opposizione 1881-1882.

### Sezione I.

*Generalità.*

443. Per l' opposizione 1881-82 ho fondato la descrizione topografica sopra note molto numerose scritte durante le osservazioni e sopra 162 schizzi parziali secondo il modo usato già prima, e secondo le idee esposte nei §§ 40 e 43. Ai disegni completi si è dato questa volta ancora minore importanza. Ne ho preso 15, per lo più solo per scopo di orientamento generale, e quando lo stato mediocre dell' atmosfera non era propizio alla risoluzione di dubbi difficili e allo studio di minutissimi particolari: alla quale risoluzione ed al quale studio tutte le ore migliori furono sempre consacrate. In queste ore migliori la quantità di cose visibili sul disco era sì grande, che una delineazione completa delle medesime avrebbe richiesto parecchie ore (come una o due volte ho potuto esperimentare col fatto), e si sarebbe commesso un grave errore, sacrificando quei momenti così rari a ripeter configurazioni conosciute e già tradotte in disegno cento volte. — Come base delle carte annesse a questa memoria si adottarono, per le regioni australi, e per le boreali fino circa al $20^0$ parallelo Nord, le posizioni fondamentali stabilite nella Memoria precedente, § 316; per le regioni comprese fra il detto parallelo e il polo artico si fece uso anche di punti determinati nelle opposizioni 1883-84 e 1886, durante le quali tal parte del pianeta s' è potuta esaminar meglio che nelle precedenti. Di questi punti si darà conto in un' altra occasione.

444. Riguardo alle carte si son presentate questa volta alcune difficoltà. Una di esse è nata dal singolare cambiamento che incominciò a prodursi nell' aspetto del pianeta verso la metà di Gennaio, specialmente in conseguenza del fenomeno della geminazione. Onde evitare di confondere insieme in una sola rappresentazione cose che appartengono probabilmente a condizioni fisiche differenti, sarebbe stato necessario separare tutta la serie delle osservazioni in due periodi e fare per ciascun periodo una carta diversa. Ma per quanto concerne il primo periodo le osservazioni non poterono esser nè così perfette, nè così complete, da poter fare una carta esclusivamente fondata su quelle. Vi sono certamente molte particolarità, delle quali posso affermare con tutta certezza, che si produssero soltanto nel secondo periodo: tali sono per esempio quasi tutte le geminazioni. Ma ve ne sono molte altre, constatate soltanto nel secondo periodo, delle quali però è impossibile dire, se nel primo già esistessero: o sia perchè le prime osservazioni fatte in quelle parti capitarono in giorni di visione imperfetta, oppure anche perchè in causa del tempo cattivo non si

potè fare di quelle regioni un esame sufficiente. Questo è avvenuto per molte regioni australi del pianeta, e sopratutto per le regioni del Mar Eritreo, dove le osservazioni del Novembre e del Dicembre poco o nulla hanno mostrato di nuovo, e dove tuttavia in una serie di stupende serate dal 12 al 22 Gennaio è stato possibile scoprire una quantità di particolari non prima veduti. Non avendo dunque materiali abbastanza completi per comporre una carta colle sole osservazioni del primo periodo, ho ricorso ed un mezzo termine. Ho dato cioè una prima carta (come le analoghe degli altri anni), la quale serve d' indice per i nomi e per la configurazione generale topografica, e presenta simultaneamente tutto quello che durante questa opposizione è stato veduto, senza distinzione di tempo. A questa nè segue un' altra in cui mi sono ingegnato di descrivere il vero aspetto del pianeta quale fu nel secondo periodo, da mezzo Gennaio in avanti. E da ultimo avendo dovuto far una carta speciale dell' emisfero Nord per rappresentarvi lo stato della macchia polare e delle sue ramificazioni durante i mesi di Novembre-Dicembre 1881, ho profittato di questa circostanza per aggiungervi quello che sopra detto emisfero si è osservato durante quei due mesi. Quest' ultima rappresentazione (Tav. III) adunque dà quello che nei due mesi citati è stato veduto nell' emisfero boreale, non tutto quello che forse si sarebbe potuto vedere, se le osservazioni fossero state più complete. Una analoga rappresentazione avrei potuto aggiungere per l' emisfero australe; ma qui le lacune sarebbero state assai maggiori, e del resto nulla avrebbe aggiunto a quanto si è visto nel 1879; laddove per l' emisfero boreale la posizione più favorevole dell' asse già nel Novembre e nel Dicembre permise di fare alla carta del 1879 aggiunte e rettificazioni di qualche importanza.

445. Un' altra difficoltà si è presentata rispetto alla proiezione. Une delle principali caratteristiche del fenomeno delle geminazioni è il parallelismo, che in quasi tutte le linee duplicate si osservò; parallelismo che in nessun genere di proiezione si può mantenere in modo da non travisare l' aspetto che le geminazioni danno al pianeta. Ho sciolto la questione in un modo alquanto arbitrario, conservando cioè l'uniformità dell' intervallo anche a dispetto della proiezione; ciò che si può abbastanza giustificare dal non aversi qui per iscopo di rappresentare esattamente la *larghezza* di tali strisce, ma soltanto d' indicare il loro *corso* in modo generale. Anche nella carta indice (Tav. I) ogni canale gemino è rappresentato da due linee per lo più parallele fra loro; delle quali quella che porta inscritto il nome del canale rappresenta il tratto normale quale esisteva nel 1879 e nel 1881 ed anche nel principio del 1882, prima della geminazione; l' altra rappresenta il tratto addizionale diventato visibile in conseguenza di quel fenomeno. Nei casi in cui è dubbio quale sia il tratto normale ho scritto il nome in mezzo ai due tratti ad ugual distanza.

446. Nell' Aprile del 1882, appena terminate le osservazioni di questa opposizione, ne diedi un breve resoconto alla R. Accademia dei Lincei (1). In quell' occasione presentai altresì una carta provvisoria, destinata a spiegare in modo approssi-

(1) Pubblicato nei *Transunti* dell' Accademia, Vol. VI, serie 3ª.

mativo le cose vedute e specialmente il fenomeno delle geminazioni. Questa carta, come semplice abbozzo ch' ell' era, non credetti opportuno di pubblicare negli Atti dell'Accademia; ma alcune copie fotografiche essendone state da me distribuite, finì coll' esser riprodotta in parecchie pubblicazioni periodiche, fra le quali citerò il volume XI delle *Memorie degli Spettroscopisti Italiani*. Le parti boreali di essa comprese fra i paralleli 20° e 60° non furono disposte coll' aiuto di punti rigorosamente calcolati, ma semplicemente sbozzate alla meglio sui disegni telescopici, tenendo conto molto imperfettamente del grande scorcio in cui allora queste regioni si presentarono alla vista. Tuttociò ha avuto per effetto d' introdurre molte inesattezze; e quindi nessuno si maravigli, se troverà assai sensibili discordanze fra quell' abbozzo provvisorio e le carte definitive, che adesso si pubblicano.

447. La nomenclatura, così imperfetta com' è, fu conservata, con due sole eccezioni. Una riguarda il canale detto Nilo nelle carte del 1877 e del 1879; il quale in conseguenza di forte scorcio era stato ritenuto da principio come formante una sola linea continua (§ 159). Or si è verificato, esservi colà una serie di formazioni molto diverse, connesse l' una coll' altra, la quale dalla Gran Sirte si estende al Ceraunio per 150° di longitudine. Il conservare a tutte il medesimo nome non avrebbe servito che ad accrescer quella confusione, ad evitare la quale i nomi appunto sono stati instituiti. Pertanto nella nuova carta si è introdotto qualche diversità, pur conservando traccia riconoscibile dell' antica denominazione. A quella larga e lunga zona oscura che forma un' appendice così cospicua della Gran Sirte (la coda dello *Scorpione* di Secchi) si è dato il nome di *Nilosirte*. Il tratto più sottile compreso fra questo ed il lago Ismenio è stato chiamato *Protonilo*, e *Deuteronilo* il tratto fra il Lago Ismenio e il Lago Niliaco. Si è poi lasciato il nome di Nilo I e Nilo II ai due tratti geminati, compresi fra il Ceraunio e il Lago della Luna. Alla parte compresa fra il Lago Niliaco e il Lago della Luna, che formava nel 1882 una geminazione imperfetta, si è dato il nome di *Nilokeras* provvisoriamente; forse col tempo risulterà esser null' altro che un prolungamento del Chrysorrhoas. — L' altra modificazione consiste nell' avere per brevità ed anche per convenienza, sostituito i nomi di Titano, Lestrigone, Ciclope, Etiope, Sirenio, Gorgone, Gigante..... a quelli che prima dicevansi canale dei Titani, canale de' Lestrigoni ecc.; questa mutazione ha parecchi vantaggi e nessun danno, non essendo possibile che ne nasca alcun equivoco. — Le trasformazioni avvenute nella superficie di Marte nei primi mesi del 1882, ed anche un esame più completo delle regioni boreali hanno dimostrato, alcuni nomi delle vecchie carte esser stati applicati poco a proposito; così è certo per esempio che il Ceraunio e l' Alcionio del 1879 non sono golfi nel vero senso della parola, che il Mar Boreo non merita questo appellativo, e che il Lago della Luna è una formazione di natura ben diversa dal Lago del Sole. Ho dunque soppresso le denominazioni di Golfo e di Mare, conservando i nomi proprii isolatamente: solo pel Lago della Luna ho ritenuto il nome sempre usato fin qui. — Del resto per quanto concerne la nomenclatura tengo fermo alle dichiarazioni da me fatte nelle Memorie precedenti, §§ 48, 49, 319 e 320.

448. L' opposizione del 1881-82, col dimostrare nella superficie del pianeta variazioni rapide ed importanti, ha messo anche in evidenza la natura fragmentaria

delle osservazioni. Per avere una storia precisa ed istruttiva dei cambiamenti avvenuti sarebbe stato necessario poter fare ispezione continuata, o almeno frequente, di una stessa regione in buone circostanze d' atmosfera. Ma ad un osservatore isolato questo è affatto impossibile. Consultando infatti qualsiasi delle seguenti sezioni, si vedrà che le osservazioni di un medesimo oggetto raramente sono continuate con qualche frequenza per spazi maggiori di otto o dieci giorni; dopo di che i diarii tacciono su quell' oggetto per circa un mese, in capo al quale segue un altro periodo d' osservazione di alcuni giorni, e poi un' altra lacuna di un mese, e così di seguito. Talvolta però accade, che uno degl' intervalli adatti all' osservazione è interamente tolto dal cattivo stato dell' atmosfera, ed in questo caso le interruzioni durano due mesi o più. Così per esempio il cattivo tempo alla fine di Ottobre e di Novembre è stato causa che nessuna osservazione si è potuto fare delle regioni fra il 160° e il 200° meridiano prima degli ultimi giorni del Dicembre, e per lo stesso motivo poco si è potuto osservare nelle parti del Mare Eritreo prima del Gennaio, come sopra si è avvertito. È avvenuto anche per simil causa di passare una intiera opposizione (non questa però) senza poter osservare una data regione col grado di esattezza che si desiderava. — La ragione di questi inconvenienti sta nella durata della rotazione del pianeta, la quale ha colla durata del giorno medio solare il rapporto a un dipresso di 38 a 37: e in forza della quale un oggetto osservato una volta presso il meridiano centrale non ritorna più presso il medesimo meridiano e alla stessa ora di tempo medio, che 38 giorni dopo. Ora nel clima di Milano le buone osservazioni coi forti ingrandimenti sono limitate per lo più alle prime ore della notte, generalmente a due, tre, quattro ore dopo il tramonto del sole anche nei giorni più favorevoli. In un dato giorno pertanto non si può esaminar bene che una piccola parte del pianeta, un quarto al più; ed un dato oggetto non si può esaminare nella posizione più centrale e nei limiti delle ore di buona atmosfera, che per sei, otto, al più dieci giorni di seguito. Trascorso quest' intervallo occorre aspettare il rinnovamento del ciclo di 38 giorni per aver la probabilità o almeno la possibilità d' un altra occasione consimile. — Questa è la causa per cui tanta incertezza si troverà nelle epoche in cui sono avvenute le trasformazioni più salienti, per esempio molte delle geminazioni. Non si potrebbe evitare questo inconveniente, che col distribuire otto o dieci osservatori equabilmente sulla Terra in diverse longitudini. Del resto, anche astraendo da queste circostanze, le osservazioni dei fenomeni di Marte avranno sempre un carattere fragmentario, perchè le posizioni opportune del pianeta non durano che circa quattro mesi intorno a ciascuna opposizione, e il tempo veramente favorevole è limitato a due mesi, le osservazioni prima dell' opposizione cadendo naturalmente sempre in ore avanzate della notte e quindi in momenti d' atmosfera per lo più agitata. Per ottenere, con una serie di simili frammenti quadrimestrali o bimestrali, una immagine sufficiente delle vicende periodiche a cui va soggetto il pianeta durante un suo giro intorno al Sole occorre una serie di opposizioni distribuite equabilmente lungo tutti i punti dell' eclittica. Una tal serie non può comprendere meno di sette opposizioni, e non può durar meno di quindici anni ([1]).

([1]) Delle seguenti opere o memorie, la cui citazione potrà spesso occorrere nelle pagine seguenti, si adduce qui il titolo una volta per tutte:

## Sezione II.

### *Grande e piccolo Diaframma; Aeria.*

449. Fin dal principio di queste ricerche areografiche (§ 52) è stata notata l'importanza della linea sinuosa detta il *grande diaframma* la quale circonda tutto il pianeta, limitando verso Sud la zona equatoriale delle terre continentali. Anche verso il Nord esiste una simile linea limite, a quanto ora si può giudicare molto più perfetta e più regolare della prima, e la chiameremo il *piccolo diaframma*. Esso si stende in forma poco diversa dalla circolare intorno al 50° parallelo australe, ed è costituito da una serie continua, talora semplice, talora doppia e forse anche tripla in qualche luogo, di linee e di macchie oscure variamente intrecciate. Il piccolo diaframma è uno dei tratti più salienti della corografia di Marte; tuttavia nelle opposizioni del 1877 e del 1879 la giacitura dell'asse impedì che esso fosse riconosciuto nel suo intiero corso, e descritto nella sua vera posizione. Nel 1881-82 non fu ancora possibile di esaminare tutte le sue diramazioni e di fissarne dappertutto con esattezza la giacitura: tuttavia, se si fa eccezione della parte compresa dalla longitudine 280° alla longitudine 20° (fra l'Alcionio ed il Mare Acidalio), il suo andamento generale può dirsi bastantemente riconosciuto. Una completa descrizione del medesimo richiede ancora osservazioni fatte sotto un'obliquità più favorevole dell'asse. — La descrizione che segue procederà secondo le longitudini fra l'uno e l'altro diaframma, intercalando le regioni collaterali a misura che si verranno presentando, e terminerà colle regioni polari. Essa è divisa per sezioni con ordine intieramente parallelo a quello seguito pel 1877 e pel 1879.

450. In questa opposizione la figura del promontorio detto Corno d'Ammone, e le sue relazioni col così detto *serpentino* (§ 172 e 322), colla Japigia e colla Terra di Yao mi parvero le stesse che nel 1879. Nella stupenda serata del 26 Gennaio per la prima volta trovai una diversità d'aspetto; la punta del promontorio era attraversata obliquamente da una sottile linea oscura, la quale per tal modo veniva a separare dal continente d'Aeria la piccolissima isola triangolare, detta Faro. Il taglio era inclinato di 30° circa rispetto al parallelo. Lo rividi il 28 Gennaio, e sotto

Terby (1636-1873), *Aréographie* (Mém. Acad. de Belgique, Savants Étrang. Tome XXXIX).

Secchi (1858), Memorie dell'Osservatorio del Collegio Romano, Vol. I, n. 3.

Knobel (1873), *Notes on Mars* (Monthly Not. of the Roy. Astr. Society vol. XXXIII, p. 476).

Green (1877), *Observations of Mars at Madeira* (Mem. of the Roy. Astr. Society Vol. XLIV, p. 123).

Lohse (1877), Publicationen des Astrophys. Observat. zu Potsdam. Nr. 9.

Burton (1879-80). *Phys. Observ. of Mars* (Dublin Transact. New Series Vol. I, p. 151).

Boeddicker (1881), *Notes on the phys. appearances of the Planet Mars* (Dublin. Trans. Vol. I, p. 297).

Knobel (1884), *Observations of Mars* etc. ((Mem. Roy. Astr. Society. Vol. XLVIII, p. 275).

Boeddicker (1884), *Notes on the aspect of Mars* in 1884 (Dublin Trans. Vol. III, p. 301).

$\omega = 294°$. stimai che la sua direzione prolungata avrebbe incontrato la foce del Nepente nella Gran Sirte: e che la lunghezza dell' isoletta fosse $\frac{1}{4}$ della distanza fra il Corno d'Ammone e la foce australe dell'Astabora, ciò che importa circa 10°. L'osservazione di queste particolarità fu ripetuta ancora nei giorni 29, 30, 31 Gennaio, e 1 Febbraio; l' esistenza della troncatura fu constatata ancora il 28 Febbraio. Nel principio del Marzo questa parte fu esaminata più volte, ma non in condizioni sufficienti per un oggetto così piccolo e così difficile. Non ho potuto decidere, se l' isoletta triangolare costituisca una nuova addizione al continente d'Aeria, oppure se si tratti d' un vero taglio del promontorio primitivo, prodotto dall' apparizione di una nuova linea oscura. L' insieme delle circostanze mi ha fatto fin dal principio considerare come più probabile quest' ultima supposizione. — Nel resto il colore di Aeria fu per lo più quello splendido giallo aranciato, che si può considerare come il colore normale delle aree continentali, e non mi pare che dal 1879 siano in questo avvenute variazioni. Non rare volte però fu veduta lungo la riva destra della Gran Sirte una striscia bianca, la quale talvolta si estendeva dalla foce australe dell' Astabora fino al Corno d'Ammone sopra una larghezza di 6° ad 8° (10, 11 Novembre, 30 Gennaio); altre volte questa striscia fu veduta solo quando Aeria si trovava al lembo destro (19, 24 Novembre; 25, 26 Dicembre). Il fenomeno è stato notato già in questa località da parecchi osservatori [1]; è certamente irregolare, e forse connesso, come altri analoghi, colla posizione d' Aeria rispetto al meridiano centrale, o rispetto al circolo terminatore della fase. Su questa striscia e su altre analoghe veggasi il Capitolo III di questa Memoria.

## Sezione III.

### *Dalla Gran Sirte all'Indo.*

451. Il corso ed il carattere del Golfo Sabeo si poterono fissare in questa opposizione anche con maggiore esattezza che nelle precedenti. Dopo verificata l' esistenza e la forma delle Terre dette di Xisutro e di Japeto (vedi più sotto Sezione IX), quanto rimane di esso si riduce ad un lungo, tortuoso canale di natura forse non dissimile da quella della Nilosirte; del quale il colore estremamente oscuro è fatto ancor più sensibile, nel lato inferiore, dal contrasto delle vicine regioni di Aeria e di Edom, dove al giallo brillante talvolta è sostituita un' orlatura bianca ancor più brillante. Dall' altra parte il contrasto essendo minore, nasce, quando la visione non è distintissima, l' effetto di una sfumatura. Veramente il nome di Golfo non si adatta più che alla risvolta compresa fra le regioni di Edom e degli Incensi, e ai due corni in cui essa termina. Il 14 Dicembre ho confermato che il primo corno è di pochissimo più lungo del secondo (§ 325). Il 26 Gennaio si è notato che essi corni erano più oscuri e meglio terminati dalla parte esterna, mentre la lingua in mezzo (cioè

[1] Green 1877 10 e 15 Settembre; Boeddicker 1884 Aprile 1; Knobel 1884 Febbraio 17; ed altri ancora.

il vertice d'Aryn) pareva sfumato, di contorno ottuso e rotondeggiante; inoltre i due corni non sembravano intieramente paralleli nei lati esteriori, ma questi convergevano un poco verso il Nord.

452. La grande area, che dal Golfo Sabeo si stende verso il Nord fino al Protonilo e al Deuteronilo, è stata, come sempre, una delle più brillanti ed uniformi in tutto il pianeta. Nelle prime osservazioni che di essa si fecero (9-14 Novembre) non si trovò alcuna molto notabile differenza rispetto a quanto s'era visto nel 1879, i medesimi canali vi figuravano, sebbene non tutti egualmente distinti; e l' unica differenza importante fu nella comparsa del Lago Ismenio, che cominciò a vedersi come macchia molto saliente il 12 Novembre nel punto dove l' Eufrate interseca i corsi del Protonilo e del Deuteronilo. Nel secondo periodo delle osservazioni (14-29 Dicembre) parve che un velo di natura sconosciuta si ritirasse dalle parti inferiori di tutta questa regione; il Protonilo, che prima aveva l' aspetto di striscia unica, si vide separato in due corsi paralleli; comparve pure un secondo Lago Ismenio uguale e parallelo al primo; da ultimo (28-29 Dicembre) si potè tracciare tutto l'Astabora (comechè molto attenuato da quello del 1876) dall' Ismenio alla Gran Sirte. Negli ultimi giorni di Dicembre erano in preparazione altre mutazioni, poichè sotto il 28 Dicembre il diario nota « vi sono in Aeria altri particolari impossibili a decifrare » e sotto il 29 « vi sono fra Gehon ed Eufrate e Phisou altre cose che non riesco a decifrare ». Il significato di queste frasi diventò chiaro nel terzo periodo delle osservazioni (17 Gennaio-4 Febbraio), in cui successivamente l' Oronte, l' Eufrate, il Phison, il Tifonio apparvero *geminati* cioè accompagnati da un' altra linea parallela al loro corso originario, senza che questo (per quanto si è potuto vedere) in nulla mutasse il suo luogo primitivo. In questo tempo fu visto in Aeria per la prima volta il Canale Anubi; ricomparve pure l' Hiddekel, non veduto nel 1879, e si trovò che l' Oxo prolungava il suo corso al di là del Gehon fino ad incontrare il Deuteronilo presso il Lago Ismenio. — Nel quarto periodo (23 Febbraio-10 Marzo) essendo il pianeta già distante, nessuna novità si vide, fuori che la geminazione (o ciò che si può chiamar tale) del Gehon, confermandosi in generale (e per quanto le circostanze lo permettevano) le cose vedute anteriormente.

453. La regione qui considerata non si è potuta esplorare al di là del doppio tratto oscuro compreso fra la Nilosirte e il Mare Acidalio; del qual tratto la parte orientale è formata dal gemino Protonilo, la media dal doppio Lago Ismenio, l' occidentale dal Deuteronilo e dal Giordano. Tuttociò nei giorni 9-12 Novembre era rappresentato da un' ombra forte in forma di striscia grossa e visibile, ma indeterminata e confusa; in Dicembre la divisione era già fatta, e fu verificata pel Deuteronilo e pel Giordano il 14, pel Protonilo il 19, e pel Lago Ismenio il 23 Dicembre. Non vi ha dubbio, che almeno pel Protonilo s' abbia a veder qui un caso speciale di geminazione, ed anche probabilmente il primo in ordine di tempo fra tutti i casi analoghi assai numerosi che si verificarono durante la presente opposizione. Diverso è il caso del Deuteronilo e del Giordano. Se geminazione qui esiste, deve considerarsi come imperfetta; perchè i due corsi divergono l' uno dall' altro in modo troppo sensibile, l' intervallo essendo molto maggiore dalla parte del Lago Niliaco. I due corsi del Protonilo non furono sempre ugualmente visibili; l' inferiore, che il 23 Dicembre era figurato

da una bella linea sottile, il 28 Gennaio era più largo del superiore. E del Giordano si dice il 18 Gennaio che era sottile, ma più visibile del Deuteronilo; mentre addì 21 Gennaio è qualificato come assai grosso, anzi come tale fu designato ancora il 4 Aprile, laddove del Deuteronilo si dice soltanto che in quel giorno era ancor visibile. I due tratti del Protonilo avevano i loro capi separati, ad oriente nella Nilosirte e nella Boreosirte, ad occidente nei due Laghi Ismenii; ambidue furono veduti talvolta più sottili nel mezzo che alle due estremità, specialmente quando in traverso di essi si collocava una delle striscie bianche dipendenti dalle nevi boreali, come sarà descritto più innanzi. Il Giordano univa il Lago Ismenio boreale col Mare Acidalio, mentre il Deuteronilo divergendo dal suo compagno andava a metter capo nel Lago Niliaco. Questa sua foce in Novembre e Dicembre mi parve sempre unita a quella del Gehon, e così ancora nei giorni 17-18-19 Gennaio; invece addì 21 Gennaio mi è sembrato che il Deuteronilo traversasse il Gehon, e che la sua foce nel Lago Niliaco fra mezzo a quelle del Gehon e dell' Indo. Secondo la prima interpretazione è figurata questa parte nella Tavola III; la seconda è introdotta nelle Tavole I e II dietro lo schizzo fattone il 21 Gennaio.

454. Il Lago Ismenio formava una macchia confusa, ma oscura e molto cospicua nei giorni 12-13-14 Novembre; nulla ho sospettato allora di una bipartizione. Il 19 Dicembre lo rividi, ma non in buone condizioni; la sua divisione in due laghi uguali per mezzo di un sottile diaframma chiaro non fu notata che il 23 consecutivo. Il 28-29 Dicembre ambidue si erano molto allungati nel senso del parallelo, formando due rigonfiamenti oscuri delle due linee che li traversano per lo lungo. Il 29 arrivavano fino a poca distanza dalla Nilosirte. Secondo un disegno preso il 22 Gennaio erano allora simili a due ovali allungate, quali si vedono nelle nostre carte, e si estendevano almeno 15° in longitudine. Tale pure fu la lunghezza stimata il 29 Gennaio, nel qual giorno, come nel 29 di Dicembre, si trovò la loro estremità orientale esser a poca distanza dalla Nilosirte. L' ultima volta furono osservati il 4 Aprile ed erano ancor divisi. — Al Lago Ismenio considerato nel suo insieme appartiene certamente l' osservazione del 27 Ottobre 1879 fatta in grande prossimità del lembo, e citata sul fine del § 331. Ambidue pure uniti in una sola macchia si vedono delineati da Boeddicker collo specchio di 3 piedi di Lord Rosse, nel disegno del 21 Dicembre 1881; dove pure si scorgono il Deuteronilo ed il Giordano. L'Ismenio, sempre unito, sembra formare ciò che è chiamato *Lassell Sea* nella carta di Green [1].

455. L' Oronte fu sempre uno dei canali più visibili di questa regione, specialmente in principio; l' 11 Novembre è dichiarato evidentissimo, anzi il 14 Novembre fu trovato più evidente che l' Eufrate ed il Phison, cosa non mai notata altre volte. Contemporaneamente fu pure veduto il Tifonio sul prolungamento dell' Oronte, ma separato da quello, come si vede nella carta del 1879. Il 12 Novembre mi studiai invano di tracciare una linea che connettesse i due tratti attraverso all' Eufrate ed al Phison. Dal 19 al 28 Dicembre, restando l' Oronte sempre cospicuo, il Tifonio fu più volte invisibile. Il 18 Gennaio comparve la geminazione dell' Oronte, cioè una

[1] *Mem. of the Roy. Astr. Society*, Vol. XLIV, p. 138.

linea trasversale (Oronte II), che dal fondo del primo corno del Golfo Sabeo andava all' Eufrate nella direzione del parallelo. Subito dopo questa osservazione si nota nel diario: « Pare che esistano anche altre relazioni, ma l' aria è soltanto di seconda qualità, e non si può esserne sicuri ». Da quel giorno in poi la duplicità dell'Oronte si mantenne, e fu riconosciuta ancora il 28 Febbraio, sebbene non senza difficoltà, essendo il diametro del pianeta ridotto a 9″,3. La gominazione del Tifonio non fu nè così costante, nè così facile a riconoscere. Il 21 Gennaio il Tifonio era invisibile; comparve invece il suo compagno sul prolungamento dell' Oronte II, e formante con esso una linea unica parallela al Golfo Sabeo, estesa d' un tratto dal primo corno Sabeo, alla Gran Sirte. Anche addì 22 Gennaio si vide il Tifonio II e non il I; e sta notato, che Tifonio II non era sul prolungamento dell' Oronte I, ma su quello dell' Oronte II, col quale si congiungeva attraverso al Phison ed all' Eufrate. Finalmente il 26 Gennaio ricomparve qualche traccia del Tifonio I, che fu confermata meglio il 28, 29, 30 Gennaio, e il 3 Febbraio. Ma rimase sempre meno visibile del II. Le bocche dei due Tifonii nella Gran Sirte erano contrassegnate da due piccole indentazioni, già viste il 21 Gennaio, che poi parvero riunirsi il 28 Gennaio in un solo arretramento della spiaggia d'Aeria, esteso dall' una all' altra foce, e comprendente anche quella dell' Anubi, come la carta dimostra. — Nel Tifonio abbiamo esempio di una geminazione, di cui le linee corrispondenti non furono vedute sempre simultaneamente, essendo comparsa prima l' una, poi l' altra, poi ambedue insieme. Queste vicende dei due Tifonii, le quali non si verificarono in egual modo pei due Oronti mostrano che l' una coppia è in qualche modo indipendente dall' altra, benchè per altra parte una connessione fra le medesime sia manifesta. E per questo ho creduto opportuno di considerarle come cose distinte.

456. L' Eufrate e il Phison furono sempre veduti fin dal principio delle osservazioni, e nulla parvero fin allora indicare di nuovo che nel 1879 non si fosse già osservato. Nel giorno 26 Dicembre si trova notato del Phison, e nel giorno 28 Dicembre dell' Eufrate e del Phison, che erano benissimo visibili, estremamente sottili, e perfettamente uniformi. Ritornata in vista questa regione il 18 Gennaio, nulla mostrarono fuori dell' usato. — Ma il 19 Gennaio l' Eufrate apparve straordinariamente ingrossato e un po' sfumato sul lato sinistro; anche ingrossato, ma non tanto, il Phison. Il 20 Gennaio, osservazioni impedite da nebbia. Il 21 Gennaio Eufrate e Phison erano ambidue geminati nel modo più perfetto e più manifesto, quali dappoi furono sempre veduti. Accanto agli antichi corsi del 1879, che denomineremo Eufrate I e Phison I, ne comparvero due nuovi, Eufrate II e Phison II. Il Phison II, collocato a ponente del I, cominciava con esso dalla Nilosirte; non giungeva però sino al Golfo Sabeo, ma si arrestava all' incontro con Eufrate I. Viceversa Eufrate II accompagnando il I a levante, partiva con esso dal Lago Ismenio più australe, ma non giungeva neppur esso al Golfo Sabeo, e si arrestava all' incontro con Phison I. Questa disposizione rimase sempre invariata, di che mi sono assicurato con frequenti ispezioni. Dopo la narrata trasformazione i quattro tratti si mostrarono assolutamente uguali di larghezza e di densità uniforme in tutta la lunghezza (per quanto si poteva giudicare in cose così minute) e di corso in apparenza geometricamente regolare, quali sogliono essere le linee descritte colla riga e col compasso; nessuna minuta

prominenza nè ondulazione nei profili. Il colore non era quello consueto dei così detti mari; ma una specie di bruno rosseggiante. I due tratti del Phison erano, a giudizio d'occhio, perfettamente equidistanti; invece per quelli dell'Eufrate si notò subito che convergevano alquanto verso le parti boreali. Non furono fatte misure nè stime fuori di quelle che risultano dagli schizzi presi in quel tempo. Ma dalle relazioni di queste linee colle località circostanti emerge nel modo più manifesto, che il primitivo corso anteriore alla geminazione si è conservato esattamente nelle linee che chiamiamo Eufrate I e Phison I; son quelle inscritte sulla carta coi nomi di Eufrate e di Phison, secondo la regola stabilita nel § 445. La geminazione adunque (in questi ed in molti altri casi come si vedrà) consiste propriamente nella pura e semplice addizione operatasi delle linee Eufrate II e Phison II, delle quali prima non s'era visto alcun indizio. Infine è da notare per l'Eufrate, che la grossa linea unica veduta il 19 anteriormente alla geminazione era sulla traccia di Eufrate I, e molto più intensa ed anche più larga, che non le due linee vedute il 21. E i due punti d'uscita dal Lago Ismenio mi sono sembrati sempre collocati simmetricamente rispetto ai due termini Est ed Ovest del medesimo Lago.

457. La palude Sirbonide, che nel 1877 era apparsa nel mezzo d'Aeria come un'ombra pallida e confusa, nel 1879 come una piccola macchia segnante la confluenza del Phison I e del Tifonio I (§ 321), in Novembre e Dicembre 1881 era completamente sparita. o piuttosto aveva conservato solo il significato geometrico del punto di riunione di due linee, senza che fosse contrassegnato da alcuna formazione speciale. In conseguenza delle geminazioni dell'Eufrate, del Phison, e del Tifonio-Oronte si trovò formata in quel luogo una piccola rete poligonale, originata dal concorso di tre doppie linee. Io mi sono ingegnato con ogni studio di descrivere le combinazioni che nascono da questo intreccio, ma non sono giunto a risultati intieramente soddisfacenti. Il 21 Gennaio mi parve più probabile la combinazione secondo la quale Phison II termina al concorso di Oronte I con Eufrate I ed Eufrate II al concorso di Phison I con Tifonio I. Il 22 Gennaio invece ho interpretato la cosa in modo alquanto diverso, come sta rappresentato nelle Tavole I e II, facendo arrivare Phison II al concorso di Eufrate I con Oronte II ed Eufrate II al concorso di Phison I con Tifonio II. Finalmente la combinazione ottenuta il 28 Gennaio, è quella indicata nella fotografia accennata al § 446, dove Phison II è diretto al concorso di Eufrate I con Oronte II; ed Eufrate II al concorso di Phison I con Tifonio I. Ma per quanto abbia aguzzato la vista, su questo punto non son potuto arrivare ad esser contento; cosa non strana, trattandosi di un viluppo di sei linee intersecantisi due a due in uno spazio di meno che 1″ di diametro. Sarebbe anche possibile, che le intersezioni delle 6 linee fossero tutte binarie, e che non vi avesse alcuna intersezione tripla; di ciò tuttavia non ebbi mai sospetto durante le osservazioni. Il 31 Gennaio in aria cattiva tutto questo insieme si manifestava sotto l'apparenza di una leggerissima ombra rotondeggiante nel mezzo della piazza luminosa formata da Aeria, Arabia, Eden, Edom.

458. Il Gehon si presentò alla vista con sufficiente facilità, conservando il suo aspetto del 1879 fino al 29 Gennaio, nel qual giorno parve sfumato, e si mostrava come sta delineato nella Tavola II. Il 30 Gennaio parve sfumato e largo; l'aria

essendo cattiva, non si potè giudicare se fosse semplice o doppio, e nello stesso dubbio rimasi il 23, 24 e 27 Febbraio. Sotto il 28 Febbraio trovo scritto: « Gehon assai grosso; è molto più scuro di Phison, Eufrate, Oronte, Hiddekel, quasi uguaglia l'Indo! impossibile dubitare della sua duplicità ». Devo notare che nel medesimo tempo, il disco essendo ridotto a 9″ 3 di diametro, con grande fatica si riusciva a convincersi della duplicità, altre volte così evidente, dell' Eufrate e del Phison; e si nota espressamente, che soltanto nei buoni momenti riusciva di sdoppiare i due corni del Golfo Sabeo. Circa la bocca del Gehon nel Lago Niliaco, vedi sopra § 453. Ancora debbo aggiungere, che in conseguenza della obliqua prospettiva sotto cui il Gehon si presentava nel 1879, nelle carte di questo anno la sua inflessione è alquanto inesattamente delineata. Il corso del Gehon non fa quella specie d' angolo, ma è invece elegantemente curvato a foggia d' arco quasi circolare e concentrico all' altro arco più piccolo formato dall' Indo. — Il Gehon fu visibile fino al 6 di Aprile.

459. Dell' Oxo nel 1879 non si era veduto che il tratto compreso fra l' Indo e il Gehon. In questa opposizione fu sempre riconoscibile fin dal principio di Novembre; il 18 Gennaio si accertò che esso non si arrestava al Gehon, ma curvandosi in arco arrivava fin all' Ismenio. Si potrebbe anzi ammettere che l' Oxo, e non il Deuteronilo, sia il vero prolungamento del Protonilo; nel qual caso potrebbe considerarsi l' Oxo come un gran canale esteso direttamente fra la Nilosirte e il Golfo delle Perle. Fu veduto l' ultima volta il 24 di Febbraio, nè mai ebbi sospetto che fosse doppio. Quanto risultava nel 1879 (§ 332), che il punto dove l'Oxo arriva al Gehon sia pochissimo diverso da quello in cui il Gehon si unisce col Nilo, non è stato confermato dalle osservazioni attuali, fatte in condizioni assai più vantaggiose; l' Oxo tende quasi diritto al Lago Ismenio, e la intersezione del Gehon col Deuteronilo ne è alquanto lontana. — L' Hiddekel, ricercato per lungo tempo senza soddisfacente risultato tanto nel 1879, quanto in Novembre e Dicembre 1881, fu riconosciuto soltanto addì 21 del consecutivo Gennaio; il 29 Gennaio era evidente, benchè sottile. Fu veduto poi varie volte, e ancora sotto il 6 Aprile sta scritto nel diario, che si vedeva meglio del Gehon; il che proverebbe essersi desso molto accresciuto, se pure non vi è stato equivoco sul nome da parte dell' osservatore. In quel giorno il diametro del disco era ridotto a 6″,2. — L'Astabora, di cui nel 1879 si era potuto osservare bene soltanto la metà ad oriente di Coloe, fu osservato tutto il 28 Dicembre, e veduto poscia ancora più volte in Gennaio e ultimamente il 3 Febbraio sotto forma di una lunga linea di straordinaria sottigliezza, che dall' Ismenio australe in direzione press' a poco parallela al Tifonio mette capo alla Gran Sirte o nel punto stesso dove vi entra l' Astusape, o un poco più al Sud a pochissima distanza. Il punto d' uscita dall' Ismenio coincideva con quello di Eufrate II o ne era poco lontano verso levante (22 Gennaio). Nei giorni 28 Dicembre, 22 e 28 Gennaio mi è sembrato di vedere una piccola macchia scura nel punto dove l'Astabora tagliava Phison I; tal macchia è quanto rimaneva nel 1881-82 della palude Coloe, che tanto era cospicua nel 1879 malgrado l' obliquità grande della linea visuale. Anche quella parte del Phison I, che nel 1881-82 rappresentava la congiunzione di Coloe colla parte inferiore dell' Astusape e della Nilosirte, era nel 1879 assai più grossa e più nera. Vedi del resto più sotto la sezione XXIII di questo Capitolo (§ 538), dove si parlerà pure dell'Astusape. —

Ultimo fra i canali di questa regione comparve addì 22 Gennaio l'Anubi, il più difficile e il più sottile di tutti. Esso è perfettamente dritto, e fa col meridiano un piccolissimo angolo. La sua foce australe ha comune col Tifonio I nella Gran Sirte, e nello stesso piccolo golfo. L'altra estremità dell'Anubi non ho potuto stabilire con intiera sicurezza, parendomi dapprincipio (22 e 26 Gennaio) che andasse a raggiungere la congiunzione dell'Astusape col Phison, un poco a destra della punta inferiore di Meroe; mentre altra volta (28 Gennaio) credetti vederlo terminare nell'intersezione di Astabora con Phison I, cioè nel punto a cui abbiam conservato il nome di Coloe. Non ardisco decidere quale delle due supposizioni sia la più accettabile. L'Anubi fu veduto l'ultima volta il 4 Febbraio a più di 30° dal meridiano centrale ($\omega$=267°).

460. Fatta eccezione per la stretta area compresa fra l'Indo e il Gehon (Thymiamata), nella quale il 24 e il 27 Febbraio si notò una palese oscurazione della tinta gialla normale, il general colore giallo-aranciato di questa regione non è stato modificato in altro modo, che dalle apparizioni del fenomeno, non raro in Marte, di veli bianchi o biancastri, i quali però sempre si limitarono a regioni piuttosto ristrette. Notabilissime furono due zone bianche oblique, connesse, a quanto sembra, col bianco polare, di corso regolare e di larghezza uniforme, che a più riprese comparvero attraverso a tutta la regione. L'una intersecando le due linee del Protonilo andava a terminare nella regione di Edom; mentre l'altra passando sul Giordano e sul Deuteronilo finiva presso la foce del Gehon e il secondo corno del Golfo Sabeo. Talvolta il loro splendore pareva diminuire la nerezza o la larghezza dei canali da loro intersecati; ma obliterarli affatto, non mai. Trattandosi di un fenomeno di natura generale e che si ripete anche in altre regioni, ne riservo la descrizione ad altro luogo; vedi il capitolo seguente. Di natura più locale sembra la striscia bianca, che già da più osservatori (1) fu notata lungo il Golfo Sabeo in Aeria e in Edom, e che ricordo d'aver veduto anch'io più d'una volta (10 e 19 Novembre). Il 21 Gennaio il diario ha l'annotazione. « Aeria fino al Phison più gialla e più lucida ». Un'invasione generale di macchie bianche ebbe luogo il 31 Gennaio; « vi è del bianco intorno al capo inferiore della Nilosirte; ve n'è fra Phison II ed Eufrate II al loro concorso, ve n'è in Edom e in Thymiamata presso l'orlo. Si può dire che è una chiazzatura irregolare di tutte le parti gialle ».

## Sezione IV.

### *Fra l'Indo e il Gange; Chryse, Lago Niliaco e Mare Acidalio.*

461. Di tutti i così detti canali di Marte l'Indo è stato in questa opposizione il più distinto e il più visibile, quando si faccia eccezione per la Nilosirte, che non può esser con alcun altro paragonata. La sua lunghezza era circa la metà di quella

(1) Vedi Terby, *Aréographie*, § 2 dell'Appendice; Lohse 1877 10 Ottobre, e 1879 24 Ottobre; Green 1877 1, 8 e 10 Settembre; ed altri ancora. Non credo più ammissibile l'opinione a cui si allude nel § 331, che tale orlatura luminosa possa essere un semplice effetto ottico di contrasto colla nerezza del Golfo Sabeo.

della Nilosirte, perfettamente regolari i profili dei lati, ed uniforme la larghezza dappertutto. Specialmente in Gennaio era largo, bello, scuro ed uguale, e fu veduto sempre quando arrivava in vista quella parte del pianeta, anche sotto considerabile obliquità. A cagione del confuso e sfumato contorno superiore del Lago Niliaco, non si potè mai stabilire con precisione il luogo della sua foce inferiore. La sua curvatura era maggiore nel mezzo, che alle estremità; cosicchè rassomigliava ad un arco d'iperbole. Così pure era stato veduto nel 1879, siccome attestano i disegni del 28 Novembre e del 26 Dicembre di quell'anno (vedi Tavola V della Memoria precedente); e l'averlo descritto allora come una linea spezzata ad angolo (§ 332) è stato un errore dovuto allo scorcio forte di prospettiva, sotto cui l'Indo si vedeva in quel tempo. In conseguenza pure alquanto inesatto riuscì il tracciamento dell'Oxo, il quale (come si vede nel primo dei citati disegni del 1879, e com'è stato confermato dalle osservazioni del 1881-82) non si attacca ad una spezzatura dell'Indo, ma accenna direttamente al Golfo delle Perle, nel quale ha coll'Indo l'ampia foce comune. — L'Idaspe, benchè notevolmente minore dell'Indo, fu pure distinto in ogni tempo: soltanto in Aprile era difficile separarlo dall'Indo a cagione della piccolezza del disco. La separazione però ancora era manifesta il 23 e il 24 Febbraio, avendo il disco $9''{,}6$ di diametro apparente. Sempre ha fatto l'impressione di esser alquanto curvo, e che voltasse la convessità in senso contrario a quella dell'Indo. Nè sull'Indo, nè sull'Idaspe ho mai potuto formare il minimo sospetto di geminazione.

462. La Jamuna in Novembre non fu vista che con difficoltà, meno difficile era in Dicembre. Il 12 Gennaio per la prima volta trovo scritto ch'era ben visibile; correva dritta e veniva a perdersi nell'ombra confusa del Lago Niliaco. Il 17 Gennaio pareva uguale in grossezza all'Idaspe. Il 18 il tronco inferiore di essa, compreso fra il Lago Niliaco e l'Idraote era più visibile, più largo e più nero che il tronco superiore compreso fra l'Idraote e il Golfo dell'Aurora. In quello stesso giorno presso la foce inferiore i contorni del Lago Niliaco si mostrarono meglio definiti di prima, e si distingueva il profilo del piccolo golfo formato da quella foce, come è nella carta del 1879. Il 19 Gennaio trovai la Jamuna accresciuta di molto, e da principio scrissi, che il suo tronco inferiore era visibile quanto l'Indo. Un esame più minuto però mi fece riconoscere, che questo tronco inferiore constava di due linee esattamente dritte e parallele fra loro, ciascuna di esse assai minore dell'Indo: delle quali quella a destra (Jamuna I) era identica alla linea fino allora veduta e considerata come semplice, e si prolungava uniforme dal Lago Niliaco fino al Golfo dell'Aurora; l'altra, uguale in intensità alla prima dal Lago Niliaco fino all'Idraote, aveva un debolissimo prolungamento dall'Idraote al Golfo dell'Aurora. Il 20 Gennaio furono confermate le stesse cose, verificato l'esatto parallelismo delle due linee; riconosciuto che non erano terminate con precisione, ma l'una e l'altra alquanto sfumate lateralmente, benchè molto scure sull'asse. Essendo $\omega = 42°{,}8$ e l'intersezione coll'Idraote poco lontana dal centro del disco, fu giudicato che l'Idraote e le due Jamune fossero quasi perpendicolari fra loro; l'angolo della Jamuna col meridiano fu trovato essere di $20°{,}8$ mentre passavano al meridiano centrale i punti, per cui $\omega = 45°{,}4$. Dallo schizzo fatto in quel momento l'intervallo fra le due Jamune si può stimare fosse $7°$ di gran circolo. La Jamuna fu veduta bene ancora

nei giorni 22, 23, 24 Febbraio; si presentava come una striscia piuttosto larga, che però fosse doppia, si poteva inferirlo dal suo aspetto, ma non vederlo; il diametro del disco era ridotto a 9″,7. Il 24 Febbraio la sua foce nel Lago Niliaco formava un golfo assai nero e prominente verso l'alto. Posteriormente fu vista ancora fino al 4 Aprile, ma dell'esser semplice o doppia non fu più possibile giudicare.

463. L'Idraote, di cui l'esistenza stessa era finora sconosciuta, apparve subitamente in mezzo al disco il 13 Gennaio, come sottile ma visibile prolungamento del Nilo II e del lato superiore del trapezio formato intorno all'isola Sacra (§ 337); terminava a sinistra sul Golfo delle Perle, vicino alla bocca dell'Idaspe. Era più sottile dell'Idaspe, e appena comparabile alla Jamuna, allora non ancor geminata. Il 17 Febbraio fu visto anche meglio, e si notò, che prolungato idealmente a traverso il Golfo delle Perle, accennava al canale che separa dal continente la Terra di Deucalione ($\omega = 33°$). Il 18 Gennaio era « dritto come un filo teso » ; il 19 Gennaio è detto « visibilissimo ». Il 20 Gennaio fu trovato evidente; misurato il suo angolo col meridiano centrale sotto $\omega = 44°,2$, quando passava a piccola distanza dal centro del disco, risultò di 104°,5 da Sud verso Ovest. Ritornata questa parte in vista il 22 Febbraio, ricomparve l'Idraote, ma non più uniforme; la sezione di esso a destra della Jamuna I parve più larga del resto, e così il 23, salvo che in questo giorno un momento d'atmosfera favorevole fece intendere, che ciò proveniva dall'essere anche l'Idraote doppio nel tratto compreso fra la Jamuna I e il Lago della Luna, semplice fra la Jamuna I e il Golfo delle Perle. Questa cosa fu confermata il 24 Febbraio; nel qual giorno pure si constatò, che i due tratti della porzione geminata dell'Idraote corrispondevano esattamente ai due tratti superiore ed inferiore del quadrilatero intorno all'isola Sacra, e prolungati a destra fino al Ceraunio formavano la geminazione (già conosciuta nel 1879 ed ora riveduta) dei Nili I e II. Nel medesimo giorno, benchè il diametro di Marte fosse ridotto a 9″,6, riuscì di misurare presso il centro del disco l'angolo che l'Idraote faceva col meridiano centrale (sotto $\omega = 47°,6$) e fu trovato 107°,1. Il 31 Marzo e il 2 Aprile vidi distintamente ancora la parte dell'Idraote compresa fra la Jamuna ed il Lago della Luna, senza che però si potesse riconoscerne la duplicità. L'altra parte era diventata invisibile.

464. Nelle osservazioni del 1879, ed anche nelle prime del 1881 io aveva sempre considerato il Lago Niliaco come una macchia nera unica, estesa dai confini di Chryse fino a latitudini boreali molto elevate. Il 14 Dicembre vidi ciò non esser vero; quel Lago Niliaco, di cui finora si è parlato, e da cui si diramano il Deuteronilo, l'Indo, l'Idaspe, le due Jamune, il Dardano ed i due rami del Nilokeras, è un'ombra per lo più non molto nera, e non molto grande, alla cui separazione dalla grande e nera macchia sottoposta (Mare Acidalio) non aveva posto mente prima. Questa separazione è infatti un oggetto abbastanza difficile, e consiste in un istmo o striscia gialla diretta press'a poco secondo il parallelo, lunga circa 20° e larga forse 3° od anche meno; ad essa ho dato il nome di *Ponte d'Achille*. La larghezza di essa, per quanto è stato possibile giudicare, sembra uniforme; fattone un esame minuto in ottima aria il 20 Gennaio, non ho potuto riconoscervi alcuna soluzione di continuità. Lungo il Ponte d'Achille il Lago Niliaco è perfettamente terminato, ma nel resto del suo contorno, che pure nel 1879 pareva abbastanza nero e ben definito,

non si potè riconoscere questa volta alcun confine o delimitazione precisa; e per le foci dei varii canali in esso concorrenti non si poteva determinare la posizione esatta. Soltanto sotto il 18 Gennaio trovo nel diario l'annotazione, che il Lago Niliaco pareva quel giorno un po' meglio terminato del solito, essendo anche riconoscibile il golfo formato dalla foce boreale della Jamuna (§ 462). E durante tutto l'intervallo delle osservazioni, dopo che fu constatata la sua divisione dal Mare Acidalio, si trovò che il colore del Lago Niliaco, ben lontano dall'esser così nero, come parve nel 1879, tendeva piuttosto ad un bruno giallognolo, come di sepia. Il 21 Gennaio però l'aspetto ne era alquanto diverso dal solito; apparvero in esso due macchie più scure, corrispondenti alle due Jamune idealmente prolungate, e nel mezzo vi era un intervallo più chiaro, come se ciascuna delle due Jamune avesse voluto formarsi un lago a sè; il tutto come sta figurato nella Tavola II.

465. La grande obliquità di prospettiva, secondo cui nel 1881-82 si mostrava il Mare Acidalio, non permise di riconoscerne con precisione soddisfacente la vera forma ed i confini boreali; soltanto ho potuto comprendere, che esso è molto maggiore in area del Lago Niliaco, del quale apparve altresì sempre più scuro e meglio terminato. Senza dubbio è questa una delle aree più nere che vi siano in Marte; e questo carattere si mantenne sempre sino alla fine delle osservazioni (6 Aprile). Tre volte (20, 21 Gennaio e 24 Febbraio) comparve dentro di questa oscurità un punto luminoso giallo, un po' allungato nel senso del meridiano, che brillava come una stella su quel nerissimo fondo. Era poco distante dal Ponte d'Achille, e un po' più presso alla riva orientale del Mare Acidalio, che all'occidentale. Sulla carta l'isoletta è designata col nome di Scheria. Il 21 Gennaio essa era proprio allineata sulla linea mediana fra le due Jamune ($\omega = 12°$), e sul mezzo fra le due macchie oscure vedute nel Lago Niliaco in quel medesimo giorno (§ 464): ciò che dava a tutto l'insieme un aspetto abbastanza singolare.

466. Fu ancora la grande obliquità della vista quella che nel 1879 m'impedì di riconoscere la vera direzione del Nilokeras, braccio che riunisce il Lago Niliaco al Lago della Luna; esso non è già diretto, come aveva creduto, quasi secondo il parallelo, ma anzi fa col medesimo parallelo un angolo molto grande, tanto, che in certe configurazioni appare come un prolungamento del Chrysorrhoas. Questo Nilokeras era sfumato e mediocremente visibile in Novembre, sfumato, larghissimo e poco visibile il 9 e il 14 Dicembre. Ancora il 10 Gennaio la comunicazione fra il Lago Niliaco e il Lago della Luna formava un'ombra indistinta, e tanto era dilatata, che parevano addirittura i due laghi volersi confondere l'uno nell'altro. Addì 11 Gennaio trovo scritto: « Il Chrysorrhoas pare si prolunghi direttameute sino al Lago Niliaco, la striscia è larga e oscura, ieri non era così. Questo nuovo prolungamento è poco meno che parallelo all'ombra veduta fin qui fra il Lago Niliaco e quello della Luna. In questo effetto però entra anche la prospettiva ($\omega = 74°,5$). Il prolungamento del Chrysorrhoas va poi ancora al di là del Mare Acidalio, seguendo sempre lo stesso circolo massimo, verso regioni ignote. Posizione del punto dove incontra il lembo 122°,9 (essendo $\omega = 77°,0$). Nel medesimo momento il Chrysorrhoas passa per il centro e mostrasi esattamente dritto su tutto il suo corso ». Le stesse cose precisamente furono vedute il 12 Gennaio. Abbiamo qui dunque un caso di geminazione

imperfetta, risultante da un' ombra leggera piuttosto confusa (Nilokeras I) e da un forte braccio oscuro (Nilokeras II). Di quest' ultimo fu vista più volte l' intersezione col Dardano, formante una piccola macchia o punto oscuro, che fu specialmente visibile il 13 Gennaio ed è segnato sulla carta. Nello stesso giorno 13 credetti qualche volta di veder prolungarsi in giù il Nilokeras II, e arrivare al Mare Acidalio, tagliando il Ponte d'Achille; ma questo non risulta da osservazioni antecedenti, e non è stato confermato nelle seguenti. Col 18 Gennaio le note del diario cominciano a tacere del Nilokeras I, mentre il II era ben definito, grosso, dritto, e continuò ad esser visibile sino alla fine delle osservazioni. Il 21 Gennaio era assai oscuro, benchè non largo; il 18, 19, 20 Febbraio, nero e grosso; il 23 Febbraio, più scuro della Jamuna; il 29 Marzo, molto scuro; e fu visto ancora il 2 Aprile. — Quanto all' apparente prolungamento del Chrysorrhoas-Nilokeras, che il giorno 11 Gennaio dicemmo continuarsi fino al lembo di Marte dall' altra parte del Mare Acidalio, esiste veramente, come si potè poi meglio constatare nell' opposizione del 1884, ed è quello segnato sulla carta col nome di Callirroe: un indizio di esso già s' era avuto il 18 Ottobre 1879 (§ 336). Il trovarsi questo press' a poco sopra il medesimo circolo massimo formato dal Chrysorrhoas e dal Nilokeras, può esser del resto una cosa affatto accidentale.

467. L' indizio, che già alcune incerte osservazioni del 1877 e del 1879 avevano dato (§ 336) di una comunicazione in alte latitudini boreali fu la grande macchia sotto Chryse e il Golfo Ceraunio, è stato confermato nel 1881-82. Anche qui abbiamo due canali gemelli, il Tanai e lo Jaxarte, i quali come unica striscia furono veduti fin dal principio delle osservazioni con qualche fatica (3 e 4 Novembre); meglio, ma ancora in apparenza riuniti, sotto forma di unico tratto nero, grosso e ben distinto il 9 e 14 Dicembre, e il 10 ed 11 di Gennaio. Il 12 Gennaio si cominciò a riconoscere qualche traccia della loro separazione nella parte più vicina al Mare Acidalio; la congettura fatta il 21 Gennaio, che questa separazione continui almeno fino al Ceraunio fu poi confermata nelle posteriori opposizioni. Per questa volta, il Jaxarte essendo troppo vicino al lembo, non si potè veder bene che il Tanai, il quale sino alla fine si mostrò sempre nerissimo e larghissimo: tanto che la sua importanza nella topografia di Marte non dovrà stimarsi inferiore a quella del Mare Cronio nell' altro emisfero. Il Tanai però (come anche il Jaxarte, col quale in Febbraio e Marzo andò sempre confuso in apparenza) non segue esattamente il parallelo, ma verso occidente si avvicina di notabile quantità al polo boreale, come con ripetute osservazioni ho posto fuori di dubbio. Il 20 Gennaio si notò uno stringimento sensibile del Tanai presso la sua uscita dal Mare Acidalio, proprio nel punto ove vi metteva capo una striscia bianca allora visibile nella regione vicina di Tempe, longitudine circa 60°. Non oserei dire se la contrazione fosse reale, od un effetto ottico della maggior bianchezza di quella striscia.

468. Il 10 Gennaio si manifestò per la prima volta il Dardano, sottile, ma precisa e ben visibile linea oscura, che corre quasi esattamente nella direzione del parallelo attraverso alla regione detta Tempe fra il Golfo Ceraunio e il Nilokeras: l' osservazione fu confermata il giorno 11. Il 12 si trovò, che oltrepassando il Nilokeras, faceva capo al Lago Niliaco; il 13 fu distinto un punto nero nella sua intersezione col Nilokeras; punto nero che nei giorni seguenti non fu più notato. Il 17

si trovò che il suo prolungamento ideale a traverso del Lago Niliaco corrispondeva in latitudine press' a poco alla foce del Deuteronilo nello stesso lago. Il 19 il Dardano fu visto prolungarsi attraverso alle due striscie del Ceraunio; il 21 Gennaio è detto sottilissimo. Nell' osservazione seguente, che fu del 18 Febbraio, fu visto prolungarsi molto ingrossato ad occidente del Ceraunio, e risultò esser null' altro il Dardano, che una porzione del lungo canale Acheronte, il quale si protende di là fino ad incontrare il Titano. Dardano ed Acheronte insieme riuniti non prendono meno di 110° di longitudine. Nello stesso giorno 18 Febbraio ho trovato l' Issedone, breve e appena visibile tratto, che connette il Dardano col Tanai a traverso di Tempe, in direzione non molto inclinata al meridiano; e questa ne fu l' unica osservazione. Il Dardano invece fu veduto ancora il 23 di Febbraio per l' ultima volta.

469. La regione detta Tempe è una fra quelle che più spesso appaiono bianche o biancastre, anche quando la posizione del Sole dovrebbe far supporre altrimenti. Di tali osservazioni si fecero il 20 Gennaio ($\omega = 49°$), il 21 Gennaio ($\omega = 66°$), il 24 Febbraio ($\omega = 38°$). Molte altre volte (2, 3, 4 Novembre, 9 Dicembre, 8, 12, 13, 18 Gennaio) fu vista questa regione attraversata da una bella e lunga striscia bianca, simile in tutto a quella che si vide nello stesso luogo il 26 Dicembre 1879, e raffigurata nella Tav. V, fig. 5ª della Memoria II. Veggansi al § 557 i particolari di queste osservazioni. La striscia che attraversava Tempe si prolungò varie volte anche in Tharsis, terminando al Lago della Fenice. — Anche Chryse questa volta come negli anni passati, si mostrò spesso vestita di un velo biancastro; il 4 Novembre vi era una macchia bianca nel centro della regione fra la Jamuna e l' Idaspe a ugual distanza dal Capo degli Aromi e dal Lago Niliaco. Era in quel momento $\omega = 50°$, e la regione da poco era passata al meridiano centrale. Tracce del fatto rimanevano ancora il giorno 8 Novembre nella stessa configurazione del pianeta. Generalmente però questo albore di Chryse non ebbe luogo che quando la regione era già abbastanza prossima al lembo destro o sinistro; ciò almeno risulta dalle note che qui trascrivo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nov. | 9 | $\omega = 4°$ | si comincia a veder il bianco di Chryse. |
| Nov. | 14 | $\omega = 333°$ | all' orlo destro il bianco di Chryse. |
| Genn. | 8 | $\omega = 106°$ | Chryse chiara all' orlo sinistro. |
| Genn. | 10 | $\omega = 85°$ | Chryse comincia a biancheggiare fra Jamuna e Idaspe. |
| Genn. | 12 | $\omega = 79°$ | Chryse diventa bianchissima. |
| Febbr. | 16 | $\omega = 98°$ | Chryse tutta bianchissima all' orlo. |
| Febbr. | 17 | $\omega = 90°$ | Chryse comincia a farsi lucente. |
| Febbr. | 18 | $\omega = 103°$ | Chryse biancheggia. |

Il 14 e il 15 Dicembre trovo notato che i canali di Chryse erano meno neri del solito, benchè nerissimo fosse il mare Acidalio.

470. Molte osservazioni interessanti si fecero negli ultimi anni sulle regioni del Lago Niliaco e del Mare Acidalio, specialmente da Knobel nel 1873 e nel 1884. Il Mare Acidalio è senza dubbio nei suoi disegni del 1873 rappresentato da quella grossa macchia nera in forma di pennacchio, che nella sua circonvoluzione quasi semi-

circolare avvolge una regione assai bianca, quella che noi diciamo Tempe. Le appendici meno scure superiori sono gli equivalenti del Lago Niliaco e del doppio Nilokeras; le ombre inferiori rappresentano l'insieme del Tanai e dello Jaxarte (disegni dell'11 12, 13, 16, 19 Maggio 1873). Vi è pure un diaframma chiaro, analogo al Ponte d'Achille; ma la sua direzione è molto diversa da quella del parallelo, che fu costantemente da me osservata nel 1881-82. Studi ulteriori diranno se qui v'ha cambiamento; cosa che l'apparizione dell'isoletta Scheria (v. sopra § 465) rende non improbabile. Nei disegni del 19 Maggio 1873 ($10^h\ 20^m$) e del 22 Maggio ($10^h\ 30^m$) Knobel ha pure rappresentato lo splendore bianco di Tempe presso l'orlo destro. Tale splendore trovasi anche accennato nei disegni fatti da Burton durante le opposizioni del 1871 e del 1873; il Mare Acidalio ha presso di lui la forma di cuore o di pera, e il pennacchio più leggero che gli sovrasta corrisponde anche qui al Lago Niliaco ed al Nilokeras. Nei bei disegni che Otto Boeddicker ha fatto collo specchio di 3 piedi di Lord Rosse nel 1881-82 (20 Dic. 1881, 17 e 23 Genn. 1882), si riconosce manifestamente l'insieme del Lago Niliaco e del Mare Acidalio, l'Indo, il Nilokeras, ed il Tanai, e vi è anche non dubbia traccia dell'Idaspe.

## Sezione V.

### *Gange, Chrysorrhoas, Ophir, Aurea Cherso e loro dintorni.*

471. Il Gange fu veduto per tutta la durata delle osservazioni (2 Novembre-2 Aprile), ma sotto aspetti diversi. In Novembre e Dicembre come striscia larga, ma poco precisa e sfumata; più stretto e più preciso cominciò a vedersi nei giorni 8, 10, 12 Gennaio. Il 13 esso era anche più distinto; a poca distanza dal suo corso verso Occidente, e proprio sotto l'equatore del pianeta apparve un grosso punto nero e rotondo, dal quale si dipartivano due tratti; uno andava al Gange stesso in direzione press'a poco a lui perpendicolare, ed era il più oscuro; l'altro invece scendeva parallelamente al Gange fino al Lago della Luna in forma di leggera striscia alquanto nebulosa (Tav. III, fig. B). Nei giorni seguenti questa parte non si potè osservar bene. Nel giorno 18 Ophir e le regioni circostanti si mostrarono imbrattate di bianco, e gli oggetti più minuti si riconoscevano con difficoltà: ciò nondimeno quel punto nero apparve in Ophir anche più visibile pel contrasto col bianco che lo circondava; il tratto breve che lo univa perpendicolarmente al Gange era però più difficile a vedere, l'altro parallelo al Gange non si vedeva affatto. Il 19 si videro benissimo il Gange e il Chrysorrhoas. Tutta la regione era chiazzata di bianco, ma del punto nero non trovo più menzione, nè delle due linee da esso dipendenti. Finalmente addì 20 Gennaio apparve non solamente il punto nero, e il breve tratto perpendicolare al Gange, ma si vide anche più precisa e rinforzata la striscia ad esso parallela, e prolungata in alto dal punto nero fino al Golfo dell'Aurora. In altri termini il Gange era geminato nel modo che le nostre carte lo rappresentano. Il Gange II era più sottile e men visibile del I; ambidue però non intieramente privi di qualche sfumatura; il che può anche dipendere dalle condizioni ottiche della visione di linee così straor-

dinariamente vicine. Stimai che la distanza fra le due linee fosse un ottavo della loro lunghezza, e la metà dell'intervallo fra le due Jamune; si può quindi credere che non raggiungesse 5° gradi di circolo massimo, ovvero 0″,6 di misura angolare. Tutto questo fu riveduto e confermato pienamente il 21 e 22 Gennaio; esplicitamente allora si notò che Gange II attraversava diametralmente il punto nero, e che il tratto d'unione fra esso e Gange I non era perpendicolare esattamente a questo, ma si avvicinava un poco al parallelo del pianeta. Nelle osservazioni ulteriori del Febbraio si potè constatare ancora parecchie volte la duplicità del Gange fino al 23 di quel mese (diametro del disco 9″,7); e ancora in Marzo si poteva inferirla per induzione dall'aspetto dell'insieme delle due striscie allora già confuse in una; ma nè il punto nero, nè il breve tratto trasversale si poterono più distinguere. Confrontando queste osservazioni con la carta del 1877 e col § 70 della Memoria I si vedrà facilmente, che il punto nero è identico a quello colà denominato Fonte di Gioventù, veduto una sola volta il 2 Ottobre 1877. Il sospetto allora concepito, che il Fonte di Gioventù mandasse un emissario nel Mar Eritreo verso mezzodì (vedi la proiezione polare nella Tavola IV della prima Memoria e il detto § 70), si è pienamente confermato nel 1882: questo emissario esiste in fatto, e non è altro che l'ultimo breve tratto di Gange II fra il Fonte di Gioventù e il Golfo dell'Aurora. Il Fonte di Gioventù era stato cercato invano nell'opposizione del 1879 (§§ 338 e 339).

472. Circa il Chrysorrhoas non vi è molto a dire; sempre fu visto dal 2 Novembre al 31 Marzo con mediocre facilità, in Febbraio pareva più sottile e più definito, ma non diede mai sospetto di geminazione. Sulla possibilità che si prolunghi nel Nilokeras II, vedi sopra § 466. Anche l'Agatodemone nella sua parte più occidentale presso il Lago della Fenice non mostrò grande differenza da ciò che si era visto nel 1879. Ma la parte verticale a levante di Thaumasia, benchè sempre riconoscibile, pare andasse diminuendo, e il 22 Gennaio non si vedeva quasi più. Ricomparve invece il ramo breve che separa Ophir dall'Aurea Cherso, solo congetturato nel 1877 (§ 71) e rimasto invisibile nel 1879; così l'Aurea Cherso prese il carattere d'isola, come si vede sulla carta. Benchè tagliata in tal modo alla radice, l'Aurea Cherso rimase sempre bella, lunga, distinta; la sua relazione colla Terra di Proteo era assolutamente la stessa che nel 1879. La parte centrale dell'Agatodemone in Novembre e Dicembre fu press'a poco come nel 1879: ma in seguito si mostrò più dilatata e più visibile che per lo passato, e ha formato un vero lago piuttosto grande e qualche volta anche ben scuro al centro. Nei giorni 13, 18, 22 Gennaio era molto bello, e così anche il 18 Febbraio; mostrava tutta l'estensione che indicano i disegni di Lockyer (1862) e di Dawes (1864) secondo cui la sua grandezza sarebbe inferiore sì, ma tuttavia comparabile a quella del Lago del Sole. Lo abbiam dunque chiamato il Lago Titonio.

473. Il Lago della Luna si mostrò in Novembre e in Dicembre come un nodo piuttosto indistinto di striscie concorrenti in quel luogo, e più oscuro di quelle; la forma trapezia verificata nel 1879 non fu però manifesta che nel Gennaio, e soltanto il 19 di quel mese trovo notato, esser ben distinta entro il trapezio l'Isola Sacra. La striscia obliqua formata dai due Nili I e II era da principio leggera, confusa, e mal disegnata, nè si poteva distinguere alcuna traccia di bipartizione. Poco a poco

però la geminazione si andò producendo, ed era già riconoscibile il 12 Gennaio; il 19 i due corsi erano perfettamente definiti ed assai facili a separare « come fili grigi attraverso campi di neve ». Ancora il 18 Febbraio eran belli, scuri, e visibili. Più tardi il loro carattere di geminazione fu piuttosto dedotto dall'aspetto complessivo della striscia da loro formata, che realmente osservato con positiva separazione delle due linee. Fu il loro insieme ancora visibile il 31 Marzo. Il 18 Febbraio si credette di notare che il superiore dei due, cioè Nilo II si prolungasse al di là del Ceraunio nel Flegetonte. Indubbia essendo d'altra parte la prolungazione del Nilo II nell'Idraote I, si ha così una linea continuata senza apparente spezzatura, che si estende dal Golfo delle Perle alla Propontide per 130° circa di longitudine. — Ancora è da osservare, che la geminazione dei due Nili fu già osservata come caso unico nel 1879 (§ 337, 351 e Tav. VI fig. 5 della Memoria II) (1). Questo caso si presentò il 26 Dicembre 1879, quasi un mese *prima* dell'equinozio, che fu il 21 Gennaio 1880. Nel 1881-82 io aspettava con grande curiosità il ritorno di questo fenomeno, il quale per più di due mesi non si presentò, ma finalmente avvenne più tardi di quanto io m'aspettava, cioè in modo rudimentare e confuso il dì 11 Gennaio, e in guisa affatto manifesta il giorno appresso. Questo fu un mese *dopo* l'equinozio del pianeta, che ebbe luogo l'8 Dicembre 1881. Se dunque il fenomeno è legato alla rivoluzione periodica di Marte, è un legame di natura non intieramente rigorosa, e forse rassomiglia alla corrispondenza fra l'anno tropico terrestre e i fenomeni meteorologici nostri, che si corrispondono soltanto in modo approssimativo, e ammettono cause di perturbazione.

474. Dal multiplo nodo formato dal Lago della Luna si diparte anche l'Uranio nuovo canale non visto nelle opposizioni precedenti, e trovato la sera del 12 Gennaio 1882. Corre in direzione non molto inclinata al parallelo, con qualche tendenza al Sud a misura che avanza in longitudine. Nello stesso giorno si verificò che traversava l'Iride, prolungandosi ad occidente di questo; secondo tutte le probabilità raggiunge il Gigante, facendo così comunicare per linea non interrotta il Lago della Luna col Golfo dei Titani attraverso a 100° di longitudine. L'Uranio apparve come linea sottile e ben definita e non difficile; fu visto il 18 Febbraio per l'ultima volta ed era ancora bellissimo.

## Sezione VI.

### *Thaumasia, Lago del Sole e suoi emissari.*

475. L'ovale detta Thaumasia durante questa opposizione rimase sempre completamente contornata dalle linee oscure che la determinano, ciò che prova esser

(1) La geminazione del Nilo è pure rappresentata nella carta del 1879: nella Tavola III però accanto ai nomi *Nilus I* e *Nilus II* manca la striscia corrispondente nel più degli esemplari; ciò per l'imperfezione della litografia. Il vero stato delle cose è dato dalla carta in due emisferi, Tavola IV del 1879.

sempre stati visibili i canali rappresentati da quelle linee. Però il Fasi e il Golfo Aonio non si mostrarono così intensi di colore e così belli e ben definiti, come nel 1879; il Golfo Aonio poi, sia per variazione di tinta, sia anche per il forte scorcio di prospettiva cessò una volta (8 Gennaio) di produrre nel general contorno del Mare Australe quella così sensibile apertura in foggia di tromba, che si vedeva anteriormente, e la grande ombra ellittica, che limita Thaumasia al Sud ed Aurea Cherso all' Est, pareva prolungarsi senza interruzione fin nelle Colonne d' Ercole, formando così precisamente un grande sopracciglio all' occhio rappresentato dal Lago del Sole, secondo la configurazione espressa nella sua carta da Kaiser. L' interpretazione di quella figura, che ho dato nel § 111, è così direttamente confermata coll' osservazione. — Il colore di Thaumasia fu anche più scuro che nel 1879; una specie di giallo bruno, non dissimile forse da quello osservato in altre regioni, specialmente nella Libia. Che questa colorazione corrispondesse ad uno stato fisico della superficie, differente da quello delle regioni contermini di Ophir e di Tharsis, lo si vide manifestamente nei giorni 18 e 19 Gennaio, nei quali quasi tutte le parti allora visibili e specialmente Ophir e Tharsis in contiguità dell' Agatodemone essendo macchiate di bianco piuttosto vivo, sola Thaumasia restò immune da tal colorazione, spiccando anzi con tinta gialla più cupa per contrasto.

476. Il Lago del Sole questa volta non era più rotondo, come certamente fu nel 1877, nè aveva la figura acuminata vista nel 1879, ma formava una ovale quasi simile e quasi concentrica a quella di Thaumasia; inoltre la sua estensione in proporzione a quella di Thaumasia parve accresciuta, e più ristretta la cornice gialla formata da Thaumasia intorno ad esso lago. La forma ovale per una piccola parte può spiegarsi per mezzo dell' obliqua prospettiva. Ma l' inclinazione della visuale non essendo che di circa 25°, non possiamo ammettere che fosse rotondo il perimetro del lago, per cui il rapporto del diametro orizzontale al verticale fu certamente almeno di 4:3. Tutto l' insieme delle variazioni avvenute sembrami possa spiegarsi facilmente, ammettendo che il Lago del Sole siasi esteso alquanto dal lato di levante in modo da prender figura ellittica, e da diminuire alquanto da quella parte la larghezza della cornice gialla che lo circonda. Del resto il suo colore fu sempre molto oscuro, e più all' orlo del disco, che al meridiano centrale: circostanza questa che ho osservato anche nelle opposizioni seguenti. Non mi è mai riuscito nè adesso nè altre volte di vedere il Lago del Sole sotto forma quadrilatera o romboidale, come è avvenuto a Lohse ed a Burton (1). Che il Lago del Sole cambi di forma e di grandezza è cosa indubitabile; tanto più si deve dunque esitare ad assumerne il centro come origine delle longitudini areografiche siccome ha fatto Kaiser, e di nuovo recentemente Knobel (2).

(1) Lohse 15 Ottobre 1879 (*Publ. Potsd.* III, p. 65): Burton 1879 Nov. 18 e 22. Io ho osservato il Lago del Sole nei giorni 10, 12, 13 Ottobre, 14, 16, 18 Novembre 1879 senza mai nulla notare di simile. Credo che un' imperfetta visione dei diversi emissari del lago del Sole ha potuto produrre l' apparenza di angoli anche dove il contorno era rotondeggiante. Un solo angolo mi risultò allora evidente ed è quello che corrisponde all' uscita del Nettare dalla parte di levante, ed è segnato sulla carta di quell' anno.

(2) *Mem. of the Royal Astr. Society*, Vol. XLVIII, p. 282.

Sotto il riguardo dell' invariabilità e della perfetta determinazione il vertice d' Aryn sembra ancora molto preferibile.

477. I tre emissari del Lago del Sole veduti nel 1879 si ripresentarono nel 1881-82. Il Nettare fu veduto per la prima volta il 9 Dicembre; l' ultima il 18 Febbraio; sempre fu una linea alquanto inclinata al parallelo, sottile, ma precisa e facile a distinguere. La macchia oscura presso la sua estremità orientale, detta Fonte del Nettare (§ 71 e 342) non fu più veduta. L'Ambrosia ritrovai il 6 Gennaio per la prima volta, crebbe nei giorni seguenti, e l' 11 Gennaio era visibile quando il Nettare, bella, scura, precisa. Fu constatata la sua presenza ancora il 22 Gennaio; anzi il diario ne parla anche sotto il 18 Febbraio, ma in termini di dubbio. Sempre ben visibile e manifesto (9 Dicembre-18 Febbraio) fu il tronco dell' Eosforo fra il Lago del Sole e quello della Fenice. Fuor di questi tre, altri emissari non ho visto, ed invano ho cercato sopratutto quello che Lohse e Burton mettono dalla parte di Sud-Ovest fra il Lago del Sole e il Fasi od il Golfo Aonio (cf. § 344). Credo tuttavia che presso Lohse questo emissario rappresenti la fusione, in una sola ombra, dell' Eosforo, del Lago della Fenice, del Fasi, del Golfo Aonio, dell' Arasse, e del principio del Mare delle Sirene (1).

## Sezione VII.

### *Lago della Fenice e suoi dintorni; Ceraunio.*

478. Del pari che nel 1879, il Lago della Fenice non mostrò una estensione sensibile, e parve come un semplice punto oscuro, centro di una stella, di cui i sei raggi erano i due tronchi dell' Eosforo, l' Agatodemone, il Fasi, l' Arasse e l' Iride. Più volte ho notato, che l' impressione totale di questo insieme di linee era più grande e più sensibile presso l' orlo del pianeta, che presso il meridiano centrale: e questo effetto sarei inclinato ad attribuire, come altri consimili, alla maggior bianchezza che la regione circostante dimostrava in prossimità del terminatore. Dell'Agatodemone, del Fasi e dell' Eosforo superiore si è detto poco fa. L' Eosforo inferiore fu sempre osservabile, ed era anzi molto evidente; come nel 1879, appena uscito dal Lago della Fenice si apriva in due tratti, che da principio si perdevano in sfumature. Più tardi (12 e 14 Gennaio) il tutto prese un aspetto più definito, e si constatò che i due tratti in questione erano l' origine di due lunghi canali, l' Eumenide, e il Piriflegetonte, dei quali si dirà più sotto.

479. L' Arasse fu osservato per la prima volta il 2 Gennaio; il 6 era come un filo nero e ben visibile, così pure sempre nei mesi seguenti fino all' ultima osservazione di questa località, che fu il 19 Marzo. Il 18 Gennaio si notò che andava dritto dal Mar delle Sirene al Lago della Fenice, mostrando così la forma che aveva nel 1879, e non quella tortuosa del 1877 (cf. § 347). — Molta difficoltà si ebbe per lo più a distinguere l' Iride, il cui colore l' 11 Gennaio è detto rossiccio e sbiadito. — Invece il canale della Fortuna fu sempre evidente, bello, scuro e sottile.

(1) Vedi la sua carta di Marte in *Publ. Potsd.* Vol. III, Tafel 37.

Tanto la Fortuna che l'Iride furono osservati la prima volta il 2 Novembre e l'ultima il 18 Febbraio.

480. Nel nodo formato dall'Uranio, dalla Fortuna e dall'Iride comincia, secondo le osservazioni di questa opposizione, il Ceraunio. Questa formazione nel 1879 pareva cominciasse soltanto 10 gradi più al Nord, e si presentava come un semplice nucleo di nebulosità più o meno fosca che, secondo idee probabilmente non esatte, considerai allora come un tratto di mare offuscato da nuvole; indi il nome di Golfo, che poi non fu giustificato. Forse in certi stadii delle sue trasformazioni il Ceraunio potrà formare un seno oscuro simile alla Nilosirte, ma è certissimo che le osservazioni da me fatte non l'hanno finora presentato sotto quest'aspetto. Nei mesi di Novembre e di Dicembre altro non vidi in quel luogo, fuorchè la sfumatura del 1879 or più or meno carica, prolungata in giù fin presso al Tanai. Il 10 Gennaio era stretto e pallido, formava poco più che un prolungamento dell'Iride. L'11 Gennaio era sbiadito, quasi irriconoscibile: assai chiaro era pure il suo colore il 12. Il 13 Gennaio a sinistra di questa lieve ombra comparve un altro tratto più scuro e più sottile, e alquanto divergente verso il basso: il Ceraunio era diventato una geminazione imperfetta e poco appariscente, ma tuttavia decisa. Nei giorni seguenti continuò ad esser doppio; i due tratti eran pallidi, di un colore rossiccio poco saliente. La migliore veduta, quella del 18 Febbraio, che fu anche l'ultima, presenta il Ceraunio sotto l'aspetto dato nella carta: quello cioè di due striscie pallidissime quasi parallele, la cui tinta è rinforzata in tutti i luoghi dov'esse sono intersecate da altri canali: questi rinforzi formano due serie di macchie minute allineate e interrotte da spazi più chiari. Delle due strisce pare che una si possa considerare come dipendente dalla Fortuna, l'altra dall'Iride: il loro cominciamento ho creduto di vedere che fosse subito sotto l'Uranio. Il Ceraunio, coll'Iride e col Fasi, forma un insieme di canali o di striscie lungo 90° a 100°; il 6 Gennaio, essendo $\omega = 124°$, questa serie si presentava sotto una configurazione analoga a quella disegnata da Dawes il 3 Novembre 1864, e ho potuto di nuovo convincermi coll'ultima evidenza che essa è realmente identica [al *Bessel's Inlet* della carta di Proctor, come già si è indicato nella Memoria precedente (§ 348).

481. I fenomeni di colorazione bianca in Ophir ed in Tharsis, che si eran prodotti nel 1879 (§ 351), si ripeterono più volte nel 1881-82. Già si è fatto menzione delle ripetute apparizioni della striscia bianca che fu veduta il 26 Dicembre 1879 attraverso a Tempe ed a Tharsis, e che pare connessa colla macchia polare boreale; veggansi le osservazioni a ciò relative qui appresso, § 557. Oltre a questa, colorazioni bianche apparvero più volte sotto la linea dell'Agatodemone, limitate sempre alla riva boreale di questo, e non estese mai entro Thaumasia; così l'8, il 12 e il 14 Gennaio. Cotal striscia bianca sotto l'Agatodemone sembra aver analogia colle strisce bianche le quali si producono sotto il Mar delle Sirene in Memnonia, e sotto il Golfo Sabeo in Aeria ed in Edom; e forse dipende dalla medesima causa.

## Sezione VIII.

### *Argyre I e II, Terre di Noè e di Yao.*

482. La bella isola di Dawes *(Dawes Snow Island)* da noi chiamata Argyre ha mostrato, come nel 1879, la proprietà di diventar bianco-splendente presso il lembo destro o sinistro; ma questa volta anche spesso in prossimità del meridiano centrale si mantenne tale colorazione (benchè per lo più in grado meno intenso), probabilmente perchè anche in prossimità di quel meridiano l'isola era tuttavia molto lontana dal centro del disco e molto prossima all'orlo superiore. Nella speranza che le sue apparenze possano col tempo dar qualche luce sulla causa del color bianco o biancastro che riveste or qua or là con diversa vicenda tante regioni del pianeta, trascrivo qui tutte le annotazioni che ne ho fatto, insieme col valore corrispondente di $\omega$ come ho fatto nella Memoria precedente (§ 352). Per esempio, sembra importante di decidere, se la colorazione bianca assunta così frequentemente da Argyre in prossimità del lembo dipenda dall'obliquità della nostra visuale, o dall'inclinazione dei raggi solari, o dall'una e dall'altra cosa insieme; forse anche le leggi del fenomeno saranno periodiche, e dipenderanno dalle stagioni di Marte.

| Data | $\omega$ | Annotazioni |
|---|---|---|
| Novembre 2 | 47° | come neve. |
| Novembre 3 | 34 | brillante qual neve. |
| Novembre 4 | 46 | bianca. |
| Novembre 8 | 35 | pare la neve polare. |
| Novembre 9 | 336 | bianco brillante. |
| Novembre 10 | 333 | luminosa e bianca al solito. |
| Novembre 14 | 341 | ben bianca, quasi come neve. |
| Dicembre 9 | 78 | visibile. |
| Dicembre 14 | 360 | chiara. |
| Dicembre 19 | 6 | visibile. |
| Dicembre 29 | 302 | come neve, piccolissima. |
| Gennaio 8 | 100 | all'orlo, grossa e lucente. |
| Gennaio 10 | 79 | bianca e luminosa. |
| Gennaio 11 | 80 | brilla quanto mai. |
| Gennaio 12 | 66 | non ancor bianca, ma confusa. |
| — 12 | 70 | comincia a diventar bianca. |
| Gennaio 13 | 53 | chiara. |
| — 13 | 87 | comincia a splendere. |
| Gennaio 17 | 11 | bianca. |
| — 17 | 23 | ha già perduto il color bianco. |
| — 17 | 49 | bellissima, rossiccia. |

| Data | ω | Annotazioni |
|---|---|---|
| Gennaio 18 | 5° | bianca nuvola all'orlo. |
| — 18 | 18 | bianca nube quasi brillante. |
| — 18 | 35 | giallo-splendente. |
| — 18 | 42 | nebulosa, giallo-cinerea. |
| — 18 | 47 | sempre nebulosa. |
| — 18 | 55 | sempre bianca nebbia. |
| — 18 | 99 | bianco-brillante. |
| Gennaio 19 | 348 | alquanto bianca, baglior confuso. |
| — 19 | 33 | gialla. |
| — 19 | 78 | come neve, bianca e brillante |
| Gennaio 20 | 46 | non molto brillante, ma ben visibile. |
| — 20 | 50 | comincia a biancheggiare. |
| Gennaio 21 | 350 | chiara, ma non brillante. |
| — 21 | 13 | comincia ad ingiallare, bella, cospicua. |
| Gennaio 22 | 343 | biancastra, ma fosca all'orlo. |
| — 22 | 54 | un po' bianca. |
| — 22 | 66 | gialla brillante. |
| Gennaio 29 | 330 | chiara non brillante. |
| Febbraio 13 | 126 | bianca come neve polare |
| Febbraio 16 | 98 | candida neve. |
| Febbraio 17 | 83 | bianchissima e brillante |
| Febbraio 18 | 102 | qual neve brillante |
| Febbraio 19 | 67 | bianco sporco. |
| Febbraio 20 | 61 | macchia biancastra. |
| Febbraio 21 | 51 | biancastra. |
| Febbraio 22 | 41 | poco luminosa. |
| — 22 | 44 | splende un po' più. |
| Febbraio 23 | 42 | bella bianca, ma non brillante. |
| Marzo 30 | 60 | bianca. |
| Marzo 31 | 50 | bianca all'orlo superiore. |
| Aprile 6 | 10 | chiara ma non bianca. |

In quasi tutte queste osservazioni l'isola si presentò come lo scorcio prospettico d'una macchia rotondeggiante di 10° o poco più di diametro, senza che fosse possibile determinare altri particolari che il suo grado di visibilità ed il suo colore. Il 17 Gennaio però essa era bellissima, rossiccia e ben contornata, in modo da potervi distinguere i due promontori delle Ore e delle Grazie. Nello stesso giorno ho potuto constatare, che all'isola più propriamente detta Argyre, che dà origine alle fasi luminose qui sopra, e che è quasi rotonda, se ne connette dalla parte di levante un'altra, da mettersi nel numero delle terre oscure del Mare Eritreo; la quale è divisa da Argyre per una striscia scura non molto appariscente, mentre un altro spazio più

largo e più oscuro la separava da Noachide; cosa che fu confermata nel giorno consecutivo 18. Il 22 Gennaio ($\omega = 359°$) le due parti apparivano quasi ugualmente chiare, così che il tutto sembrava formare un complesso oblungo. Ma già poco dopo ($\omega = 18°$) la differenza di splendore si era meglio pronunziata, la parte orientale era rimasta oscura, laddove Argyre aveva cominciato a biancheggiare alquanto. Nello stesso giorno 22 sotto $\omega = 59°$ trovai Argyre divisa orizzontalmente da un tratto nero sottile, giacente press' a poco sul parallelo del punto più australe di Thaumasia, e più basso alquanto del centro d'Argyre stessa, la quale così ne restava tagliata in due parti molto disuguali, l'inferiore più sottile della superiore. Quel tratto dividente non ho potuto seguire che a traverso d'Argyre propriamente detta, e non sull'isola oscura contigua a levante la quale del resto era già troppo lontana dal meridiano centrale per essere bene veduta. Sventuratamente appunto mentre stava facendo l'esame di queste nuove particolarità, l'aria si corruppe e non mi fu dato più di rinnovare questa osservazione un'altra volta; così che ancora sono in dubbio, se il fenomeno debba interpretarsi come una vera divisione in segmenti dell'isola primitiva (secondo quello che è avvenuto in Ellade per la comparsa del Peneo e dell'Alfeo), oppure come una addizione fattasi della parte inferiore; in altri termini, se quel pezzo inferiore sia una porzione dell'antica isola, separata da una linea oscura nuovamente apparsa, o se quel pezzo sia un'isola nuova non prima avvertita, e di recente prodottasi al Nord della prima.

483. Nell'intervallo dal 6 al 14 Gennaio ebbi pure agio di osservare sei volte Argyre II, sotto forma di macchia bianca brillante presso l'orlo sinistro, talvolta sola, talvolta accompagnata da Argyre I, a cui presentava analoga apparenza, ma in dimensioni minori e in posizione più australe. Ne determinai tre volte l'angolo di posizione, da cui col metodo indicato al § 312 ho ricavato la latitudine dell'isola, assumendo 60°,8 per la sua longitudine. Ecco i risultati:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gennaio | 6 | posiz. | 348°,7 | $\omega = 131°,1$ | latitudine $= 75°,3$ |
| — | 9 | — | 351, 2 | 127, 1 | 71, 6 |
| — | 14 | — | 358, 4 | 135, 5 | 64, 1 |

la media delle latitudini 70°,3 differisce di soli 4° da quella ottenuta con 5 osservazioni nel 1879, e quindi sull'identità dell'oggetto osservato non vi può essere dubbio. Il 14 Gennaio Argyre II è designata come « simile a neve splendidissima » il suo centro distava allora dal terminatore non più di 10°.

484. La Terra di Noè non mostrò generalmente un aspetto diverso dalle altre terre oscure del Mare Eritreo; soltanto il 17 Gennaio è designata come giallo-scura. Il 19 si mostrava all'orlo del disco più chiara del solito ($\omega = 25°$). Nei giorni 21 e 22 Gennaio si potè constatare che fra essa e la Terra di Pirra esiste un'altra isola oscura, o se si vuole, un altro spazio più chiaro del Mar Eritreo: del quale però la grandezza e la forma rimasero abbastanza incerte, non essendosi potuto ripeterne più tardi l'osservazione. — La Terra di Yao fu vista alcune volte, e spiccava meglio sulle regioni circostanti, che nel 1879. Il 30 Gennaio ($\omega = 325°$) è designata come chiara; e il 31 Gennaio ($\omega = 313°$) parve qualche momento che anche cominciasse a luccicare. In quell'istante vi era gran copia di macchie bianche sull'attiguo continente (cf. § 460).

## Sezione IX.

### *Terre di Deucalione, di Xisutro, e di Japeto.*

485. Il canale che separa la Terra di Deucalione da Thymiamata fu sempre più o meno evidente dal principio di Novembre fino alla fine di Febbraio. Il 14 Novembre e il 19 Dicembre il colore non era molto oscuro, piuttosto bigio che nero; invece grosso, nero, e molto visibile fu trovato il 17 e il 18 Gennaio. Il 27 Febbraio parve di nuovo bigio, e la sua larghezza fu stimata un quarto della lunghezza, cioè 3° circa. Non oso decidere se queste variazioni di colore siano reali, o non dipendano piuttosto dalle condizioni della visione telescopica nel momento di ciascuna osservazione. La Terra stessa di Deucalione presentò il solito aspetto, allungandosi nel Mar Eritreo « come una colonna di fumo »; alcune osservazioni tenderebbero a far credere, ch'ella apparisse meno larga al principio delle osservazioni, che alla fine. Dato che qualche cosa si possa concedere in questa materia alle reminiscenze, direi che questa volta fosse più luminosa in generale, che nel 1877 e nel 1879. Certo è, che il 22 Gennaio la parte verticale fra il continente e la piegatura parve affatto bianca presso l'orlo del disco ($\omega = 53°$). Il 22 Febbraio ($\omega = 41°$) è detta luminosa; il 23 ($\omega = 49°$), un po' men chiara del continente. Era ancora visibile il 6 Aprile, col diametro del disco ridotto a 6″,8.

486. Nel 1879 si è descritta la Terra di Xisutro come una lingua analoga alla Terra di Deucalione, avente il principio presso il promontorio di Edom sotto il meridiano 350°, e terminata al così detto *serpentino* nella longitudine 322° circa. Le molto precise e frequenti osservazioni, che di questa regione si ebbero fra il 17 e il 29 Gennaio 1882, hanno presentato la cosa sotto un'aspetto alquanto diverso, ed han fatto vedere che la Terra di Xisutro ha origine non dal promontorio di Edom, sì bene dal vertice d'Aryn, precisamente nello stesso modo, con cui la Terra di Pirra dipende dal Capo degli Aromi. Pareva una lingua di vapore luminoso, che uscisse dal ben noto promontorio; era sottile, e di larghezza press'a poco uniforme, però il 29 Gennaio si è creduto di riconoscere che fosse un poco più larga al suo termine orientale presso il serpentino. Era fiancheggiata da due strisce o canali oscuri molto visibili, aventi origine nei due estuarii neri formati dai corni del Golfo Sabeo. L'una di queste strisce divideva Xisutria dalla Terra di Deucalione, l'altra da un'isoletta oblunga e sottilissima, che si estendeva per lo lungo del Golfo Sabeo, ed è segnata sulla carta col nome di Terra di Japeto. Fu veduta quest'isoletta per la prima volta il 29 Dicembre, e per l'ultima volta il 29 Gennaio; era di un giallo pallido, tutta circondata da spazi neri e ben terminata da ogni parte, forse però con minor precisione dal lato australe. Cominciava a poca distanza dal promontorio d'Edom e terminava di contro alla bocca del Phison, estendendosi fra 334° e 348° circa di longitudine. La sua larghezza non era certo più di 3°. Questo delicatissimo oggetto non fu più veduto in Febbraio ed in Marzo, forse per la troppo piccola dimensione apparente.

487. Il così detto *serpentino*, che forma un prolungamento incurvato della linea

nera principale del Golfo Sabeo fu sempre visibile, e specialmente nei giorni 17, 18, 21 e 30 Gennaio ne è fatta menzione come di striscia larga, bella ed oscura. Rispetto al medesimo niente si trovò da modificare nel tracciato del 1879. Ma un altro serpentino parallelo al primo, benchè meno evidente, fu constatato il 22 Gennaio, ed esaminato in ottime circostanze atmosferiche nei giorni 26 e 29; il quale, incominciando nel golfo Sabeo presso il meridiano 330°, si dirigeva a Sud-Ovest verso la separazione fra Noachide ed Argyre. Esso tagliava pertanto in traverso, con taglio sottile, ma spiccato, le Terre di Xisutro, di Deucalione e di Pirra, separando dalle loro estremità orientali una serie di piccole isole, o macchie sfumate più chiare, come si vede nella carta. Questa disposizione di cose, per quanto impreveduta, non è nuova; essa era già stata osservata 20 anni prima da Kaiser, del quale i disegni 31 Ottobre e 10 Dicembre 1862 diventano adesso in questa parte perfettamente intelligibili (1).

## Sezione X.

### *Terra di Pirra.*

488. Frequenti osservazioni della Terra di Pirra diedero a vedere, che la sua forma generale e la sua relazione al Capo degli Aromi rimaneva la stessa che nel 1879. Il 17 e 22 Gennaio si constatò maggior precisione nell'ombra forte che ne copre la radice a contatto con Chryse; non fu però mai possibile riconoscervi un canale deciso, come quello che separa la Terra di Deucalione dal continente di Thymiamata. Sul luogo dove ha il suo termine orientale sono ancora rimasto in dubbio; nei giorni 17, 18, 21 Gennaio e 28 Febbraio decisamente mi parve allungarsi fino alla coda del serpentino, cioè press'a poco fino al 330° meridiano: il 22 Gennaio invece nell'esaminare il nuovo serpentino allora trovato (v. § precedente) mi parve arrivasse soltanto fino a questo, o soltanto fino al 345° meridiano press'a poco. La parte superiore della Terra di Pirra, formante una coda orizzontale, fu sempre estremamente oscura e difficile; mentre la parte verticale, compresa fra Chryse e la risvolta, spesso apparve abbastanza luminosa, formando una ben evidente divisione fra il Golfo delle Perle e quello dell'Aurora. Così il 10 Gennaio, essendo $\omega = 94°$, quella parte verticale sembrava come un filo bianco e lucente presso il lembo. Così pure nei giorni 11, 12, 18, 19 Gennaio, essendo rispettivamente $\omega = 89°$, 80°, 100°, 78°. Il 22 Febbraio ($\omega = 41°$) parve luminosa, benchè prossima al meridiano centrale, ed ancora fu vista il 2 Aprile.

## Sezione XI.

### *Terre d'Ogige e di Proteo.*

489. La Terra di Ogige, della quale nel 1879 si ebbero soltanto deboli indizi, fu osservata più volte nel 1882. Il 13 Gennaio ($\omega = 53°$ e $\omega = 72°$) splendeva distintamente all'orlo superiore fra Thaumasia ed Argyre, scendendo giù fin quasi a rag-

(1) Ann. Sternw. Leiden, Vol. III, Tav. I.

giungere il parallelo 40°: il canale che la divideva da Thaumasia era molto oscuro. Il 17 Gennaio ($\omega = 52°$) splendeva similmente all'orlo la sua parte più australe, luminosa non meno di Thaumasia; la boreale (cioè la più bassa) restando invisibile affatto. Il 19 Gennaio ($\omega = 78°$) era grigia, non bianca. Il 21 Gennaio similmente ($\omega = 67°$) era visibile, ma non chiara; si notò allora che il suo termine verso destra doveva esser più orientale della foce dell'Ambrosia, essendo questa foce segnata nel Mare Australe da una parte molto scura di esso mare. E finalmente il 22 Gennaio ($\omega = 64°$) fu trovato, esser la Terra d'Ogige poco brillante e non arrivare fino al termine inferiore d'Argyre; e questa fu l'ultima osservazione fattane nel 1882.

490. Curiosa è l'evidenza, colla quale questa macchia, invisibile o quasi nelle posizioni più centrali, diventa luminosa e visibile nelle vicinanze dell'orlo; ma più curiose ancora sono le osservazioni che mi accingo a riferire. Nel giorno 8 Gennaio, desiderando di vedere fino a quale distanza dal centro del disco rimaneva visibile l'isola brillante di Argyre, feci le annotazioni seguenti a brevi intervalli; dove $\omega$ rappresenta come al solito la longitudine areografica del centro del disco all'istante di ciascuna annotazione; $\delta$ è la distanza calcolata di Argyre dal centro stesso del disco. Nel calcolo ho assunto per coordinate di Argyre quelle del punto intermedio fra i Capi delle Ore e delle Grazie, cioè longitudine 44° e latitudine australe 45°.

| Tempo siderale | $\omega$ | $\delta$ | Argyre |
|---|---|---|---|
| h m | | | |
| 1. 10 | 100° | 67° | all'orlo grossa e lucente. |
| 2. 10 | 114 | 76 | sempre ben visibile. |
| 2. 25 | 118 | 79 | sempre ben visibile. |
| 2. 46 | 123 | 82 | stupenda, esce fuori del disco. |
| 3. 05 | 128 | 86 | sempre molto ben visibile. |
| 3. 14 | 130 | 87 | sempre visibile. |
| 3. 25 | 132 | 89 | più che mai manifesta. |
| 3, 48 | 138 | 93 | ancora si vede. |
| 3, 58 | 140 | 94 | ancora c'è, si vede appena. |
| 4. 05 | 142 | 96 | si vede ancora. |
| 4. 14 | 144 | 97 | si travede ancora. |
| 4. 21 | 146 | 98 | ancora manifesta. |
| 4. 29 | 148 | 100 | si vede sempre. |
| 4. 48 | 153 | 103 | più evidenfe che mai; pos. 198°,7. |
| 5. 04 | 157 | 106 | traluce ancora per momenti. |

Manifestamente le otto ultime fra queste osservazioni non possono appartenere ad Argyre, la quale doveva trovarsi, quando furon fatte, tutta intiera nell'emisfero invisibile del pianeta. L'apparenza di bianco in quella parte dopo $3^h\ 48^m$ siderali non ha potuto provenire da altro, che dalla Terra d'Ogige, la quale com'è facile convin-

cersi, si trovava precisamente in quel luogo del lembo, dove io supponeva di vedere Argyre. Ciò è provato abbondantemente anche dall'angolo di posizione 198°,7 misurato quando $\omega = 153°$; del quale (assumendo 60° come longitudine della Terra d'Ogige) risulta la latitudine di essa Terra 44°,2 che collima perfettamente. È anche da supporre, che già alcune delle osservazioni fatte prima di $3^h\ 48^m$ siano dovute al bagliore della Terra d'Ogige, o almeno a quello riunito di essa e di Argyre, piuttosto che ad Argyre sola; la quale dopo $3^h$ ha dovuto trovarsi troppo vicina al terminatore. — Dello stesso genere, anzi ancora più singolare è un'osservazione del 10 Gennaio, secondo cui Argyre avrebbe brillato all'orlo sinistro ancora a $0^h\ 56^m$ siderali (1), quando $\omega = 164°$. Argyre era già 20° e più al di là del terminatore; anche quasi tutta la Terra d'Ogige era scomparsa dietro di esso, e soltanto ne rimaneva nell'emisfero visibile un piccolo lembo, quello che abbiam detto qui sopra avanzarsi verso la foce dell'Ambrosia, e che dobbiamo supporre arrivi sin presso al meridiano 80°. Tanto dunque fu in quelle sere lo splendore della Terra d'Ogige presso il lembo, da brillare a pochi gradi di distanza dal circolo terminatore, mentre per lo più si rimane inosservata ed occulta.

491. Della Terra di Proteo non trovo alcuna osservazione nel Novembre e nel Dicembre, benchè più volte il Golfo dell'Aurora si sia presentato in posizione favorevole: non posso dire se ciò provenisse dall'esser quella formazione allora meno visibile, o da circostanze della nostra atmosfera. Tanto più numerose, interessanti e decisive furono le osservazioni del Gennaio e del Febbraio, che qui trascrivo.

10 *Gennaio*, $\omega = 79°$. La terra di Proteo piuttosto chiara (come Thaumasia press'a poco) traversa l'Eritreo orizzontalmente, e lo divide in due parti, separandone il Golfo dell'Aurora. — 11 *Gennaio*, $\omega = 79°$. La Terra di Proteo seguita a dividere il Mare Eritreo come ieri: dalla punta dell'Aurea Cherso si stende orizzontalmente od anche piega un poco in giù. Sopra vi è il Mare Eritreo nero e largo, Argyre è molto distante. — 12 *Gennaio*, $\omega = 67°$. Alla punta dell'Aurea Cherso si connette orizzontalmente la Terra di Proteo, che è rossa un po' cupa, come Thaumasia. Pare che discenda verso sinistra, ma è un'illusione prodotta dal ginocchio della Terra di Pirra, che è un po' più basso. In ogni modo la Terra di Proteo non tocca Argyre, ma ne è piuttosto lontana. — 13 *Gennaio*, $\omega = 53°$ fatto un disegno completo del disco, in cui si confermano tutte le descrizioni precedenti. — 19 *Gennaio*, $\omega = 99°$ disco tutto imbrattato di bianco, bianca anche la Terra di Proteo. — 19 *Gennaio*, $\omega = 78°$. Terra di Proteo visibile, ma non bianca, anzi gialla come Thaumasia. — 21 *Gennaio*, $\omega = 72°$. La solita configurazione: chiude orizzontalmente il Golfo dell'Aurora: superiormente si termina al parallelo che passa per la foce orientale del Nettare. — 21 *Gennaio*, $\omega = 52°$. Il termine orientale della Terra di Proteo non tocca propriamente il ginocchio della Terra di Pirra, ma vi arriva sfumato alquanto, e vi lascia un'uscita al Golfo dell'Aurora. — 16 *Febbraio*, $\omega = 98°$. Terra di Proteo sempre in traverso del Golfo dell'Aurora. — 17 *Febbraio* $\omega = 82°$. Terra di Proteo chiara, serra il Golfo dell'Aurora. — 18 *Febbraio* $\omega = 78°$. La Terra di Proteo è giallo-bruna, non lascia fra lei e Pirra che un sottil canale per uscita del Golfo dell'Aurora. — 23 *Febbraio*, $\omega = 55°$. La Terra di Proteo luminosa anch'essa come al solito, chiude il Golfo dell'Aurora.

Nei mesi di Gennaio e di Febbraio fu dunque fenomeno permanente quella chiarezza della Terra di Proteo, che soltanto in grado minore si era presentata nel 1879, e come cosa rara ed eccezionale nel 1877. Il suo pennacchio non passa

(1) L'esattezza del tempo è guarentita da parecchi passaggi di macchie conosciute al meridiano centrale, tanto per la sera dell'8 Gennaio, quanto per quella del 10.

fra Argyre e la Terra di Pirra, come per errore è stato segnato sulla carta del 1879, ma corre nella direzione del parallelo fra la punta dell'Aurea Cherso e la risvolta della Terra di Pirra, non oltrepassando col suo lato australe il 30° parallelo. Tale pure risultava la sua configurazione dalle osservazioni del 1877.

## Sezione XII.

### *Osservazioni generali sulle terre oscure del Mar Eritreo.*

492. Tutto quello che in generale sulle colorazioni del Mar Eritreo è stato notato nel 1879, vale anche, e forse in maggior grado, per l'anno 1881-82. Allargati gli spazi relativamente chiari, aggiunti dei nuovi; meglio determinate e più sottili le linee oscure che li dividono; ridotte le parti veramente nere a regioni ristrette, e separate da intervalli chiari. Il 22 Febbraio ($\omega = 45°$) il Mar Eritreo si presentava come un complesso di tre macchie scure allineate fra loro, corrispondenti al doppio corno del Golfo Sabeo, al Golfo delle Perle ed a quello dell'Aurora: eran tramezzati da spazi chiari, i quali differivano dal sottoposto continente di Chryse più nel colore, che nel grado d'oscurità. Due altre parti del Mar Eritreo si mostrarono in questa opposizione particolarmente nere: cioè il tratto fra la Terra di Proteo e Argyre (11, 18, 21 Gennaio, 18, 22, 23 Febbraio), e quello fra la Noachide e la Terra di Yao (28, 30 Gennaio). Nelle terre oscure si trova spesso indicato il colore giallo, giallognolo, o giallo-bruno, del quale certamente non vi era traccia nel 1877, se non forse per la Terra di Deucalione. E l'identità di tinta più volte notata fra le terre di Pirra e di Proteo da un lato, la grande ovale di Thaumasia e l'isola d'Argyre dall'altro, mostra esistere una transizione fra le terre oscure e le chiare anche sotto il rispetto del colore. A questo proposito è da notare ancora, che per quanto in apparenza la natura del Mar Eritreo sia diversa da quella delle parti appellate continenti, pure sembra che anche in esso abbia avuto effetto il principio di segmentazione e di moltiplicazione delle linee, che prevalse sul continente. La divisione verificata in Argyre il 22 Gennaio; la comparsa del canale fra la Terra di Xisutro e l'isoletta di Japeto, che può riguardarsi come gemino dell'altro compreso fra le Terre di Xisutro e di Deucalione, ambidue dipendenti dai due corni del Golfo Sabeo (29 Dicembre); e più di tutto la duplicazione del serpentino, verificata altresì il 22 Gennaio, sono fatti che forse hanno qualche analogia colle geminazioni avvenute sul continente nello stesso periodo di tempo, e forse dipendono dalle medesime cause, per adesso ignote.

## Sezione XIII.

### *Arasse, Icaria, Colonne d'Ercole.*

493. La regione d'Icaria è tanto piccola, e si mostrò sempre in posizione tanto obliqua, che nessuna osservazione speciale si è potuto fare riguardo ad essa. Soltanto una volta, il 12 Febbraio, essendo $\omega = 171°$, ebbi occasione di notare, che essa era

bianca presso l'orlo destro. Le Colonne d'Ercole furono vedute parecchie volte (6, 13, 14 Gennaio), ben oscure e pronunziate: niente appariva in esse mutato rispetto alle opposizioni precedenti. Una volta (8 Gennaio) apparvero come prolungamento del grande arco oscuro che circonda Thaumasia (cf. § 475). Sull'Arasse vedi sopra § 479.

### Sezione XIV e XV.

*Dall'Iride e dal Ceraunio al Titano; Mare delle Sirene.*

494. Fra tutte le regioni di Marte esplorate negli anni 1877 e 1879, il vasto tratto compreso fra l'Iride-Ceraunio a levante ed il Titano a ponente, limitato al Sud dall'Arasse e dal Mare delle Sirene, al Nord dal Piccolo Diaframma, fu quello che più d'ogni altro rimase incerto e più imperfettamente descritto. Eccettuata una zona presso il Mare delle Sirene, e la parte più australe dei suoi influenti, in tutto quello spazio non s'era visto finora quasi altro, che ombre vaghe senza profilo ben determinato, le quali nella carta del 1877 furono interpretate con qualche arbitrio, e piuttosto tradotte in ipotesi, che fedelmente rappresentate secondo l'osservazione; mentre nel 1879 il disegno, limitato a ciò che realmente si è potuto vedere (e veder non senza grave fatica), attesta una grande povertà ed incertezza di notizie. Nè più fruttifere o più incoraggianti furono le prime vedute, che di questa parte del pianeta si ebbero negli ultimi mesi del 1881. Essa comparve in vista appunto il primo giorno delle osservazioni, che fu il 26 Ottobre; e mentre in alto si scorgeva il Mar delle Sirene col suo ben noto e costante profilo, chiaramente disegnato e definito in ogni parte, tutto il resto del disco non offriva che una superficie biancastra, chiazzata qua e là di leggerissime ombre diffuse, delle quali era impossibile riconoscere la forma ed il significato. Ed ancora ai primi di Gennaio, benchè i corsi dell'Eosforo, del Sirenio, del Gorgone, del Gigante e del Titano fossero abbastanza riconoscibili nel loro termine australe, pure avanzando verso il centro della regione in discorso perdevano ogni precisione nel loro tracciato e si confondevano insieme in una grande e non contornata ombra, press'a poco simile d'aspetto a quella, che nella carta del 1879 è segnata col nome di Oceano. Da tale ombra altre ancora più vaghe e leggere si vedevano diramarsi in varie direzioni, talmente incerte, da sfidare qualunque esatta descrizione. Tuttavia nella prima metà di Gennaio cominciarono a determinarsi meglio alcune linee di massima densità entro la suddetta grande ombra, formandosi presso l'equatore in 130° circa di longitudine un aggruppamento confuso, che per brevità ho usato chiamare il Nodo Gordiano; e si cominciò a riconoscerne la connessione coi corsi o canali nominati di sopra. Si ebbe altresì il vantaggio, che le parti chiare di questa regione trovandosi presso il lembo sinistro (al tramontar del Sole sopra il loro orizzonte) accrescevano la loro bianchezza, mentre ciò non avveniva delle ombre e delle linee di massima densità sopradette; in conseguenza di che, accresciuto il contrasto, si potè, malgrado lo scorcio, riconoscere meglio lo stato delle cose nelle posizioni più oblique, che presso il meridiano centrale. Finalmente in Febbraio anche in questa parte cominciarono a scorgersi effetti della geminazione; i quali, comechè meno perfetti che in altre regioni, e di pochissimo contrasto

di colori, pure essendo di estensione cospicua e di semplice struttura, coll'aiuto di alcune ottime serate dal 3 al 13 Febbraio ho potuto sufficientemente studiare. La gran macchia detta Oceano nella carta del 1879 fu risoluta non già in un mare, od in un gran canale, ma in un viluppo piuttosto complicato di linee o di striscie geminate. A quest'epoca erano intieramente scomparsi (almeno presso il meridiano centrale) i veli bianchi che finora avevano predominato in quella parte; la regione sotto il Mar delle Sirene, arrivando al meridiano centrale si presentava gialla, o almeno di un colore non troppo dissimile da quello che regnava sopra la massima parte dei continenti. Tale stato di cose parve durare ancora nel Marzo, per quanto almeno la cresciuta distanza del pianeta ha permesso di riconoscere.

495. Primo a mostrare qualche maggior determinazione è stato il Tanai, il cui prolungamento a destra del Golfo Ceraunio fra le longitudini 90° e 160° era affatto invisibile il 26 di Ottobre ($\omega = 127°$). Cominciarono a vedersene alcune tracce il 9 Dicembre ($\omega = 119°$), le quali però, al loro incontro colla striscia formata dalle nevi boreali del ramo III (vedi § 558) sotto la longitudine 125° erano debolissime e quasi invisibili. Il 5 Gennaio il Tanai formava già un'ombra abbastanza netta ed oscura, e si potè anche riconoscere il piccolo ramo detto Cocito, nellà parte più boreale d'Arcadia. Il Cocito verso occidente riesce alla Propontide; dall'altra parte termina al Sirenio, siccome si riconobbe poi da osservazioni del 14 Gennaio, dell'11 e del 12 Febbraio; dopo della qual ultima epoca non fu più veduto. Quanto al Tanai, continuò ad esser visibile come limite oscurissimo e cospicuo della calotta bianca polare, colla quale, atteso il grande scorcio, pareva per lo più essere a contatto. Questa parte del Tanai è alquanto più alta in latitudine, che non l'estremo orientale presso il Mare Acidalio; forse per questo non è mai stato possibile riconoscere in modo indubitato il tratto corrispondente del Jaxarte, che secondo quanto si vide in altre opposizioni, pare si prolunghi anche sotto queste longitudini. Soltanto il 6 Gennaio ho creduto di riconoscere una duplicità in questa parte del Tanai, duplicità dovuta probabilmente al Jaxarte. Più tardi il dilatarsi della calotta polare boreale impedì di fare osservazioni in tanta vicinanza del polo.

496. Anche il Flegetonte, di cui il corso non attraversa il Nodo Gordiano, fu dei primi a manifestarsi con qualche evidenza. Il 9 Dicembre non era chiaramente visibile; ma il 5 e 6 Gennaio formava già un'ombra di forma sufficientemente buona. Addì 8 Gennaio fu visto bene, trasformato in linea sottile e precisa, e tale fu il suo aspetto in seguito, così che addì 13 Febbraio ancora è detto « bellissimo ». Il 18 Febbraio ho creduto di riconoscere che il Flegetonte formasse il prolungamento del Nilo II ad occidente del Ceraunio: cosa che si accorda bene colle posizioni dell'uno e dell'altro. Un'altra circostanza pure notata nello stesso giorno, che cioè il Nilo I si prolungasse anch'esso in una linea parallela al Flegetonte, producendo così una geminazione di questo, è meno sicura; non essendo più stato possibile di verificarla nei giorni seguenti.

497. Il Sirenio superiore (cioè il principio del Canale delle Sirene presso il Mare dello stesso nome) fu ben distinto già il 9 Dicembre; il 30 dello stesso mese, essendo $\omega = 192°$ e questa regione diventata molto bianca presso l'orlo destro, lo vidi per favore del contrasto scender giù come linea oscura dal Mare delle Sirene

fino verso l' equatore, mettendo capo ad una grande macchia parimente molto scura, nella quale riconobbi il Nodo Gordiano. Molto meno visibili il Sirenio superiore e il Nodo Gordiano furono il 5 Gennaio ($\omega = 124°$) nelle vicinanze del meridiano centrale; in questa occasione però riuscì di constatare sotto forma di debilissima e sfumatissima ombra la esistenza del Sirenio inferiore, cioè della parte compresa fra il Nodo Gordiano ed il Tanai. Il 14 Gennaio per la prima volta potei dire di ravvisare il Sirenio per intiero come una linea abbastanza decisa (benchè d' aspetto non uniforme), continuata dal golfo orientale del Mare delle Sirene fino al Tanai; la sezione inferiore in traverso d'Arcadia era più larga del resto, la sezione media attraverso il Nodo Gordiano era la più confusa. Fu notato che il generale suo corso formava una linea parallela al Ceraunio ed all' Iride, ciò che si confermò nelle seguenti osservazioni. Anche il 12 Febbraio fu visto tutto intero come una linea semplice e sottile; il 13 Febbraio era certamente geminato dall' estremità australe fino all' incontro col Flegetonte. Il Sirenio II era alla sinistra del I, distante forse 10°, terminato superiormente all'Arasse, e sotto al Flegetonte, come si disse; però le striscie erano pallide e malissimo definite. Anche il 14 Febbraio fu visto ancora tutto il Sirenio, ma in modo confuso e dubbioso; e nulla ho più potuto notare della geminazione, nè allora, nè poi. Del resto la bocca australe del Sirenio I fu sempre distante alquanto da quella dell'Arasse, in conformità delle osservazioni del 1879 (cf. § 367). — Dei due rami del Sirenio veduti nel 1879 il sin qui considerato è il più orientale. Ma anche nel 1882 più volte, e specialmente il 5 Gennaio, si è notato, che da una bocca comune nel Mare delle Sirene partiva un secondo ramo a ponente del primo, e deviato alquanto dal meridiano verso Nord-Ovest. Questo non si potè mai osservare con precisione, e si perdeva nelle vicinanze del Nodo Gordiano. Veramente il 13 Febbraio credetti un momento si prolungasse fino al concorso del Titano coll' Erebo; non ho tuttavia potuto metter in sodo questo punto.

498. Una debole sfumatura, che dal Golfo dei Titani si estendeva al Nodo Gordiano, fu tutto quello che si vide del Gigante fino al 6 di Gennaio. Venne allora in evidenza un' altra sfumatura fra il Nodo Gordiano e la parte superiore del Ceraunio; la quale si poteva congetturare fosse il prolungamento della prima, e formasse una linea unica di congiunzione fra il Golfo dei Titani ed il Ceraunio. Questa è la linea cui applico il nome di Gigante, nel 1877 e 1879 limitato soltanto alla parte più occidentale di essa. Il 12 e il 14 Gennaio si riconobbe, che l' Uranio, trovato allora a levante del Ceraunio, formava una continuazione ulteriore del Gigante, benchè molto meglio definita di questo. Un andamento ben determinato cominciò a manifestarsi nella parte più occidentale il 7 Febbraio; usciva allora il Gigante dal Golfo dei Titani come una linea oscura e bella. Il 9 Febbraio apparve l' altra porzione nascosta fin allora nel nodo Gordiano, che è compresa fra l' Eumenide, ed il Piriflegetonte, e non già unica, ma fortemente geminata tutt' ad un tratto, in forma di due striscie brevi, ma larghe e pallide, distanti fra loro forse 10° o 12°; delle quali l' inferiore seguiva l' antico corso, la superiore era nuova affatto. Il domani 10 Febbraio, essendo $\omega = 160°$ misurai l' angolo di posizione della parte geminata, di cui il tratto inferiore passava quasi pel centro del disco; risultò l' angolo col meridiano in quel punto 59°,7 da Sud verso Ovest. Contemporaneamente si notò che la

geminazione si era adesso estesa al di là del Piriflegetonte sino al Golfo Ceraunio, cosa che fu verificata anche l'11 Febbraio. Finalmente il 12 Febbraio fu visto il Gigante tutto geminato dal Golfo dei Titani al Ceraunio; il Gigante I si dirigeva al Golfo dei Titani, il II arrivava al Mare delle Sirene nel punto che la carta dimostra. Sotto $\omega = 156°$ fu misurato l'angolo del II col meridiano, che risultò 56°,2 da Sud verso Ovest. E fu notata la circostanza, che il corso delle due linee non era affatto interrotto dall'Eumenide (allora già geminato anch'esso), e che invece subiva un'interruzione di alcuni gradi attraverso al Piriflegetonte, di cui l'apparenza misteriosa non si potè ben intendere in quel giorno, nè dopo. Il 13 Febbraio tale interruzione continuava, ed inoltre la sezione orientale del Gigante compresa fra il Piriflegetonte ed il Ceraunio era male definita. Il 14 Febbraio non si vedeva il tratto occidentale fra Eumenide e il Golfo dei Titani; durava l'interruzione al Piriflegetonte; sotto $\omega = 145°$ fu misurato l'angolo del I col meridiano, e trovato 54°,2 da Sud verso Ovest. Si notò che il suo corso non è d'un circolo massimo, ma più concavo dalla parte australe. Interrotte poi le osservazioni di questa regione, fu riveduto il Gigante il 15 Marzo; il 17 fu trovato bellissimo, e il 19 coll'amplificazione 690 la geminazione sua era ancora manifesta!

499. Sull'esistenza dell'Eumenide non s'era potuto aver finora nozione precisa: qualche lieve indizio soltanto si era ottenuto nel 1879 della sezione occidentale, compresa fra il Titano e il Nodo Gordiano (§ 375). Questo medesimo tratto fu riveduto come debole linea oscura il 30 Dicembre 1881, benchè già fosse molto lontano dal meridiano centrale ($\omega = 192°$). Probabilmente la visione ne fu favorita dalla stessa circostanza che rese in quel giorno così evidente il Nodo Gordiano, cioè dal contrasto col fondo bianco circostante (cf. § 497). In quel momento la Memnonia, come trovo scritto nel diario, pareva imbiancata colla calce. Il 6 Gennaio mi parve prolungarsi lungo il Nodo Gordiano fino al Sirenio. Il 10, 12, 13 Gennaio fu ripetutamente confermata l'esistenza del tratto ad occidente del Nodo Gordiano, benchè rimanesse sempre un oggetto mal terminato e di somma difficoltà. Finalmente il 14 Gennaio si ebbe la prima vista completa dell'Eumenide, sotto forma ancora di un tratto assai difficile a definire, che uscendo dal Lago della Fenice andava direttamente ad incontrare il Titano press'a poco sotto l'equatore. Di questo tratto la parte a sinistra non era altro che il ramo australe dell'Eosforo bipartito, già noto dalle osservazioni del 1879 (§ 345). — Ritornata in vista questa regione il 7 Febbraio, scrissi sul giornale: « È quasi sicuro, che fra Titano e Gigante vi è una doppia traversa: ma non è possibile vederla con precisione ». E il giorno dopo 8 Febbraio: « Certamente vi è qualche cosa in traverso fra il Titano e il Nodo Gordiano, ma non si può decifrare ». Il 9 Febbraio: « L'Eumenide è doppio fra il Gigante e il Titano, il tratto più breve è l'inferiore; il tracciamento dell'altro è come nel giorno 14 Gennaio ». Il 10 Febbraio: « L'Eumenide par tutto doppio, a partire dal Lago della Fenice ». Essendo $\omega = 171°$ e il corso più australe vicino al centro del disco, fu preso l'angolo di posizione 234°,3, onde risulta l'angolo col meridiano centrale 98°,4, da Sud verso Ovest. Il 12 Febbraio « Eumenide tutto doppio fra il Piriflegetonte e il Titano, però è meno visibile del Gigante ». Essendo $\omega = 154°$ e il corso più boreale al centro del disco, fu preso l'angolo di posizione 231°,4, onde risulta l'angolo col meridiano

centrale 101°,4, da Sud verso Ovest. In quel giorno esaminando bene le quattro intersezioni dei 2 Giganti coi 2 Eumenidi mi parve che le oscurità delle tinte si sommassero insieme, producendo nei 4 parallelogrammi formati dalle 4 strisce una oscurità maggiore. Questa è l'impressione ricevuta, ma può darsi che in quei luoghi vi fossero dei piccoli nodi oscuri capaci di produrre all'occhio lo stesso effetto, anche senza sommazione di tinte. La difficoltà di un simile giudizio facilmente si potrà stimare quando si rifletta con quali minutissimi oggetti si ha qui da trattare, il cui diametro non poteva essere più che 0″,3 o 0″,4. Tutte e quattro le strisce erano di un colore rossiccio o giallo bruno come quello del cuoio sfibrato da molta confricazione, o del velluto nero, quando per il lungo uso perde il colore ed arrossa. Le strisce eran larghe e perciò facilmente visibili, benchè la loro tinta non si rilevasse tanto sul fondo. Il 13 Febbraio la geminazione dell'Eumenide fu osservata ancora e l'intervallo delle componenti stimato esser meno di 12° fra gli orli esteriori. Ciascuna striscia poteva avere 3° di larghezza o poco più. Di nuovo parvero sommarsi le tinte nei quattro parallelogrammi d'intersezione fra l'Eumenide e il Gigante. Il 14 Febbraio era più visibile la linea superiore, che l'inferiore; sotto $\omega = 146°$ essendo prossime al centro, presi l'angolo di posizione 227°,2, onde risulta l'angolo col meridiano centrale 105°,7 da Sud verso Ovest. Quest'angolo comparato coi precedenti del 10 e del 12 Febbraio parrebbe indicare una leggera concavità delle 2 linee verso la plaga australe e una sensibile deviazione del loro corso dal circolo massimo. — L'Eumenide fu visto ancora per l'ultima volta il 19 Marzo, senza che si potesse giudicare, se in tale epoca durasse ancora la sua geminazione.

500. Dal ramo più settentrionale dell'Eosforo prende origine il Piriflegetonte, e va alla Propontide. La parte del suo corso contigua a questa si può abbastanza riconoscere nelle osservazioni del 1879 (1); la parte di mezzo vi è affatto perduta nell'ombra diffusa, da cui emerse poi il Nodo Gordiano. Non molto differente ne fu l'immagine in principio di Gennaio 1881 fino al 12, nel qual giorno si cominciò a ravvisarlo tutto sotto l'aspetto di una striscia formante nel disco una corda poco diversa da un diametro, e lo stesso risultò dalle osservazioni del 14 Gennaio: sempre però era poco oscuro e male determinato. — Ritornata in vista questa parte il 9 Febbraio, si rivide il Piriflegetonte tutto intero; il 10 è detto « piuttosto visibile, benchè sottile » ed anche il dì 11 era manifesto tutto il suo corso. Il 12 Febbraio ($\omega = 136°$) trovo « Piriflegetonte fa quasi esattamente un diametro del disco, ben visibile tutto come una striscia oscura, o forse come due strisce oscure divergenti a piccolissimo angolo dal Lago della Fenice? Oggi è indecifrabile, come il Titano; interrompe il corso dei 2 Giganti ». Il 13 Febbraio, $\omega = 130°$: « Piriflegetonte forma un diametro del disco, pare ancora confuso. La sua duplicità mi sembra probabile, ma non risulta evidente alla vista; non si scorge altro che una brutta nebulosità (a momenti anche molto oscura) di larghezza quasi uniforme (10° o 12°) estendentesi lungo l'antica linea ». Il 14 Febbraio: « Piriflegetonte visibile, ma confuso, doppio o multiplo? Pare una lunga zona rossiccia larga $\frac{1}{10}$ del diametro del disco. Questa

(1) Vedi Tavola IV della Memoria II, e nella Tav. V della stessa Memoria il disco dell'11 Novembre 1879. Nella Tavola III questa traccia si è perduta per l'imperfezione della litografia.

sera è più oscuro e più visibile di tutti gli altri ». Il 18 Febbraio: « Oscurissimo il Piriflegetonte, e pare definitivamente sdoppiato; è più stretto e meglio determinato ». Le ultime osservazioni furono del 18 e del 19 Marzo, nelle quali il Piriflegetonte fu veduto ancora con certezza, benchè nulla si potesse dire dell' essere semplice o geminato. — Il risultato complessivo di queste descrizioni è che se nel Piriflegetonte vi ebbe geminazione, questa fu imperfetta nel periodo delle meno incerte osservazioni (9-18 Febbraio). Differiva dalle geminazioni regolari specialmente per l' aspetto non uguale e non preciso delle strisce, le quali più che liste uniformi, rassomigliavano ad un complesso di cirri fortemente allungati dal vento, senza che si potesse fissare in alcun luogo un limite bene definito. Notevole è l' aspetto divergente indicato il 12 Febbraio, perchè non fu un fenomeno isolato, ma altri esempi se ne videro in questa stessa opposizione.

501. Già s' è notato (§ 468) che il Dardano, attraversata la regione di Tempe e il Golfo Ceraunio, raggiunge, o piuttosto continua l' Acheronte, importante linea, che si estende in traverso di tutta l' area qui considerata, e oltrepassato il Titano va a raggiungere l'Erebo sopra Flegra. Dell'Acheronte ebbi la prima notizia il 14 Gennaio; era una linea abbastanza visibile, press' a poco diretta secondo il parallelo, che intersecava il Sirenio proprio nello stesso punto in cui l' intersecava il Flegetonte. A sinistra oltrepassava il Golfo Ceraunio d' un piccolo tratto, che più tardi riconobbi essere una parte del Dardano; a destra si connetteva coll' Erebo. Addì 11 Febbraio quella parte dell'Acheronte, che è compresa fra il Titano e il Piriflegetonte, e che già nei due giorni precedenti si era notabilmente ingrossata, apparve geminata. L'altra sezione fra il Piriflegetonte e il Ceraunio sembra sia rimasta semplice; tale era ancora il 18 Febbraio, benchè molto bella e cospicua, e assai maggiore del vicino Dardano. Grosso e cospicuo era allora l'Acheronte anche nel tratto che attraversa i due Ceraunii. Dopo il 18 Febbraio più non se n' ebbero altre vedute. — L'Acheronte è uno dei canali di Marte, che ebbero la sorte di esser veduti distintamente da più di un osservatore: trovasi infatti disegnato con tutta la possibile chiarezza dal signor Knobel nella carta che accompagna le sue osservazioni areografiche del 1884 ([1]).

502. Il 6 Gennaio credetti di riconoscere anche il Gorgone, già trovato nel 1879: l' osservazione però è dubbia, e due giorni dopo non mi riuscì di ottenerne conferma-zione. Addì 11 Gennaio però lo riconobbi con certezza, benchè fosse sottilissimo e difficile; così pure il 13. Il 14 Gennaio l' ho designato come affatto sicuro. Tornata questa regione in vista, il 10 Febbraio riconobbi il Gorgone, e meglio ancora il 13 dello stesso mese; nel qual giorno si trovò il Gorgone tagliato perpendicolarmente nel suo mezzo da un altro canale ignoto fino a quel momento, indicato sulla carta col nome di Erinni. L' Erinni, in forma di una linea affatto nera e straordinariamente sottile, correva dritto dalla punta orientale del Mar delle Sirene fino all' intimo recesso del Golfo dei Titani; e fu questa l' unica osservazione, che io ne abbia potuto ottenere.

503. Nessun oggetto di Marte mi ha cagionato in questa opposizione tante perplessità e dato tanto travaglio, quanto la striscia (o piuttosto il sistema di strisce)

([1]) *Memoirs of the Roy. Astr. Society*, Vol. XLVIII.

anteriormente detta Canale I dei Titani, ed ora semplicemente Titano. La forma e posizione assegnata nel 1879, ridotta però all'ultimo grado di tenuità e di sfumatura, ne era già riconoscibile al principio delle osservazioni il 26 Ottobre. Ritornò questa parte in vista alla fine di Novembre; ma il cattivo tempo tolse l'opportunità di farne studio. Dal 28 Dicembre al 9 Gennaio fu osservato più volte come striscia poco cospicua e mal definita, benchè abbastanza sottile, più visibile presso gli orli, che al meridiano centrale. Trascrivo dal diario le annotazioni posteriori al 9 Gennaio.

10 *Gennaio*, $\omega = 129°$. Titano ben visibile colle sue dilatazioni inferiori (Propontide?): $\omega = 160°$ pare largo, sfumato, doppio? insomma non si distingue bene: $\omega = 168°$. Starei per dire che sia doppio, composto di due rami divergenti dallo stesso punto in fondo al Golfo dei Titani, e che comprenda inferiormente fra i medesimi tutta la Propontide: $\omega = 173°$. Dei detti rami il secondo a destra non esiste più: vi è solo il primo e sottilissimo, come un filo di ragno.

11, 12, 13, 14 *Gennaio*. Titano visibile *(senz'altra annotazione)*.

6 *Febbraio*, $\omega = 204°$. Titano estremamente sottile. — 7 *Febbraio*, $\omega = 179°$. Dritto secondo un diametro, esattamente segue il meridiano. — 8 *Febbraio*, $\omega = 181°$. Titano si vede, ma non è ben definito; anzi brutto e difficile a seguire. Nè posso congetturare con qualche probabilità che esso sia doppio. — 9 *Febbraio*, $\omega = 170°$. Forse il Titano è doppio, ma non ne son sicuro: $\omega = 182°$ certamente vi è un altro Titano, che partendo col primo dal Golfo dei Titani diverge da esso e va all'incontro del Piriflegetonte coll'Acheronte! I loro due tratti al disotto dell'Acheronte sono ben grossi e ben visibili: ambidue toccano alla Propontide, l'uno al limite orientale di questa. — 10 *Febbraio*, $\omega = 176°$. I due rami del Titano sempre divergono dal Mare delle Sirene, estremamente sottili, però visibili. — 11 *Febbraio*, $\omega = 145°$. Si vede il fascio dei Titani. — 12 *Febbraio* $\omega = 164°$. I due Titani prima divergenti paiono oggi paralleli: formano due bande larghe e sfumate, d'un color grigio o alcunchè di simile, non rossiccio, come Eumenide e Gigante. Che voglian anche loro formar una geminazione? Già nei giorni passati la divergenza dal Mar delle Sirene non mi pareva schietta: ma si vedeva troppo male. L'intervallo è al minimum 15° fra gli orli esteriori. Essendo $\omega = 170°$ l'angolo di posizione dei due fu trovato 329°,4, onde risulta un angolo di 3°,4 da Nord verso Est. Sotto l'Acheronte ivi son molto più grossi ed è più manifesta la loro duplicità. Il più orientale dei due pare unirsi con Piriflegetonte sboccando insieme nella Propontide. Tutto nettissimo il pianeta, nessuna idea di nuvole. — 13 *Febbraio*, $\omega = 150°$. Titano doppio; l'intervallo delle due linee pare maggiore in alto, che in basso, appunto come per l'Eufrate; ma non è sicuro.

La duplicità del Titano fu constatata ancora il 14 Febbraio in circostanze d'aria mediocre. Il 19 Marzo parve probabilissima ancora: più tardi non fu visto. Raccogliendo insieme tutta la serie delle annotazioni si viene a concludere, essere state visibili 3 linee differenti in diverse epoche. Indicando con $a$ la linea che prima fu veduta non accompagnata da altre, e press'a poco diretta lungo il meridiano 170° di longitudine; con $b$ la seconda, divergente colla prima da un medesimo punto (Golfo dei Titani, n°. 25 del catalogo dei punti fondamentali), e diretta all'estremo occidentale della Propontide; con $c$ una parallela ad $a$, accompagnante questa a 10° o 12° di distanza dalla parte di levante, risulterebbe, che in un primo periodo, fino al 9 Gennaio fu visibile il solo ramo $a$. In un secondo periodo (10 Gennaio-10 Febbraio) si vedevano i rami $a$ e $b$. In un terzo periodo (12-13 Febbraio) invece i rami $a$ e $c$. Qual grado di fiducia meritino queste osservazioni quasi sempre difficilissime, durante le quali non sempre si poteva aver netta coscienza di ciò che si vedeva, si vedrà col tempo. Noterò soltanto per adesso che una geminazione divergente, almeno in modo transitorio, pare siasi manifestata anche nel Piriflegetonte; mentre una assai

più manifesta e permanente durò più d' un mese nel sistema dei Ciclopi (§ 517). Potrebbe forse anche ammettersi, che la linea *b* non appartenga al sistema dei Titani, ma per ora è inutile discutere più a lungo quest' argomento, e aspetteremo maggior luce da nuove osservazioni.

504. In mezzo a tutte queste metamorfosi il Mare delle Sirene si conservò sempre invariato, non essendovi altra apprezzabile modificazione, che il piccolo cambiamento di forma apparente dovuto all' obliquità, un po' maggiore questa volta, della linea visuale. Non si vide mai interrotto da strisce chiare, nè in esso comparve alcun indizio di bissezione o di nerezza disuguale, come nel vicino Mare Cimmerio. Il colore è sempre stato molto oscuro, e le sue rive tanto ben terminate, quanto lo comporta il telescopio adoperato. Il colore della regione sottostante, che da principio era un bianco assai vivo (specialmente quando la regione si appressava all' orlo sinistro del disco), si andò modificando così, che in Febbraio era assai più vicino al giallo consueto, di quanto mai prima si fosse veduto; perfino nella Memnonia e nell' Arcadia, dove più spesso riluceva prima un candore splendente. Coll' apparizione di questo giallore coincide anche quella delle geminazioni, e la completa o quasi completa risoluzione del Nodo Gordiano nell' intreccio di più coppie di strisce parallele. — Per ultimo è da riferire la disparizione della piccola macchia bianca, detta neve Olimpica, così bene veduta nel 1879: tutte le ricerche fatte per ritrovarla in questa opposizione, segnatamente il 9 Dicembre e il 5 Gennaio, furono vane. Anche il ramo III della macchia polare boreale, che nel 1879 si era avanzato sin al Flegetonte e l' aveva anche oltrepassato (§ 431), non si prolungò questa volta al Sud del Tanai, o almeno di tale prolungamento si videro soltanto deboli indizi in un maggior albore della regione detta Arcadia (9, 14 Dicembre, 5, 6, 8, 13, 14, 18 Gennaio). Ma neppur di questo rimase in Febbraio ed in Marzo vestigio alcuno.

## Sezione XVI.

### *Atlantide I e II, Tartaro e Lestrigone, Erebo, Propontide.*

505. Le vicende della nostra atmosfera non permisero di fare osservazioni su questa parte del pianeta prima del 27 Dicembre. Da quel giorno in poi l'Atlantide I fu sempre ben visibile, e nulla apparve cambiato dal 1879, per quanto concerne i suoi profili: soltanto il giallo era diventato forse un po' più oscuro. Si confermò quanto prima era stato notato, essere un po' più larga nella parte inferiore. Si notò inoltre nella parte superiore o australe una leggera ombra, intieramente simile, e appunto così disposta, come quella veduta in Esperia l' anno 1877. Il 6 Febbraio, essendo $\omega = 190°$, e questa parte d'Atlantide I già molto vicina al lembo, parve la penisola fosse troncata nell' estremità superiore; producendosi così un' illusione affatto simile a quella notata pure per Esperia in analoghe circostanze (§ 144), e probabilmente dovuta alla medesima causa. — Anche nell'Atlantide II non si notarono differenze essenziali da ciò che s' era visto nel 1879; e identica a quella del 1879 era la disposizione del suo istmo inferiore rispetto al Lestrigone. Il 9 Febbraio si vide che era un po' più scura di Atlantide I, e certamente distaccata in alto dalla terra Elet-

tride. Questa fu l'ultima osservazione dell'Atlantide II nel 1882 (diametro del disco 11″,1); l'Atlantide I era ancora benissimo visibile il 17 Marzo, essendo il diametro del disco ridotto a 8″,0.

506. Quello che nel 1879 avevamo designato come canale II dei Titani (§ 376) ora non si può più indicare con questo nome a causa della geminazione (o triplicazione?) del Titano sopra riferita (§ 503); perciò sulla attuale carta gli si è assegnato il nome di Tartaro, per evitare ogni confusione. In questa opposizione è stato uno dei canali più cospicui, nè mai si è mancato di vederlo dal 27 Dicembre al 18 Marzo, tutte le volte che il pianeta si presentò in configurazione opportuna, anche in condizioni non tanto felici d'atmosfera. Si distacca obliquamente dal lato che termina il Mare delle Sirene verso Nord-Ovest, e leggermente curvandosi arriva al luogo detto Trivio di Caronte, formato da un intreccio multiplo di linee, e la cui disposizione non ho potuto studiare con esattezza, altro non avendovi veduto per lo più che un viluppo d'ombre oscure, formanti nell'insieme una macchia molto visibile e complicata. Nei giorni 8, 10, 12 Febbraio il Tartaro si era allargato, perdendo della sua oscurità, e più volte ebbi il sospetto che cominciasse a sdoppiarsi, sospetto che però non mi è mai riuscito di convertire in certezza. Perciò sulla carta è figurato semplice.

507. Anche il Lestrigone fu visibile tutte le volte che questa parte del pianeta si presentò in posizione opportuna, sebbene in Gennaio non fosse tanto scuro e tanto evidente, quanto in Febbraio. Nell'intervallo 6-12 Febbraio era diventato molto largo, tanto da far credere avesse a sdoppiarsi; e forse si sdoppiò, ma non così da poter separare i tratti col nostro telescopio, e perciò debbo lasciar la cosa in dubbio. Per ripetute osservazioni ho constatato, che la sua foce nel Mare Cimmerio aveva rispetto all'istmo di Atlantide II la stessa posizione che nel 1879. Questa volta però ho creduto di riconoscere, che tal foce avesse la forma di un golfo stretto e di colore assai nero. Ma per quanto concerne l'estremità inferiore del Lestrigone, credo siano avvenute variazioni sensibili. Infatti la sua forma curvata ed il suo raccordamento collo Stige, osservati nel 1879 potrebbero fino ad un certo punto accordarsi con quanto s'è visto nel Gennaio 1882, ma sono in aperta contraddizione con quelle, che in ottime circostanze d'atmosfera ne feci dal 5 al 12 Febbraio. Il 5 Febbraio si notò, che « il Lestrigone, stasera molto scuro, andava dritto dritto prolungandosi per lo Hades fino alla Propontide, formando una bella linea ». Il 6 Febbraio si constatò, esser il principio australe dello Stige notevolmente più occidentale, che il principio dell'Hades, il quale ad un tempo era il fine del Lestrigone. Il 10 Febbraio trovai che « non c'è modo di ridurre Stige ad esser prolungamento del Lestrigone: questo va all'Hades, che è molto bello e molto scuro ». E tale pure fu il risultamento dei giorni 11 e 12 Febbraio. A partir dal 5 Febbraio il diario applica direttamente il nome di Lestrigone al tratto qui designato col nome di Hades, mentre prima eran considerati come due corsi distinti. Il Lestrigone fu veduto per l'ultima volta il 17 Marzo.

508. Dal Trivio di Caronte si parte verso levante l'Erebo, del quale una oscura ed imperfetta notizia si ebbe già nel 1879 (§ 382). Già nelle prime osservazioni alla fine di Dicembre ed al principio di Gennaio risultò l'Erebo molto apparente, ben scuro e ben visibile; il 14 Gennaio fu messa fuor di dubbio la sua continuazione

nell' Acheronte (§ 501). Al Sud dell'Erebo apparve addì 5 Febbraio il suo gemino Erebo II, molto più tenue; l'uno e l'altro esattamente in continuazione della coppia formata dal Cerbero, senza che apparentemente nel Trivio sopradetto succedesse interruzione alcuna. Il giorno dopo eran tutti e due ben neri e ben visibili, tanto vicini fra loro, che la duplicità domandava molta attenzione per esser riconosciuta. La stessa osservazione fu ripetuta l' 8 Febbraio; l'11 Febbraio si notò che i due Erebi si prolungavano nei due Acheronti, dei quali la geminazione si era pure manifestata in quel giorno. Il 12 l' Erebo era ancor geminato, benchè fosse difficile separare i due tratti a causa della piccolezza dell' intervallo. Molto scuro e visibile si mostrò l' Erebo ancora nei giorni 16, 17, 18 Marzo, ma non fu più dato di sdoppiarlo.

509. Dallo stesso nodo del Trivio di Caronte si parte l' Orco, il quale raggiunge il Titano I nello stesso punto, in cui ad esso arriva l' Eumenide, e potrebbe forse anch' esser una continuazione di questo. Tracce diffuse dell' Orco già si riscontrano nelle osservazioni del 1879 (§ 376). Nella presente opposizione niente se ne vide fino al 3 Febbraio; in questo giorno, essendo $\omega = 221°$, e la regione già vicina al lembo del disco, ho scritto nel diario quanto segue: « vi è certamente del nuovo a sinistra del Trivio di Caronte, ma l'aria non concede di veder altro, se non una macchia oscura, che si prolunga sul parallelo ». Così fu trovato l'Orco per lo stesso fenomeno del contrasto dei colori, di cui già si è parlato più volte (§ 494, 497). Ma sebbene io abbia scrutato quella parte con tutta la possibile diligenza nei giorni 5, 6, 7, 8, 9 Febbraio, niente mi venne fatto di trovarvi; il 10 Febbraio però, essendo $\omega = 179°$ apparve l' Orco tutto ad un tratto, e già geminato, sotto forma di due linee sottili e debolissime, spaziate fra loro press' a poco quanto i due Eumenidi. L' osservazione fu ripetuta il 12 Febbraio, e fu notato esser quelle linee molto men visibili delle due dell'Averno. Invece il 19 Marzo (diametro del disco 7″,8) l' Orco fu visto un momento fra Eumenide e Stige; mentre dell'Averno non si potè più trovare alcuna traccia. Se questa osservazione non contiene qualche equivoco, dobbiamo ammettere, che l' Orco sia cresciuto notabilmente d' intensità nell' intervallo.

510. Dal luogo dove il Titano I incontra l' Eumenide, sale l'Averno a traverso di Zefiria verso Sud-Ovest fino ad incontrare il Lestrigone. Benchè nessuna traccia ne sia stata veduta nelle opposizioni anteriori, l'Averno questa volta si presentò sempre a partire dal 28 Dicembre in tutte le osservazioni del Gennaio e del Febbraio che offrirono sufficiente opportunità. Dapprima (28 Dicembre-9 Gennaio) era sottile e difficile, e visibile soltanto la parte compresa fra il Lestrigone e il Tartaro; il resto fino al Titano non fu trovato che il 12. Il 5 Febbraio ne fu scoperta la geminazione, verificata il 6. Dall' 8 al 12 Febbraio ambidue furono veduti bene e senza difficoltà in tutta la loro estensione; l' intervallo fu stimato di 10°, i due tratti parvero sottili ed uguali. L' incontro del tratto superiore col Lestrigone stimai che fosse 8° distante dalla foce del Lestrigone nel Mare Cimmerio. Il 12 Febbraio ambi i tratti erano ancora manifesti; e questa ne fu l' ultima osservazione, perchè quando la regione di Zefiria ritornò in prospetto il 18 e il 19 Marzo, fu impossibile trovare alcun indizio dell'Averno. — I punti, dove l'Averno interseca il Lestrigone, mi parvero gli stessi, in cui il Lestrigone è intersecato dal doppio Anteo.

511. Dagli estremi Est ed Ovest del Trivio di Caronte si dirigono verso la plaga

boreale l'Hades e lo Stige (*Palus Stygia* nella carta del 1879), due brevi, ma grossi e neri canali, di cui l'uno va alla Propontide, l'altro al Boreas. Lo Stige fu sempre visibilissimo e molto largo, quantunque non oserei affermare che avesse la larghezza di 4° assegnatagli nel 1879. I suoi lati erano ben definiti, e la larghezza pareva alquanto crescere verso il Nord. Anche l'Hades pareva un po' più largo nella parte settentrionale; rassomigliava allo Stige, salvo che nella direzione, e nell'esser alquanto più stretto. Perchè nel 1879 l'uno sia stato così palese e l'altro ignorato intieramente, è uno dei misteri dell'Areografia. Sulla relazione dell'Hades e dello Stige col Lestrigone vedi sopra § 507.

512. Nella carta del 1879 ho segnato col nome di Mar Boreo una serie di striscie più o meno incerte, delle quali io supponevo che fossero i primi indizi di un gran mar polare boreale di Marte, corrispondente al Mare Australe. Posteriormente ho dovuto convincermi, questo gran mare boreale essere affatto immaginario. Benchè qua e là esistano grosse macchie nere, come il Mare Acidalio, la Propontide e lo stretto d'Anian, e diversi grossi bracci quali il Tanai e l'Alcionio, queste tuttavia non formano un insieme abbastanza continuato per poterne comporre un Mar Polare; essendo anzi probabile, che sotto il polo boreale di Marte esista parte del continente. Ed infatti dalle osservazioni del 1881-82 risulta che l'ombra segnata sulla carta del 1879 intorno al punto fondamentale 25*b* è un lago per sè, di forma quasi rettangolare, che ho chiamato Propontide; il quale per un sottile e lungo diaframma giallo e luminoso (come constò indubitatamente da osservazioni fatte nei giorni 6, 9, 10, 11, 12 Febbraio) è separato da altro simile lago più settentrionale, meglio esplorato in opposizioni posteriori. Questo diaframma è in tutto simile al Ponte d'Achille (§ 464), e com'esso è diretto lungo il parallelo: lo diremo il Ponte d'Ercole. La Propontide si termina verso levante al corso del Titano I, verso ponente al corso dell'Hades: oltre i quali, riceve ancora il Cocito, il Flegetonte, il Piriflegetonte, e il grosso e nero stretto segnato col nome di Boreas. Il Boreas circonda al Nord una parte della regione circolare detta Eliso, e fa comunicare la Propontide collo stretto d'Anian; l'isola sottoposta è detta Cebrenia. Lo stretto d'Anian è una larga striscia oscura, che dall'Eliso corre verso il polo boreale; in questa opposizione se n'è veduto poco. Una volta m'è sembrato (5 Febbraio) di scorgere in traverso di esso fra la Cebrenia e l'Eteria, un diafragma giallo simile al Ponte d'Ercole, e ugualmente disposto, ma più breve; non avendo ripetuto l'osservazione, non posso dare la cosa come sicura. — Devo finalmente notare, che più volte nel corso delle osservazioni mi parve che il Boreas fosse accompagnato al Sud da un altro canale più sottile ad esso parallelo, il quale attraverserebbe tutta Flegra dal Titano allo Stige (5 e 6 Febbraio). Anche di questo non ho potuto raggiungere la completa certezza.

513. Nella regione qui descritta poche volte è stata notata la presenza di macchie bianche. Il 30 Gennaio ed il 3 Febbraio parve bianca la parte superiore sotto le Atlantidi in riva al Mare Cimmerio e a quello delle Sirene fra il Titano e il Lestrigone, essendo $\omega = 240°$ e la regione molto prossima all'orlo del disco. Fenomeno questo, che sappiamo essere assai comune. Il 4 Febbraio invece ($\omega = 200°$) si mostrò bianca la regione Cebrenia; mentre l'Eliso, contro il consueto, aveva il color giallo delle regioni circostanti. Il 7 Febbraio vi fu bianco simultaneamente in Ce-

brenia, nell' Eliso e nell' Etiopide, così che si ebbe l' aspetto di una striscia obliqua simile all' altra analoga osservata in Tempe e Tharsis (§ 481). Ma il fenomeno più importante di colorazione fu il rosso cupo, che nei giorni 3, 5, 8 Febbraio fu notato occupare la regione quadrilatera di Flegra, e che mi ricordo bene d' aver veduto ancora molte altre volte. In conseguenza di questo colore Flegra si distingueva a primo colpo d' occhio sul disco del pianeta, come una macchia di peculiare oscurità, la quale tuttavia in nessun modo si poteva confondere cogli spazi appellati *mari*.

514. Il fascio delle due Atlantidi, il Tartaro, il Lestrigone, il Trivio di Caronte, l' Hades, lo Stige, il Boreas, Cebrenia (sotto forma d' isola), e la Propontide si trovano molto distintamente rappresentati dal Dr. Boeddicker in un disegno del 9 Gennaio 1882, fatto all' Osservatorio di Lord Rosse con uno specchio di 3 piedi di diametro. Trovasi pure lo Stige ed il Boreas nella stessa serie, disegno del 30 Novembre 1881. Questi fatti dimostrano nel modo più eloquente che i telescopi di riflessione possono essere potenti definitori, benchè dotati di una grande apertura. Anche nei disegni di Knobel, fatti con un riflettore di 8 $\frac{1}{2}$ pollici di vetro argentato, si vede benissimo il Lestrigone (29 Febbraio 1884). Nella carta di Green a levante dell' Eliso vi è una grande ombra, denominata *Mare di Ondemans*, la quale forse rappresenta il quadrilatero di Flegra (molte volte colorato in rosso buio, come si disse di sopra), o forse piuttosto l' oscurità grigia proveniente dall' effetto riunito di Stige, Hades, Boreas, stretto d'Anian e Propontide. Veggasi altresì il disegno n.° 49 dell' *Areografia* di Terby. — Finalmente aggiungerò ancora questa circostanza: che di molte particolarità riferite in questa e nella precedente sezione già una vista confusa e male interpretata si trova nelle mie osservazioni del 1877. Se infatti, partendo dal Sirenio in mezzo d'Arcadia, lo si insegue fino all' incontro col Gigante, e questo sino all' incontro coll' Eumenide, e l' Eumenide fino all' Orco, poi si percorre tutto l' Orco, e pel Trivio di Caronte si ripiega in basso lungo lo Stige; la linea così descritta rappresenterà esattamente quel nastro d' ombre grigie e mal distinte vedute nel 1877 (§ 116, 152, 153), da cui con troppo ardita interpretazione trassi l' *Oceanus Fluvius* segnato a grossi caratteri sulla carta di quell' anno. Quel gran canale adunque non esiste sotto quella forma; ma è il rappresentante esatto, quanto ad ubicazione, di una serie di cose veramente esistenti, che allora si manifestavano in modo troppo dubbioso e troppo difficile ad intendere.

## Sezione XVII.

### *Mare Cimmerio, Ciclope, Cerbero, Anteo.*

515. Le osservazioni continuate per 5 mesi (22 Novembre - 21 Aprile) sul Mare Cimmerio non indicarono alcuna novità nel suo contorno: la tinta in generale trovo sempre designata come molto oscura. Questa designazione però deve considerarsi come riguardante soltanto le parti più perimetrali, che mostravano col giallo circostante il più vivo contrasto. Non devono riferirsi a tutta l' area: infatti il 3 Febbraio fu scoperta lungo il suo mezzo l' isola Cimmeria, che fu ancora riveduta e studiata più

volte nei giorni seguenti. Ecco le annotazioni che trovo scritte sul giornale intorno a quest'oggetto.

3 *Febbraio*, $\omega = 245°$. Si direbbe che il Mare Cimmerio sia solcato per lo lungo da un'isola sottilissima. Direi ch'essa comincia in punta fra i meridiani dell'Etiope e del Ciclope, terminando dinanzi allo Scamandro. Ai due lati il Mare Cimmerio è assai nero; l'isola, per quanto si può giudicare in tanta tenuità, è gialla scura. La cosa pare affatto certa, chi l'avrebbe detto? — 4 *Febbraio*, $\omega = 235°$. Veduto bene l'isola Cimmeria, che termina di fronte all'istmo superiore di Esperia. $\omega = 245°$. Isola Cimmeria più bella che mai. — 5 *Febbraio*. L'isola Cimmeria è stata veduta e figura in uno schizzo preso sotto $\omega = 232°$. — 6 *Febbraio*, $\omega = 231°$. Si vede bene l'isola Cimmeria, larga $^1/_3$ del Mare Cimmerio. — 7 *Febbraio*, $\omega = 224°$. Veduto l'isola Cimmeria.

Nelle sere seguenti non si ebbe più opportunità di vedere quella parte in buone condizioni di atmosfera; e quando a metà di Marzo si presentarono simili opportunità, il diametro era già troppo ridotto per l'osservazione di sì delicato oggetto. L'isola Cimmeria aveva precisamente l'aspetto di una coda di cometa, era sfumata e più larga all'estremo orientale, sottile invece, e precisa al termine occidentale. Oltre a questa, un'altra piccola macchia meno oscura del fondo, e di figura triangolare si mostrò nel Mare Cimmerio nell'angolo fra Elettride e Atlantide II (5 e 6 Febbraio). Nei due lati rivolti verso Elettride e Atlantide il contorno era, a quanto ho potuto giudicare, preciso: sfumato invece il terzo lato prospiciente l'isola Cimmeria. Il mare compreso fra la detta macchia triangolare e l'isola Cimmeria è sempre stato nerissimo.

516. Il Cerbero, coll'Erebo che gli si connette da una parte, e col Ciclope, che gli si congiunge dall'altra, forma l'insieme già conosciuto dagli areografi sotto il nome di Canale o Mare di Huggins. È invece un sistema complicato di linee oscure, delle quali l'intreccio forse non è ancora completamente esplorato. La parte media di tal sistema, quella cioè che fiancheggia l'Eliso, e porta il nome di Cerbero, si è sempre veduta geminata, dal 27 Dicembre al 19 Marzo. Da principio le due strisce eran piuttosto imperfette, non intieramente dritte, e non esattamente equidistanti, e fra le medesime vi era qualche ombra o altra cosa, che non ho mai potuto intender bene che fosse. Il 4 Febbraio però, ritornando questa regione in vista, i due tratti eran ben determinati ed eguali; ambidue terminavano all'Eunosto. Il 5 Febbraio erano « perfettamente uguali, belli e nerissimi »; il superiore si prolungava fino al Mare Cimmerio attraverso all'Etiopide, tagliando la geminazione del Ciclope, pure allora comparsa. La stessa cosa fu confermata dall'esame fatto nei giorni 6 e 7 Febbraio. Il 12 Febbraio ancora si riconobbe la duplicità del tratto contiguo all'Eliso, la quale continuò ad esser più o meno manifesta fino al 19 Marzo; ma dal prolungamento fino al Mare Cimmerio non si fa più menzione.

517. Per apprezzare tuttavia convenientemente la natura delle vicende qui descritte, è necessario considerarle in relazione con quelle del fascio dei Ciclopi. Nel 1877 si era dato il nome di Canale dei Ciclopi ad una striscia collocata esattamente nella direzione del meridiano, nel 1879 si trovò invece per quella striscia un'inclinazione di circa 17°; osservazioni anteriori di Dawes e di altri domandavano invece un'inclinazione maggiore, non molto diversa da 45° (§§ 131, 132, 381). Il fatto è che in quella regione esistono linee, che corrispondono a tutte quelle diverse inclinazioni, delle quali ora le une, ora le altre sono le più visibili. Nella Tavola I è

rappresentato schematicamente l'insieme di tutte le linee osservate in quella regione; le 3 linee appartenenti al fascio dei Ciclopi sono designate con I, II, $a$; e vi è aggiunta come quarta linea $x$ il prolungamento del Cerbero più australe. Al principio delle osservazioni il 26 e il 27 Dicembre fu veduta la sola linea $a$, la cui direzione corrisponde esattamente alle osservazioni del 1879; era visibile senza difficoltà, sebbene non molto precisa. Il 28 Dicembre comparve la linea I, la cui direzione seguiva esattamente il meridiano; questa corrisponde alle osservazioni del 1877. Era meno visibile dell'altra $a$, e si prolungava verso il Nord, traversando quasi diametralmente l'Eliso con un tratto sottilissimo, alquanto a destra del suo centro. I due tratti I ed $a$ così divergenti ad angolo da 2 punti assai vicini sulla costa del Mare Cimmerio incontravano l'Eunosto I, ed il tratto $a$ incontrava sull'Eunosto I il Cerbero più australe. L'insieme della configurazione così risultante è stato indicato nell'emisfero australe rappresentato sulla Tavola III. Restò così per più d'un mese fino al 4 Febbraio, durante il quale intervallo crebbero ambidue i tratti I ed $a$, essendo però sempre prevalente $a$. Questo, già molto apparente ai primi di Gennaio, alla fine era diventato grosso e cospicuo; il 2 Febbraio è detto « larghissimo, scuro, sebben non nero; e cresce un poco venendo in giù ». Invece I era riconoscibile, ma non senza qualche attenzione. Tale era ancora lo stato delle cose il 4 Febbraio a $4^h,20^m$ siderali, essendo $\omega = 238°$. Il domani 5 Febbraio a $4^h,31^m$ siderali, essendo $\omega = 231°$, la scena era totalmente cambiata; $a$ scomparso, in sua vece I, II, ed $x$, tutti e tre benissimo visibili. Contemporaneamente apparvero pure Anteo II ed Eunosto II, non prima veduti, dei quali si dirà più sotto. Insomma lo stato di cose indicato nella Tavola III d'un tratto si trovò cambiato in quello della Tavola II. L'identità del tratto I prima e dopo la metamorfosi è assicurata dal prolungamento di esso a traverso dell'Eliso, che fu verificato nello stesso giorno 5 Febbraio. Questa nuova fase non si può dire quando abbia avuto fine; nessun cambiamento essendosi potuto verificare nelle ulteriori osservazioni, salvo questo, che il tratto $x$ s'indebolì subito, e non è stato possibile trovarlo dopo il 7 Febbraio; mentre i tratti I e II non solo rimasero ben separati fino al 12 Febbraio, fintantochè fu in vista quella regione; ma al ritorno della medesima (10-19 Marzo) se effettivamente non furono più separati dal telescopio, pure mostrarono ancora nella striscia da loro formata tale carattere, che dimostrava persistere l'associazione di due linee vicinissime ed uguali, a risolvere le quali più non arrivava la forza dell'obbiettivo. Il 15 Marzo è scritto sul diario: « I due bastoni neri dei Ciclopi si separano quasi e sono stupendamente visibili ».

518. Fra tante cose singolari ed inaspettate che durante quest'opposizione si presentarono in Marte, stranissima sopra tutto fu la geminazione costituita dai due tratti I e II. Essi erano completamente neri, esattamente paralleli fra loro, ed uguali sotto ogni rispetto; tanto uniformi di larghezza e di colore, che più non si sarebbe potuto fare disegnandoli artificialmente. Se disuguaglianze o irregolarità vi sono state, queste certamente furon troppo minute per diventar sensibili al nostro telescopio di 8 pollici ed all'amplificazione 417. Le due linee eran dirette secondo il meridiano di Marte, almeno non ho constatato alcuna deviazione; però i loro termini australi e boreali non si trovavano sul medesimo parallelo, ma tutta la linea I era alquanto

più bassa (cioè più boreale) della II, i due termini boreali trovandosi sulla linea inclinata di Eunosto I e i due australi sopra la sponda, ugualmente inclinata in quel luogo, del Mare Cimmerio. Dalla parte australe però si avanzavano alquanto colle loro estremità arrotondate in questo mare che risultò esser meno nero di loro; e l'aspetto era veramente come sta indicato nella Tav. II (1). Da varie stime che ho fatto la sera del 5 Febbraio risulterebbe che la distanza fra gli assi delle due strisce nere era di 5°; la larghezza dell'intervallo chiaro, 2°,5; la larghezza di ciascun tratto, anche 2°,5. Forse però tutte queste stime sono maggiori del vero. La lunghezza di ambi i tratti era 20° o 25°.

519. L'Anteo, nuovo prolungamento di Eunosto a traverso di Eolide, fu veduto la prima volta il 27 Dicembre, poco ben terminato, ma pur visibile, e confermato con osservazioni del 28, 29 e 30. Il 4 Febbraio fu di nuovo veduto, senza che nulla si notasse della sua apparenza; il 5 era geminato, il tratto superiore o II essendo meglio visibile dell'inferiore. L'intervallo era assai più largo che nella geminazione dei Ciclopi. Si confermarono queste particolarità ancora il 6 Febbraio. Il 7 si notarono i prolungamenti dei due Antei a sinistra del Lestrigone, dei quali uno almeno pareva terminare nello spazio scuro fra le due Atlantidi; l'altro non si è potuto ben capire dove finisse, forse nel Mare Cimmerio. Il giorno 8 ancora furono visti ambidue, ma anche questa volta meglio il tratto superiore; con molta difficoltà fu pure veduto uno dei prolungamenti, l'altro rimase dubbio. Il 9 si vide solo l'Anteo superiore o australe senza prolungamento; e questa fu l'ultima osservazione. Alle due componenti dell'Anteo si connettevano per intersezioni comuni sul Lestrigone i due Averni, almeno così mi parve nei momenti di più quieta immagine.

519$^{bis}$. Degno di particolare attenzione, per lo studio delle variazioni avvenute nel fascio dei Ciclopi, è un disegno fatto dal Dr. Boeddicker a Parsonstown col telescopio riflettore di 3 piedi di Lord Rosse la sera del 30 Novembre 1881 essendo $\omega = 210°$. Oltre al Cerbero, vi si trova indicato il Ciclope sotto una forma, la quale accenna non ad una linea semplice, ma ad un fascio composto di più linee. Quali queste fossero, non si può rilevare; sembra però che prevalesse, come nelle mie osservazioni del 1879, il sistema a cui appartiene la linea qui sopra designata con $a$, e che sola si vede eziandio nelle osservazioni fatte a Milano il 26 e il 27 Dicembre. Vi è pure nella parte vicina al Mare Cimmerio, indizio di una delle linee appartenenti alla geminazione I-II, senza che si possa dire di quale.

520. La geminazione del Cerbero è stata una delle più evidenti di questa opposizione, una delle prime a rendersi visibile, e quella che durò manifesta per più lungo tempo (27 Dicembre-19 Marzo). Questi suoi caratteri di evidenza e di persistenza sembra non siano nuovi; infatti non vi può esser dubbio che il Cerbero sia stato visto in stato di geminazione (forse ancora imperfetta) da Dawes nel 1864 e da Knobel nel 1873. Rispetto a Dawes la mia affermazione si fonda sul disegno del 1° Dicembre 1864 (2) nel quale il contorno dell'Eliso è rappresentato da una curva

(1) Per esser completamente sincero devo aggiungere che questa disposizione dei termini australi e la relativa figura sono descritte di memoria, e non si trovano sul giornale d'osservazione. Tante furon le cose nuove vedute in quelle sere, che non si arrivava a scrivere e a disegnar tutto.

(2) *Monthly Not. of the Roy. Astr. Society*, Vol. XXV.

ovale intieramente distinta dall'altra curva che figura il così detto *Passo di Huggins*. Queste due curve hanno un andamento parallelo precisamente nella parte che corrisponde al nostro Cerbero. La cosa è stata riconosciuta dal signor Proctor, il quale nella sua carta di Marte fatta sulle osservazioni di Dawes (1), assegna all' *Huggins Inlet* un corso parallelo alla striscia formante il contorno Sud-Est dell' Eliso o della *Terra di Fontana*. Qui il parallelismo è ancora più evidente e l'inclinazione dei due tratti paralleli ancora meglio coincide col nostro Cerbero. — Riflessioni affatto analoghe suggerisce il disegno fatto dal sig. Knobel il 31 Maggio 1873, nel quale la separazione è altrettanto evidente che presso Dawes (2).

521. Di speciali colorazioni, notai dal 26 al 31 Gennaio un bianco insolito in Eolide presso la riva del Mare Cimmerio tutte le volte che questa regione si è trovata vicino all'orlo destro. Più volte fu veduto del bianco in Etiopide. Il 7 Febbraio ($\omega = 207°$) questo bianco formava seguito con simile bianco sparso sopra Eliso e sopra Cebrenia (vedi sopra § 513). Anche il 9 Febbraio ($\omega = 193°$) e il 12 Febbraio ($\omega = 175°$) fu visto del bianco a destra di Cerbero e di Ciclope dal Trivio di Caronte fino al Mare Cimmerio.

## Sezione XVIII.

### *Fetontide, Elettride, Eridania.*

522. A causa della forte obliquità della visuale le osservazioni di questa parte del pianeta riuscirono imperfette nell'opposizione 1881-82. Non fu possibile assicurarsi dello stato della regione detta Fetontide, nè di verificare l'esistenza del Termodonte (§ 383). Invece lo Xanto fu tanto largo ed oscuro, da parere qualche volta un semplice prolungamento del Mar Tirreno sino al Golfo di Prometeo (29 Dicembre, 1-7 Febbraio). Sotto questa forma non poteva certamente lo Xanto essere assimilato più ai così detti canali, e messo in una stessa categoria per esempio col Phison, o coll' Idaspe. — L' Eridania mostrò più volte il suo fulgore bianco specialmente presso l'orlo sinistro, alle seguenti date, e nelle seguenti longitudini del meridiano centrale.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nov. | 19 | $\omega = 268°$ | |
| — | 24 | 252 | |
| Dic. | 25 | 254 | |
| — | 26 | 231 | bianca la parte australe. |
| Genn. | 30 | 253 | |
| — | 31 | 248 | |

523. Notabili mutazioni si produssero nella regione Elettride, delle quali sventuratamente non mi è stato possibile fare osservazioni tanto esatte, quanto avrei desiderato. Il 29 Dicembre, sotto $\omega = 209°$ osservai il passaggio al meridiano centrale dello Scamandro, allora larghissimo e visibile, e feci un disegno, nel quale lo Sca-

(1) *The Orbs around us*, London 1872.
(2) *Monthly Not. of the Roy. Astr. Society*, Vol. XXXIII.

mandro figura come uno stretto non meno ampio di 10°, e ad ogni modo assai più largo della penisola Esperia. Nulla di particolare offre questo disegno rispetto alla Terra Elettride; il Simoenta non vi è compreso, era già troppo vicino all'orlo. Di questa parte non si poterono far altre esatte osservazioni fino al 5 Gennaio, nel qual giorno sotto $\omega = 193°$ trovo la notazione « Simoenta larghissimo, circa un terzo della sua lunghezza, curvato come le altre volte » dove i contrassegni appartengono certamente al Simoenta. Il 6 Gennaio ($\omega = 186°$) « Simoenta largo e grosso e scuro e ben visibile » e lo stesso giorno « l'interruzione formata dallo Scamandro sembra molto larga, sebbene non così evidente come quella del Simoenta ». L'8 Gennaio si presentò il Simoenta, e a destra di esso una grossa macchia non prima veduta nella terra Elettride; macchia la quale mi pareva connessa col Mar Cronio e non col Mare Cimmerio. Ne osservai il passaggio al meridiano centrale sotto $\omega = 182°$. Sulla forma di questa macchia non ho potuto farmi un'idea precisa, nè mi è stato possibile continuare l'osservazione nei giorni seguenti. — Tornata questa regione in vista, ricomparve prima all'orlo sinistro quella nuova macchia il 3 Febbraio ($\omega = 220°$), il 4 ($\omega = 201°$), il 5 ($\omega = 212°$). Finalmente il 6 e il 7 Febbraio, avendo potuto esaminare la località più presso al meridiano centrale, ed in buone condizioni atmosferiche, trovai lo stato di cose indicato sulla carta. La macchia nuova osservata in Elettride non era altro che la foce comune (e molto nera) nel Mare Cronio del Simoenta divenuto larghissimo, e di un altro canale molto inclinato rispetto al meridiano, indicato col nome di Ascanio. Correva questo dalla bocca australe del Simoenta alla settentrionale dello Scamandro, in direzione quasi parallela alla penisola Esperia, dividendo l'Elettride in due parti; la prima a destra verso lo Scamandro e il Mar Cronio, chiara e di forma triangolare: la seconda a sinistra verso il Simoenta e il Mare Cimmerio, notevolmente più scura della prima. Quanto allo Scamandro, esso rimaneva nella sua primiera posizione, ma sottilissimo e difficilissimo a riconoscere. Tuttociò fu confermato dalle osservazioni del 7 Febbraio; ed ancora il 14 e il 15 Marzo si riconoscevano gli effetti di questa nuova invasione di ombre sulla terra Elettride, benchè il diametro del disco fosse ridotto ad 8″. Infine devo ancora notare un'altra particolarità; ed è che nel giorno 10 Febbraio il triangolo compreso fra l'Ascanio e lo Scamandro apparve coperto di un color bianco puro, ma moderatamente intenso; della quale area bianca si osservò il passaggio al meridiano centrale sotto $\omega = 189°,22$. L'11 Febbraio la stessa area fu veduta vicino all'orlo ($\omega = 148°$) e trovata « di un bianco sporco ». Il 12 Febbraio similmente ($\omega = 171°$) « cominciò a comparire la nuova macchia bianco-sporca fra l'Ascanio e lo Scamandro »; la qual macchia non si ebbe altra occasione di rivedere più tardi. È questa la prima volta, che si nota colorazione bianca in Elettride; forse il fenomeno è connesso in qualche modo colle altre mutazioni ivi avvenute poco tempo prima.

## Sezione XIX.

### *Mare Cronio, Thyle I e II.*

524. Soltanto negli ultimi giorni di Dicembre cominciò il Mare Cronio a presentarsi in circostanze opportune per l'osservazione. Il 29 e il 30 Dicembre aveva l'aspetto di una corda benissimo visibile, altrettanto oscura che il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio. Fu veduto bene ancora più volte nei giorni seguenti. Al contrario in Febbraio non fu visto che una volta sola ed ancora con molta difficoltà (6 Febbraio) e nelle osservazioni seguenti non se ne fa più parola. In parte ciò si deve attribuire al diametro assai ridotto del pianeta; tuttavia forse questo non basta a spiegare l'effetto e potrebbe anche darsi che realmente qualche variazione nella intensità del colore o nella larghezza abbia avuto luogo.

525. Le due isole di Thyle non furono più visibili nelle condizioni ordinarie delle altre macchie più vicine all'equatore: una sola volta (1 Febbraio) ho potuto discernere un lato di Thyle II come limite del Golfo di Prometeo verso il Sud-Est. Molte volte invece l'una e l'altra isola manifestarono la loro presenza sotto forma di macchie bianche, simulando talvolta lo splendore e l'aspetto della neve polare. Per lo più le dimensioni di queste macchie erano piccolissime e apparivano come semplici punti brillanti. Essendo ora il diametro delle due isole di Thyle non inferiore certamente a 15° o 20°, se tale splendore ne avesse occupata l'intiera superficie avrebbero dovuto mostrarsi molto più cospicue di quello che realmente han fatto. Pertanto ho dovuto convincermi, che non dalle intiere isole, ma soltanto da una piccola parte di esse tale splendore era derivato. Per sapere qual era precisamente la porzione luminosa, feci nei giorni 8 e 10 Gennaio la seguente serie di misure sopra Thyle I; dove $\omega$ rappresenta la longitudine areografica del centro del disco all'istante in cui si misurava l'angolo di posizione $p$. Il significato di $p'$ e di $\varepsilon$ sarà indicato or ora.

| Data | $\omega$ | $p$ | $p'$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| Gennaio 8. | 134°,1 | 322°,3 | 323°,8 | — 1°,5 |
| — | 141,9 | 328,9 | 328,7 | + 0,2 |
| — | 145,0 | 333,3 | 330,7 | + 2,6 |
| — | 149,9 | 334,5 | 333,8 | + 0,7 |
| — | 161,6 | 340,0 | 341,5 | — 1,5 |
| Gennaio 10 | 150,6 | 320,6 | 323,2 | — 2,6 |
| — | 158,0 | 329,3 | 327,9 | + 1,4 |
| — | 170,6 | 336,3 | 336,5 | — 0,2 |
| — | 177,2 | 340,3 | 340,9 | — 0,6 |

Esaminando le colonne degli $\omega$ e dei $p$ si vedrà anche senza calcolo alcuno, che le osservazioni dell' 8 sono molto bene d' accordo fra loro, e così pure quelle del 10, considerando ciascun giorno separatamente; ma che tuttavia quelle dell' un giorno non si posson conciliare con quelle dell' altro, e che pertanto la macchia bianca di Thyle I il giorno 8 occupava una posizione notabilmente diversa dal giorno 10. Considerando dunque a parte le osservazioni di ciascun giorno, risultano le seguenti posizioni per il centro del punto bianco osservato in Thyle I:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Genn. | 8 | longit. | 150°,3 | lat. austr. 56°,7 |
| Genn. | 10 | — | 167, 2 | — 55, 9 |

e calcolando gli angoli di posizione con questi dati, risultano i numeri della colonna $p'$ i quali sottratti dai numeri $p$, cioè dagli angoli di posizione osservati, lasciano i residui della colonna intitolata $\varepsilon$. Da questi ultimi si può argomentare il grado di precisione di cui queste misure sono suscettibili e nello stesso tempo ricavare la convinzione, che realmente la macchia bianca dell' 8 era diversa da quella del 10. — La conclusione di tutto questo sarebbe 1°: che la macchia bianca indicante presso il lembo la posizione di Thyle I non occupava tutta l' area di quest' isola, ma solo una piccola parte: 2° che da un giorno all' altro la posizione di questa ha variato in modo sensibile alle osservazioni: a due giorni d' intervallo si ottennero infatti per la macchia di Thyle I due posizioni distanti fra loro 9° di circolo massimo. 3° Le due latitudini assai concordi mostrano che la sede delle due macchie era nella parte più boreale dell' isola; inoltre, che la posizione assegnata sulle nostre carte al Mare Cronio deve forse esser avvicinata di alcuni gradi all' equatore. Altre misure sporadicamente eseguite in altri giorni sopra Thyle I e II tenderebbero a confermare questi risultati e a mostrare, nelle posizioni della macchia bianca tanto dell' una che dell' altra isola, una variabilità grande e rapida. Riservo a nuove e più numerose osservazioni, e ad una investigazione più regolare e più completa la decisione definitiva intorno ad un fatto, sulla cui importanza per l'Areografia non occorre spender discorsi. Adesso dobbiamo limitarci a constatare, che per la macchia bianca polare una simile mobilità fortunatamente non ha luogo.

526. Ancora è mio dovere di notare due osservazioni di macchie bianche in alta latitudine australe, che indicherebbero l' esistenza di qualche isola ancora sconosciuta nel Mare Australe fra Thyle I e Argyre II. Le misure son queste:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Febbr. | 9 | $\omega =$ | 163°,9 | posizione 354°,3 |
| Febbr. | 12 | — | 135, 9 | — 340, 9 |

Volendo considerarle come riferibili allo stesso punto (ciò che è permesso, stantechè l' isola nuova in nessun caso potrebbe essere di grande estensione), se ne deriverebbero le coordinate longitudine 118°, latitudine australe 62°. Già le osservazioni del 1877 accennavano alla possibilità che qualche cosa di simile ad un' isola, o almeno uno spazio più chiaro, esistesse in queste parti, vedi § 185. Sulla carta la località è stata indicata con un contorno punteggiato, di cui la forma e la misura, non occorre dirlo, sono affatto ipotetiche.

## Sezione XX.

### *Esperia, Etiope, Lete.*

527. Le osservazioni di Esperia hanno dato a riconoscere uno stato di cose analogo a quello del 1879 (§ 390). Anche questa volta fu riconosciuta l'ombra che copre l'istmo superiore (28 Dicembre-7 Febbraio), e la striscia diffusa e mal terminata, che traversa la penisola sotto la latitudine di circa 22° in direzione obliqua, apparentemente continuandosi a traverso di Ausonia (26 Dicembre-4 Febbraio). L'una e l'altra di queste particolarità furono ben visibili specialmente dal 26 Gennaio al 1° Febbraio; in quest'ultimo giorno si notò che la parte di Esperia fra quelle ombre compresa era meno luminosa del resto, e press'a poco del colore di Ausonia. Anche la parte boreale diede l'impressione di minor luce rispetto alle parti continentali contigue. Una sol volta questo istmo boreale fu visto biancheggiare presso l'orlo manco (26 Gennaio).

528. L'Etiope fu sempre visibile dal 19 Novembre al 19 Aprile. In Novembre non molto appariscente, in Dicembre già più facile, in Gennaio e Febbraio bello e distinto, benchè sottile. Non ha mai offerto tracce di geminazione, e applicandovi il filo micrometrico sempre si riconobbe parallelo al meridiano. — Anche il Lete fu poco visibile in Novembre, meglio in Dicembre, distinto alla fine di Gennaio. Pare però che decrescesse più rapidamente dell'Etiope, l'ultima osservazione del Lete avendo la data del 3 Febbraio (1).

## Sezione XXI.

### *Mar Tirreno, Piccola Sirte.*

529. Sul Mar Tirreno nulla ho trovato che differisse dalle osservazioni del 1879. Sempre fu molto scuro, quasi come la Gran Sirte, che più volte fu presa qual termine di paragone (Dic. 29, Gennaio 28, Febbraio 1°, Marzo 10); come nel 1879, così nel 1882 era assai meglio terminato dal lato di Esperia e di Libia, che dal lato di Ausonia. La sua larghezza fu stimata appunto la metà di quella d'Ausonia (1° Febbraio). Non fu possibile esaminarne il termine superiore, perchè continuandosi nel larghissimo stretto detto Xanto si alzava fino a grande prossimità del lembo australe, dove le immagini eran confuse pel grande scorcio. Tutte le volte che fu dato di esaminarlo bene, non è stato possibile trovare in esso alcuna interruzione od alcun tratto più chiaro. Un'apparenza d'interruzione o di tratto meno oscuro tuttavia si presentò due volte, dirimpetto alla Libia; cioè il 25 Dicembre ($\omega = 258°$) in aria mediocre, e il 4 Febbraio ($\omega = 237°$). In quest'ultimo caso però, attendendo momenti

(1) Il Lete tuttavia, come seppi più tardi, era ancora oscuro e visibile il 13 Marzo, e fu osservato in quel giorno dal signor Burton, cf. § 542. In quel giorno a Milano l'aria fu agitata alquanto, e si osservò poco; il non trovarsi menzione del Lete nel diario può esser effetto di pura dimenticanza.

di miglior immagine, e una posizione più vicina al meridiano centrale, ebbi la prova, che tale apparenza è una illusione prodotta dal grande splendore che talvolta assume la Regione d' Iside nella parte che forma punta fra la Gran Sirte e la bocca del Nepente. L' illusione nasce quando per qualsiasi causa la luce di quella punta si confonde all' oscurità del vicino Tirreno; il risultato è una minor oscurità in una parte di questo: e perchè si produca, è necessario, o che l' ingrandimento dell' oculare sia basso, o che l' immagine sia diffusa, o che la suddetta punta della Regione d' Iside ed il Mar Tirreno contiguo si trovino a poca distanza dal lembo destro del disco, ed appaiano sotto un forte scorcio. I due disegni, in cui questo fenomeno si manifesta nel modo più saliente sono i numeri 20 e 21 dell'*Areografia* di Terby. Il n.° 20 è stato fatto da Burton il 29 Maggio 1873; il n.° 21 da Schmidt il 23 Maggio del medesimo anno. L' uno e l' altro mostrano separato il Mar Tirreno dalla Gran Sirte per mezzo di un diafragma luminoso. Ora nell' uno e nell' altro la regione in discorso è appunto nell' immediata contiguità del lembo destro; essi furono fatti in condizioni analoghe a quelle ch' io ebbi il 4 Febbraio 1882, quando sorpreso da una simile illusione, ho potuto rintracciarne la causa, semplicemente aspettando che quella parte si avvicinasse di più al meridiano centrale.

## Sezione XXII.

*Eunosto, Alcionio, Eliso, Eteria, Efesto.*

530. Circostanze atmosferiche impedirono di far osservazioni sull' Eliso prima del 26 Dicembre. Questa regione, la quale offre alcune analogie con quella di Tempe (§ 469), si presentò fin d' allora, e sempre dappoi, come un' area quasi perfettamente circolare, spesso più bianca delle regioni circostanti, incorniciata in un contorno di ombre non dappertutto ugualmente oscure e facili a determinare. La parte interiore della cornice non si è mai veduta terminata in modo preciso, salvo forse in parte dallo Stige; la luce dal bianco passa insensibilmente alla tinta più o meno scura delle strisce circostanti; ed a questa indeterminazione si deve, se l' aspetto dell' Eliso si mantiene rotondeggiante, malgrado che la cornice abbia piuttosto un andamento poligonale. Di questo contorno già si è descritto una porzione, formata dal Boreas, dallo Stige e dal Cerbero; qui non rimane ad aggiungere per questa parte, se non una circostanza, cioè che due volte, il 6 e il 7 Febbraio, mi è sembrato di vedere nell' angolo interno, compreso fra il Cerbero e lo Stige, un breve tratto nella direzione del meridiano sotto la longitudine 202°; tratto che si trova indicato nella carta, e determinerebbe il contorno dell' Eliso nella parte più orientale. Ma la relazione di questo tratto col Trivio di Caronte e col viluppo di linee che in esso s' incontrano, è rimasta sempre inintelligibile per me. Assolutamente questa parte del pianeta richiede nuove osservazioni con forti ingrandimenti ed ottime circostanze. — Con molta precisione, benchè non facile, si presentò fin dal 28 Dicembre il Galaxias, tratto estremamente sottile, che si trova proprio sul prolungamento del Ciclope I (§ 517) e seguendo la direzione del meridiano, attraversa tutto l' Eliso formando nel suo circolo una corda poco distante dal centro verso occidente. Il Galaxias fu riconosciuto

ancora l' 8 Febbraio. — Sulle colorazioni bianche dell' Eliso trovo nel diario le seguenti annotazioni.

Dic. 26 $\omega = 232°$ chiaro, ma non bianco, nella parte sinistra.
Dic. 26 $\omega = 246°$ bianco, ma non brillante.
Dic. 27 $\omega = 219°$ chiaro nella parte superiore.
Dic. 28 $\omega = 200°$ bianco chiaro.
Dic. 30 $\omega = 193°$ nella parte orientale par proprio neve, specialmente presso Cerbero.
Genn, 5 $\omega = 142°$ Eliso bianco all'orlo destro.
Genn. 5 $\omega = 193°$ chiaro, ma non brillante.
Genn. 6 $\omega = 186°$ molto bianco a destra.
Genn. 10 $\omega = 179°$ bianco.
Genn. 28 $\omega = 277°$ non vedo alcun bianco all'orlo sinistro del disco, che corrisponda all'Eliso.
Genn. 29 $\omega = 259°$ si vede biancheggiar l'Eliso.
Genn. 30 $\omega = 245°$ Eliso giallo chiaro, ma non bianco.
Genn. 31 $\omega = 252°$ non brilla.
Febr. 1 $\omega = 232°$ giallo-bianco, ma non brillante.
Febr. 1 $\omega = 242°$ è già più bianco, ma bisogna farvi attenzione.
Febr. 3 $\omega = 215°$ alquanto bianco nella parte orientale.
Febr. 3 $\omega = 237°$ un po' bianchiccio, ma pochissimo.
Febr. 4 $\omega = 237°$ niente bianco.
Febr. 4 $\omega = 246°$ comincia ad esser un po' bianco.
Febr. 5 $\omega = 239°$ un po' bianco.
Febr. 6 $\omega = 207°$ bianco in Eliso, Etiopide, Flegra e Cebrenia.
Mar. 13 $\omega = 240°$ Eliso non molto più bianco dei dintorni.
Mar. 14 $\omega = 229°$ Eliso un po' chiaro.
Apr. 21 $\omega = 222°$ Eliso non molto bianco.

Si noterà che in tutte le riferite osservazioni questa regione, benchè distinta in generale per la sua bianchezza, non presentò l'aspetto di neve brillante notato con sufficiente frequenza nel 1879. Soltanto una volta (30 Dicembre) una parte della regione presso lo Stige ed il Cerbero rifulse di luce comparabile a quella della macchia polare: e fu a destra del meridiano centrale, come tutte le analoghe osservazioni del 1879.

531. L' Eunosto fu veduto più o meno confusamente a partire dal 24 Novembre, come una striscia sfumata tangente al circolo dell' Eliso. Il 27 Dicembre apparve prolungarsi fino al Lestrigone formando l'Anteo (§ 519). Alla fine di Gennaio incominciò a determinarsi meglio; il 29 era « bellissimo e largo »; il 31 « ben visibile, non molto scuro, ma largo »; il 4 Febbraio « fu visto benissimo »; il 5 Febbraio era geminato; cioè alla striscia tangente l' Eliso se n' era aggiunta una seconda più in alto. Ambedue erano parallele, ben discernibili, piuttosto larghe, uniformi ed uguali, benchè più rossiccie che nere. Una sola, cioè l'inferiore pareva si prolungasse fino all' Alcionio; benchè vi terminasse in un modo non distintamente figurato. L' altra incontrava la geminazione, prodottasi due giorni prima, dell' Efesto, ma come vi terminasse non ho potuto decifrare. Anche qui esisteva un viluppo di ombre e di linee analogo al Trivio di Caronte. Le supposizioni più probabili sono quelle che ho tradotto in disegno sulla carta. Contemporaneamente all' Eunosto apparve geminato l'Anteo, e i due tratti dell' uno si continuavano a capello nei due dell' altro, ma quelli

dell'Anteo erano certamente assai più sottili. L' Eunosto geminato era ancora bellissimo l' 8 Febbraio. Tornata in prospetto questa regione nel mese successivo, l' Eunosto fu ancora veduto bene, quantunque la sua duplicità fosse piuttosto congetturale, che realmente osservata (13 e 14 Marzo).

531*bis*. Fra tutti i canali che formano cornice all' Eliso, il solo che incurvandosi in modo manifesto si adatti al suo contorno circolare, è quello segnato sulla carta col nome di Ibléo, che congiunge l' Eunosto collo Stretto di Anian. Esso ha dato l' esempio quasi unico (1) di una geminazione fortemente curvata; la quale cominciò a distinguersi il 27 Dicembre, in modo però molto confuso e differente dalle geminazioni ordinarie. Anzi che due linee, eran piuttosto due strisce nebulose sfumate ciascuna da ambi i lati. Il tratto I confinante coll' Eliso si discerneva più facilmente: l' altro II fu veduto distintamente poche volte e soltanto in circostanze d' atmosfera eccezionale. Il colore era grigio e il distacco dal fondo poco manifesto. Soltanto nei giorni 3, 4, 5 Febbraio credetti riconoscere maggiore precisione, specialmente nel I. Dopo quell' epoca fu veduto ancora molte altre volte, ma non si ebbe mai occasione di studiarlo con certezza. In Marzo il pianeta era già troppo lontano per un oggetto così poco spiccato; appariva come parte della cornice dell' Eliso e nulla più. — L' Ibléo separa l' Eliso da un' area di forma triangolare mistilinea, indicata sulla carta col nome di Eteria. I suoi confini lungo l' Eunosto sono sempre stati molto male determinati; l' area stessa poi non era di tinta schietta, ma piuttosto grigia. Il 29 Dicembre ho creduto di riconoscere che fosse divisa in due da una striscia alquanto più scura, all' incirca perpendicolare sul mezzo dell' Ibléo; ma essendo ritornato più volte sopra questa località, non ho più potuto trovare una conferma di quell' osservazione. — L' Ibléo è stato veduto da tutti quegli osservatori, che hanno riconosciuto la forma rotondeggiante dell' Eliso (2). La forma triangolare di Eteria trovasi ottimamente rappresentata nel disegno fatto a Parsonstown dal Dr. Boeddicker il 30 Novembre 1881 collo specchio di 3 piedi di Lord Rosse. Finalmente non sarà inutile osservare, che nel 1879 essendomi rimasto invisibile l' Ibléo, nella carta di quell' anno trovasi l' Eteria riunita all' Eliso; e ciò spiega la grande differenza di estensione e di forma che presenta l' Eliso nelle carte del 1879 e del 1881-82.

532. L' apparizione della gemina striscia dell' Efesto si potè seguire in diverse delle sue fasi. Nel 1879 quel luogo non presentava altro che un' ombra lieve e mal terminata, in cui scendevano ad immergersi l' Etiope ed il Lete; ombra che si suppose formar parte d' altr' ombra maggiore allora chiamata Golfo Alcionio. Simile pure era lo stato delle cose addì 24 Novembre 1881, e non molto diverso fu rappresentato addì 29 Dicembre in uno schizzo, che fu poi preso per base del disegno di questa parte nell' emisfero della Tavola III. Vi si vede connettersi colla fine di Eunosto un' ombra larga, pallida, e diffusa che occupa la parte settentrionale della regione detta Amenti. Quest' ombra andò poco a poco prendendo corpo ed assumendo un colore rosso cupo: il 30 Gennaio scrissi: « L' Eunosto inferiore dopo l' incontro con Lete è

(1) Un altro forse è il Gehon, la cui geminazione tuttavia non si produsse in modo distinto, vedi § 458.

(2) Dawes 1864; Knobel 1873; Boeddicker 1881; Knobel 1884.

ben largo! » Il 1° di Febbraio ciò che io chiamava Eunosto inferiore era diventato una larga striscia che si allungava quasi secondo il parallelo fra l' Eliso e il canale Thoth. La figura C della Tavola III è una copia esatta dello schizzo che ne feci sotto $\omega = 238°$; la striscia in questione vi è disegnata colle lettere $xy$. La nota seguente è aggiunta nel diario: « si è negli ultimi giorni molto oscurata la parte d' Eunosto che lambe l' orlo inferiore dell' Amenti, e forma adesso una striscia trasversale orizzontale, il cui limite superiore $xy$ è più alto dell'Astapo ». Il 2 Febbraio l' aria pessima non permise osservazioni in quella parte; ma l' indomani 3 Febbraio sotto $\omega = 256°$ ed essendo l' aria abbastanza quieta, riconobbi al primo colpo lo stato di cose figurato nelle carte, Tav. I e II; l' Efesto era in stato di perfetta geminazione. Accanto al disegno che serve di fondamento alle carte suddette, il diario pone queste note: « Vi è una doppia striscia fra l' Etiope ed il Thoth; l' inferiore è sul prolungamento dell'Astapo. Fra l' inferiore e l' Eunosto esiste un' isola triangolare che non aveva ancora veduto: l' Eunosto è più basso e va a toccare il Golfo Alcionio, ed è poco nero in questo luogo. Il canale che limita quell' isola a destra è nero e non molto largo. Il nuovo doppio canale (Efesto) non ha che fare coll' Eunosto, ne è affatto separato: l' una e l' altra delle componenti sono più larghe di tutti i canali circostanti ». Il 4 Febbraio: « sotto $\omega = 237°$ si vedono le due linee trasversali fra Etiope e Thoth e si confermano i tracciati di ieri. $\omega = 255°$ i due nuovi canali che uniscono l' Etiope con Thoth II non sono perfettamente orizzontali, ma pendono un po' abbassandosi verso destra. Posizione dei medesimi 54°,5. L' inclinazione apparente sul parallelo è di 8°; in realtà è di pochissimo maggiore. La larghezza complessiva del sistema occupa prossimamente $\frac{1}{6}$ del raggio del disco, $9° \frac{1}{2}$ all' incirca ». — Osservazioni che furono completate il giorno 5 Febbraio col notare, che le due strisce dell' Efesto erano più larghe ancora che quelle dell' Eunosto. Inoltre, essendo $\omega = 244°$, parve che le due zone dell' Efesto si prolungassero a sinistra fino a toccare la cintura circolare dell' Eliso; e che l' asse della zona inferiore fosse diretto press' a poco secondo un diametro di quella regione. — Tornata in vista questa parte del pianeta (11, 12, 13 Marzo) malgrado il diametro ridotto ad 8″ fu trovata la geminazione dell' Efesto ancora visibilissima e distinta, e parve che le strisce fossero più scure che in Febbraio. Il colore delle due strisce d' Efesto rassomigliava molto a quello notato in altre geminazioni molto larghe, una specie di rosso sporco come di ruggine o di cuoio sfibrato.

533. L'Alcionio, di cui nel 1879 non si potè avere che un tracciamento assai imperfetto, non è propriamente un golfo, ma piuttosto un lago, collocato fra Eteria e la Regione di Neith, comunicante per quattro uscite in varie direzioni. Fra queste la più visibile è quella già delineata nel 1879, che passa fra Eteria e la penisola Utopia, e conduce allo stretto d'Anian (§ 512). Altri due rami vanno all' Eunosto ed al Thoth, e furono per lo più pallidi e mal definiti; difficilissimo il quarto ramo detto Asclepio, che va alla Nilosirte. In Novembre l'Alcionio era pallido e nebuloso nè più nè meno che nel 1879; ma il 23 Dicembre era già nerissimo e distinto, e formava quella specie di cuspide o di angolo nereggiante sotto il parallelo 40°, che fu sempre veduto poi. Già allora notavasi, e più tardi fu veduto anche meglio, quel salto di tinta presso la congiunzione coll' Eunosto e col Thoth, che indica la nostra carta, e che dimostra

nel modo più flagrante quanta diversità di condizioni possa esistere nelle aree, che noi consideriamo tutte sotto il nome comune di macchie oscure o di mari. Fino al 28 Gennaio io credetti che l'Alcionio fosse tutt' uno colla Boreosirte; soltanto in quel giorno scopersi che ne era separato da un sottile istmo giallo e luminoso, simile al Ponte d'Achille, benchè assai meno lungo. Pertanto la terra triangolare d' Utopia, compresa fra l'Alcionio e la Boreosirte, non è isola, ma penisola. In Marzo il diafragma o istmo non fu più veduto, ciò che probabilmente è un semplice effetto della soverchia distanza. Tutta la disposizione di questi luoghi si è potuta esplorar bene più volte nell' intervallo dal 28 Gennaio al 4 Febbraio, e l' istmo sopratutto è stato con cura studiato, e così pure la figura di Utopia. Questa fu sempre ben terminata e lucente, e ben distaccata sul contorno nero che la circondava.

534. L'Alcionio è certamente un oggetto assai cospicuo, e fu veduto da parecchi osservatori, come si può verificare nell'*Areografia* del Dr. Terby, e nei disegni di Burton, di Knobel, e di Boeddicker; in molti dei quali è facile ravvisare la cuspide oscura, che forma il segno caratteristico principale. Nella carta di Proctor l'Alcionio è chiamato *Mare di Beer* ed in quella di Green *Mare di Delambre*. Ma la sua estensione non è tanto grande quanto finora si è supposto, la Boreosirte essendo da quello certamente separata.

## Sezione XXIII.

### *Gran Sirte e sue adiacenze.*

535. Che il vasto golfo, detto Gran Sirte, siasi presentato questa volta con qualche diversità rispetto allo stato delle opposizioni precedenti, è incontrastabile; ho già descritto le novità notate sul lato occidentale, cioè l' isola Faro, e la lunga indentazione compresa fra i due tratti geminati del Tifonio (§§ 450 e 455). Non con uguale sicurezza si può affermare che siano avvenute mutazioni sulla riva orientale. Sebbene a più riprese e specialmente nei giorni 27-28 Dicembre, 26 Gennaio, 1 e 4 Febbraio io abbia approfittato del caposaldo offerto dal Lago Meride (§ 401), ed esaminato con cura la distanza di questo lago dalla riva contigua della Gran Sirte, pure niente di positivo ho potuto decidere, o al più questo; che nell' intervallo 1879-1881 non è avvenuta nel profilo della Libia alcuna variazione comparabile a quella che indubbiamente si verificò nell' intervallo 1877-79 (§ 397). Veramente una osservazione del 4 Febbraio indicherebbe una progressiva invasione della Gran Sirte sulla Libia, essendo scritto nel diario sotto quel giorno che il Lago Meride era quasi sulla punta della Libia. Ma è certo che le osservazioni anteriori non accennano a nulla di simile. Del resto la Libia aveva conservato la stessa forma, e il suo colore rosso alquanto cupo: la sua superficie aveva un' apparenza come di tessuto peloso, o se si vuole, dava l' impressione di esser piena di minutissimi pori; sul che vedi la descrizione d'Ausonia nella sezione seguente. L' ombra che ne occupava la parte occidentale nel 1879, rimase tal quale nel 1882, e avviluppò anche questa volta il Lago Meride.

Solo il 26 Gennaio trovo che questo Lago era fuori dell'ombra. Del resto il Lago Meride fu veduto abbastanza spesso nell'intervallo dal 26 Dicembre al 4 Febbraio, alcune volte come un bel punto nero abbastanza spiccato; anzi ancora il 10 Marzo credetti ravvisarne indizio, essendo il diametro del disco ridotto a 8″,5.

536. Quella lunga e larga striscia nera, nella quale si prolunga la Gran Sirte verso settentrione, e che porta il nome di Nilosirte, mostra, rispetto al tracciamento del 1879, varie notabili diversità. E primieramente per quanto concerne la larghezza, la quale fu adesso uniforme come allora, ma notabilmente più grande. Di questo fatto ho potuto convincermi ristudiando i vecchi disegni originali, e comparandoli coi disegni e colle stime fatte nel 1881-82. Non vorrei affermare che questa maggior larghezza fosse già evidente nel Novembre; il fatto che l'Astusape fu trovato il 14 e il 17 Novembre quasi comparabile alla Nilosirte mi farebbe anzi supporre, che a quell'epoca la Nilosirte non avesse ancora raggiunto la larghezza che ebbe dappoi. Ma già il 23 Dicembre la Nilosirte pareva « infinitamente più bella » dell'Astusape, e la stessa cosa risulta dai disegni del 26, dove la Nilosirte è già larghissima. La sera del 27 Dicembre scrissi: « Ritengo che la larghezza della Nilosirte sia almeno un sesto del tratto compreso fra la bocca del Nepente e il fondo della Nilosirte stessa, dunque non meno di 8°; colore affatto nero ». Più tardi nella stessa sera, avendo dimenticato la stima precedente, trovai che la larghezza in questione poteva essere $\frac{1}{13}$ del diametro del disco, ciò che importa 7°,6. Nel giorno 28 Dicembre « la coda della Sirte è larga poco meno del Tirreno e dell'Adriatico ($\omega = 269°$) ». La stessa impressione si ricava dalle osservazioni del Gennaio e del Febbraio. Il 1° Febbraio ($\omega = 280°$) « la Nilosirte adesso è larga appunto quanto il Mar Tirreno, questo circa la metà d'Ausonia, ed altrettanto che l'Adriatico ». La quale stima è conforme ad un disegno fatto venti minuti dopo sotto $\omega = 284°$. Certamente nel 1879 non sarebbe sembrato possibile di comparare la larghezza della Nilosirte a quella del Mar Tirreno. Che la Nilosirte possa in certe epoche assumere una larghezza assai considerabile è provato dai disegni di Burton (1871, 1873) di Secchi (1858) e di Green (1873).

537. A partir dal 20° parallelo boreale la Nilosirte ha presentato una larghezza sempre uniforme. La foce dell'Astapo segnava press' a poco il punto più orientale della sua curvatura, al Nord del quale la Nilosirte declinava rapidamente verso Ovest, senza però ritornare verso settentrione. Il suo estremo inferiore era di figura rotondeggiante, ma non formava alcun rigonfiamento sensibile. In questa parte il tronco principale offrì più volte dal lato di occidente una o due protuberanze nere e piccolissime, le quali non mi è mai riuscito di veder nettamente e di delinear bene, e non sono indicate sulla carta. Suppongo fossero piccoli golfi segnanti le foci boreali di Astusape, Phison I e Phison II. Alquanto meno dubbiosa fu l'esistenza di un punto scuro nell'intersezione di Phison I e di Astabora; il qual punto oscuro coincide colla posizione assegnata nel 1879 alla palude Coloe, e deve pertanto considerarsi come un resto di quella, niente altro essendosi trovato nel 1881-82 che a Coloe si possa identificare. Data l'identità dobbiamo concludere, che Coloe, così visibile nell'opposizione precedente, abbia subito una enorme diminuzione nell'intervallo 1879-81; e che il tratto del Nilo segnato fra i punti 61*b* 61*e* sulla carta del 1879 corrisponda realmente alla metà più occidentale dell'Astabora della carta attuale. Lo stringimento

notato nel 1879 sotto il 290° meridiano (§ 398) (1) corrisponde nella carta attuale al tratto di Astusape e di Phison I compreso fra Nilosirte e Coloe. La parte di Nilosirte posta al Nord della bocca comune di Phison I e di Astusape era manifestamente invisibile nel 1879 per la soverchia obliquità della visuale. Del resto l' enorme scorcio sotto cui questa parte fu vista nel 1879 spiega abbastanza le inesattezze allora commesse nel tracciato della carta, ma rende ancor più notabile la disparizione quasi totale di Coloe nel 1881-82. — L' esistenza intermittente di Coloe sembra provata anche dalle osservazioni anteriori. Essa è molto bella e cospicua nei dischi n. 15 e 44 dell'*Areografia* di Terby, fatti dal sig. Green il 25 e il 28 Maggio 1873 con un riflettore di 9 pollici; da questi dischi pare che il Green abbia dedotto il tracciamento di Coloe nella sua carta areografica pubblicata nel volume XLIV della Società Astronomica di Londra.

538. Dell'Astusape che fu così cospicuo nella presente opposizione, forse qualche veduta si ebbe nel 1879, ma sempre fu confuso coll'Astabora, e così esso figura sulla carta per la prima volta. Distaccandosi dalla Gran Sirte insieme coll'Astabora, non va alla Palude Coloe, ma prende una direzione più vicina al meridiano, fino a che incontrando il Phison I, ritorna alla Nilosirte insieme a questo in una bocca comune. Quindi l' isola di Meroe è molto più sottile di quanto sia indicato sulla carta del 1879: il suo vero aspetto è di una mandorla con due punte al Sud e al Nord. L'Astusape nel 1881-82 fu sempre una linea curva, d' apparenza alquanto irregolare con nodi ed ondulazioni, e facile a scoprire anche in posizioni molto oblique presso il lembo. Due volte, il 14 e il 17 Novembre è detto non molto minore della Nilosirte: sul fine di Gennaio era pure bellissimo e grosso, e fu visto bene ancora l' 11 Marzo. Invece dal 23 al 28 Dicembre occorre una serie di osservazioni, in cui fu trovato sottile e ben definito, ma non così cospicuo. È dunque probabile, che l'Astusape subisca considerabili vicende nel suo grado di visibilità.

539. Di contro al termine boreale della Nilosirte, e divisa da questo per tenuissimo spazio sta la Boreosirte, macchia molto oscura ed evidente, della quale però la figura non si è potuta studiar bene in questa opposizione a cagione del troppo grande scorcio, malgrado che le sue molteplici ed estese ramificazioni occupassero una parte notabile nel lembo inferiore del disco. Il 19 Dicembre, essendo la posizione dell' asse alquanto meno sfavorevole che non fosse poi, si è potuto per l' unica volta constatare l' esistenza di un suo ramo, che sale obliquamente a latitudini boreali molto elevate, e di ciò esatta notizia potrà esser ottenuta più tardi. Sempre invece, a partir dal Dicembre, si mostrò con evidenza il ramo occidentale largo e nero, e forse non minore della Nilosirte, il quale andava verso il termine di questa, non lasciando fra le due che un sottile intervallo; questa particolarità fu constatata per la prima volta il 23 Dicembre, e dopo d' allora molte volte sino alla fine delle osservazioni. Che l'accostamento della Nilosirte e della Boreosirte non sia qualche cosa di casuale è provato da questo, che ambedue in questo luogo danno origine ad una geminazione unica,

(1) Questo stringimento è stato omesso per sbaglio nella Tavola III del 1879, si trova però indicato, benchè non in modo esatto e sufficiente, sulla Tavola IV dello stesso anno.

quella del Protonilo, del quale l'una componente deriva dalla Nilosirte, l'altra dalla Boreosirte (§ 453). Un altro ramo della Boreosirte pare abbia una relazione analoga coll'Alcionio, dal quale pure è diviso per mezzo di un diafragma affatto simile; diafragma che forma l'istmo della penisola Utopia, come già si è riferito (§ 533). Finalmente un altro ramo della Boreosirte è l'Eliconio, il quale si estende secondo il parallelo, limitando Utopia al Nord; e confluendo colla bocca dell'Alcionio, arriva allo stretto d'Anian. Si mostrò sempre nerissimo, e avuto riguardo allo scorcio si deve presumere che fosse anche molto largo. Dopo la seconda metà di Gennaio, formatasi la calotta nevata boreale l'Eliconio si presentava come confine della medesima, e come parte del Piccolo Diaframma (§ 449).

540. Dal fondo della Nilosirte esce verso levante l'Asclepio, tenuissimo ramo trovato il 26 Dicembre e osservato d'allora in poi più volte fino al 10 Marzo, nel qual giorno è detto esser stato ben visibile. L'Asclepio, come l'Astapo, si allarga in forma di tromba verso levante, ed è al par dell'Astapo, un poco inclinato; mette capo nell'Alcionio. Quanto all'Astapo, è sempre stato visibilissimo; specialmente in Novembre e in Dicembre figurava tra le cose più cospicue di quei dintorni. Corso e figura eran tali quali furon descritti nel 1879. La Regione di Neith, compresa fra l'Astapo e l'Asclepio, era molto chiara e quasi bianca il 28 Gennaio.

541. Notevoli e indubitabili cambiamenti si manifestarono nel Nepente e nella vicina Regione d'Iside. Anzitutto non ho potuto trovare del Lago Tritone, che ben debole traccia in Novembre e Dicembre. Nei disegni del Gennaio non figura più che come uno sfondo del Nepente, ed il 3 Febbraio non vi era più in quel luogo, che un insignificante allargamento del Thoth, dove mette foce nel Nepente. Nell'area occupata prima dal Tritone si formò una macchia bianca, come sarà più innanzi riferito. Al contrario crebbe il Nepente in modo assai sensibile durante la serie delle osservazioni. Il 23 e il 26 Dicembre non presentava un aspetto diverso da quello del 1879; il 27 era grosso e mal definito dal lato superiore verso la Libia; più che un canale, era un golfo largo e profondo, nerissimo e quasi comparabile alla Nilosirte. Il 28 Dicembre stimai la sua larghezza di 4° circa, cioè la metà della Nilosirte; era sfumato nel lato superiore; dal lato inferiore a destra della neve Atlantica e quasi dirimpetto al lago Meride aveva formato un'insenatura in forma di cuspide assai visibile e nera, dalla quale un ramo sottilissimo scendeva attraverso alla regione d'Iside quasi parallelo al Thoth, ma accostandosi ad esso in modo da raggiungerlo al suo confluente coll'Astapo. Sulla carta è denominato Athyr. Era benissimo definito; ma andava scemando di larghezza (o di nerezza?) verso il basso e la sua estremità inferiore era difficilissima a discernere; il suo corso pareva piuttosto sinuoso ed irregolare. Nessun altro dei così detti canali di Marte mi ha offerto un aspetto simile, e che più si avvicinasse a quello dei corsi d'acque terrestri. L'osservazione fu confermata il 29 Dicembre. — Tornata in vista questa parte, il 26, 28, 29 Gennaio, 1 e 3 Febbraio rividi il piccolo golfo acuminato; la parte australe della Regione d'Iside rimaneva da esso divisa in due promontorii o lobi rotondeggianti. Il piccolo canale Athyr fu veduto ancora tutto intiero il 26 Gennaio, la parte più grossa e più australe si potè seguire ancora per un buon tratto nei giorni 29 Gennaio, 1 e 3 Febbraio.

542. Nel giorno 3 Febbraio fu pure avvertita per la prima volta la geminazione del Thoth, che sin allora era stato visibile sì, ma non distinto, e soltanto il 29 Gennaio era diventato « molto bello ». Il Thoth I, che rappresenta l'antico corso è quello a destra, che lambe la neve Atlantica; esso era la vera continuazione del Tritone, come negli anni precedenti, e fu sempre più preciso e più visibile dell'altro, il quale lo seguiva, ma non con esatto parallelismo. Ambidue divergevano in comune dall'intersezione del Tritone col Lete, e dopo esser stati un tratto quasi paralleli, convergevano un po' verso il basso, per formare una foce comune larga, sebben non molto oscura, nell'Alcionio. Le due strisce dell'Efesto (comparso anch'esso il 3 Febbraio) si appoggiavano colle loro estremità al Thot II, e si è verificato per più d'una osservazione, che non arrivavano fino al Thoth I. Notevolissima poi fu la circostanza, che nello stesso giorno 3 Febbraio fra i due corsi del Thoth e precisamente nel luogo dove prima era stato il Lago Tritone, comparve una macchia bianca, distinta dalla neve Atlantica; questa era più ad occidente, e tutta fuori dei due rami del Thoth. Questa macchia bianca fu visibile ancora due giorni dopo, cioè il 4 e il 5 Febbraio. Abbiamo qui dunque il fatto palese della trasformazione di uno spazio prima nero in uno spazio del tutto bianco! Tale curiosa e rara osservazione acquista ancora maggior pregio dall'essere stata confermata da un altro osservatore, il signor C. E. Burton, il quale in una lettera del 5 Aprile 1882 mi scrisse quanto segue: « I could not at any time make out the *Lacus Tritonis*, which appeared on March 13 to be replaced by a brilliant white areola lying immediately to the East (1) of the *Lethes* and nearly if not quite, in contact therewith. The *Lethes* was on this date very dark and visible ». Se la macchia veduta da Burton non è stata la neve Atlantica, la sua osservazione è ben degna di ricordo sotto più riguardi. — Circa la geminazione del Thoth noteremo ancora, che essa fu verificata a più riprese ancora nei giorni 4, 5, 6 Febbraio, e che ritornata in vista questa regione, fu la sua duplicità constatata ancora fuori d'ogni dubbio nei giorni 10 e 11 Marzo. — Si può dire che la geminazione del Thoth comprende anche una parte del Tritone, cioè la sezione di questo canale posta a ponente del Lete. La sezione orientale fra il Lete ed il Mare Cimmerio fu sempre semplice. Il Tritone del resto in questa opposizione non fu così bello e deciso come nel 1879, ed anzi il 3 Febbraio, giorno segnalato per tante novità in questa regione, era poco visibile e confuso. Tuttavia esso non mancò mai, ed anzi una volta, sotto il 29 Gennaio, trovo scritto: « Tritone bello fino al Mare Cimmerio ».

543. La macchia bianca detta neve Atlantica fu visibile anche questa volta durante l'intiera opposizione; rispetto al suo splendore non mancarono variazioni, delle quali però non è sempre facile giudicare se avessero tutte fondamento di realtà, o fossero qualche volta conseguenza delle diverse circostanze in cui si faceva l'osservazione. Ecco la serie delle note che la concernono, estratte dal diario:

*Novembre* 19, $\omega = 265°$. Riveduto la neve Atlantica. — *Novembre* 24, $\omega = 252°$. Neve Atlantica piccolissima. — *Dicembre* 23, $\omega = 273°$. Ben visibile la n. A. che da poco ha passato il meridiano centrale. — *Dicembre* 25, $\omega = 266°$. Visibile con facilità anche nell'aria mediocre. —

(1) Intendi West secondo il nostro modo di designare i punti cardinali su Marte, analogo al modo usato sulla Terra.

*Dicembre* 26, $\omega = 240°$. Si vede già la n. A. — *Dicembre* 27, $\omega = 239°$. N. A. distintissima. $\omega = 293°$. Quasi invisibile, immagine ottima. — *Dicembre* 28, $\omega = 228°$. Si vede la n. A. trasformata in un semplice spazio bianco splendente di luce non vivida. $\omega = 265°$. N. A. di nuovo ben discernibile: suo diametro $^1/_3$ della lunghezza del Nepente. $\omega = 271°$. Al meridiano centrale la n. A. piccola, ma tuttavia indubitata e brillante. — *Gennaio* 21, $\omega = 332°$. N. A. bianca all'orlo manco del disco. — *Gennaio* 26, $\omega = 280°$. L'isola della n. A. è bianca, ma non vedo neve propriamente detta. — *Gennaio* 28, $\omega = 274°$. Esiste ancora la n. A., ma un altro spazio bianco vi è a destra di essa, diviso da essa per mezzo del nuovo braccio del Nepente. Delle due macchie bianche la n. A. è più bella, se ben più piccola, anzi essa soltanto ha l'aspetto di vera neve. È concentrata in uno spazietto ellittico poco diverso da un circolo nel primo dei due promontorii al Nord del Nepente: il suo diametro non supera certamente $^1/_{15}$ di quello del disco; e forse è $^1/_3$ dell'intervallo fra la Sirte e il Thoth. — *Gennaio* 29, $\omega = 259°$. Già si vede la n. A. — *Gennaio* 30, $\omega = 248°$. N. A. già visibile. — *Gennaio* 31, $\omega = 247°$. Veduta. — *Febbraio* 1, $\omega = 276°$. Vi è la n. A. ma meno brillante dell'ultima volta. — *Febbraio* 3, $\omega = 270°$. N. A. stupenda, non occupa che un piccolo spazio circolare al sommo del promontorio compreso fra il Thoth e il nuovo ramo del Nepente. — *Febbraio* 4. $\omega = 265°$. Piccola, rotonda, stupenda, brillantissima. — *Febbraio* 5, $\omega = 239°$. Si vede bene. — *Febbraio* 6, $\omega = 235°$. Ecco brillare la n. A. — *Marzo* 10. Veduta presso il meridiano centrale. — *Marzo* 11. Vi è ancora la n. A. ma è poco brillante anche al meridiano centrale.

Oltre alla neve Atlantica, altre macchie bianche ha offerto la Regione d'Iside: specialmente questo si deve dire del promontorio che fa angolo fra la Gran Sirte ed il Nepente a settentrione di questo (28 Gennaio, 4 Febbraio). Il 30 Gennaio e il 5 Febbraio era tutta bianca.

544. Dalle osservazioni del 1881-82 appare che il Nepente sia null'altro che l'ingresso comune di un triplice golfo, dei quali il più remoto dalla Gran Sirte sarebbe il Lago Tritone, gli altri due sarebbero il Lago Meride e la larga foce australe dell'Athyr. Questa struttura ramificata sembra sia già stata veduta altre volte. Nel suo disegno del 3 Ottobre 1862 il Lockyer dà a questo complesso di macchie una forma tripartita; la disposizione da lui indicata non corrisponde però a quella da me veduta. Nella sua *Areografia* pag. 50, il signor Terby cita un disegno di Warren De la Rue (20 Aprile 1856), nel quale il Nepente avrebbe due rami, o darebbe adito ad un mare composto di due lobi. Non ho veduto questo disegno e non posso dire quale corrispondenza abbiano i lobi di Warren De la Rue con l'uno o con l'altro dei tre golfi qui sopra enumerati. — Aggiungerò ancora, che la Boreosirte in una forma analoga a quella da me veduta, e l'Astapo sono chiaramente indicati dal Dr. Boeddicker nel suo disegno del 26 Dicembre 1881, fatto collo specchio di 3 piedi di Lord Rosse.

## Sezione XXIV.

### *Ausonia, Mare Adriatico, Euripo.*

545. Nella grande regione d'Ausonia ho trovato le cose com'erano nel 1879 (§§ 402-405). Era tagliata attraverso in modo assai deciso dall'Euripo, il quale anzi che uno dei soliti canali sembra esser piuttosto un'ombra sfumata in forma di striscia obliqua, analoga al taglio inferiore d'Esperia, del quale pare esser la continuazione. E forse una continuazione di esso taglio è l'ombra che divide la parte d'Au-

sonia, detta Chersoneso, dall' Ellade; ombra che più volte si mostrò assai oscura, segnatamente il 17 Dicembre e il 28 Gennaio. La parte d'Ausonia che rimane al di sopra dell' Euripo parve sempre chiara, bianco-pallida per lo più; il 27 Dicembre ($\omega = 290°$) era d' un bianco un po' brillante, il 31 Gennaio anzi era luminosa quanto la macchia polare ($\omega = 316°$); questa maggior luce dipende dalla vicinanza dell' orlo, come avviene per altre regioni del pianeta. Il 26 Gennaio presso l' orlo superiore ho visto il Chersoneso tutto imbiancato, del quale si distingueva benissimo la forma, e così pure nel giorno seguente. Rara altresì e notevole è stata l' osservazione del Golfo di Prometeo, che fu visto il 1° Febbraio come tratto sottile scuro fra Ausonia e Thyle II. Nulla ho trovato in questi luoghi a cambiare sui tracciamenti del 1879.

546. La parte inferiore d'Ausonia fu sempre assai men chiara dell' altra, talvolta giallo-pallida come la Terra di Deucalione, per lo più d' un giallo fosco, meglio terminata sul Mar Tirreno, che sul Mare Adriatico. Il 3 Febbraio è stata trovata molto men luminosa dell' Ellade ($\omega = 292°$). Il 4 Febbraio ($\omega = 262°$) ho scritto: « Tirreno bellissimo ed oscuro. Ausonia ben terminata lungo di esso, pare schiuma che vi galleggi sopra, o qualche cosa di poroso ». Una analoga sembianza di spuma o di una superficie piena di pori hanno offerto più volte anche la Japigia e la Libia. Un aspetto *fioccoso* della Japigia fu notato pure nel 1879 (§ 402). Anche nella Libia s' è visto alcunchè di simile (§ 535). Forse accrescendo la potenza del telescopio si potrebbe giudicare quello che vi è di reale in cotali singolari apparenze. — La Japigia in questa opposizione si presentò sempre con sufficiente evidenza, anch' essa presso l' orlo guadagnava in luce; per lo più era d' un giallo pallido o fosco. Lo spazio compreso fra Japigia ed Ausonia si mostrò sempre molto oscuro, e la separazione fra le due regioni era decisa e manifesta, benchè tanto il termine occidentale d'Ausonia, quanto il contorno di Japigia fosse sempre sfumato e mal definito. Anche ottimamente visibile fu l' Enotria, col suo profilo ben formato e ben preciso verso il Mar Tirreno; e più visibile fu in obliquità alquanto grandi, che presso il meridiano centrale. Il 3 Febbraio già era benissimo distinta sotto $\omega = 250°$, e il 4 Febbraio sotto $\omega = 254°$, alla distanza di circa 40° dal meridiano centrale. L' Enotria era ancora benissimo visibile il 10 Marzo. — L'Adriatico fu in questa opposizione sempre ben distinto, ma molto meno oscuro che il Mar Tirreno.

## Sezione XXV.

### *Ellade, Alfeo, e Peneo.*

547. La latitudine australe piuttosto elevata dell' Ellade, e la poca determinazione delle sue linee, non han concesso di rilevarne questa volta la figura con precisione. Sembra però che fosse ridotta ad uno spazio ancor minore che nel 1879, e che la forma, anzichè rotondeggiante, sia stata piuttosto trapezoide ad angoli arrotondati, come la carta dimostra. In generale fu ricoperta d' una tinta bianca più o men pallida, e prese talvolta l' aspetto di nube confusa; soltanto in poche occasioni e presso il meridiano centrale spogliò quella tinta, diventando giallo-fosca come la terra di Deucalione od Argyre; ed in tali occasioni fu possibile riconoscere alcune particolarità

topografiche degli anni precedenti. Il 29 Dicembre ($\omega = 287°$) si potè seguire l'intero perimetro, e fu riveduto per la prima volta l'Alfeo. Il 22 Gennaio ($\omega = 316°$) apparve anche il Peneo, e per la prima volta fu vista quadripartita, come nel 1879. Il 26 Gennaio ($\omega = 287°$) era giallo-cupa non lucente e quadripartita; l'Alfeo ed il Peneo eran manifesti. Il 29 Gennaio ($\omega = 320°$) lasciava veder con sicurezza il Peneo, e congetturar anche l'Alfeo. In questo giorno era manifestissima la forma trapezoide: così pure il 31 Gennaio, nel quale si mostrò eccezionalmente ben terminata, di colore giallo-verdognolo poco brillante.

548. In moltissime occasioni l'Ellade, trovandosi in prossimità del lembo, si rese visibile per una colorazione bianca più o meno viva; ed è notevole, che nei giorni 13 e 14 Novembre la macchia lucente sovr'essa formata appariva molto piccola e molto alta, onde ho dovuto inferire, che in quel tempo non tutta la regione avesse il medesimo colore, ma fosse più bianca e più lucida soltanto una delle sezioni più australi, e probabilmente il quadrante di Sud-Ovest, che si può anche considerare come faciente un'isola a sè. Deploro di non aver preso misure, e di non poter così fissare con maggior precisione il centro di quell'area bianca più ristretta. Quello spazio bianco del resto non era soltanto piccolo, ma anche mal terminato. Altre volte si presentò tutta l'Ellade avviluppata da una nebbia grigia e specialmente il 27 Dicembre e il 1° Febbraio; pareva allora una balla di cotone. — Come seguito alle osservazioni sull'albedine dell'Ellade riferite nel § 408 trascrivo qui le note che trovo su tale argomento nel mio diario del 1881-82. Le indicazioni *all'orlo destro, a destra* ecc. designano la posizione di Ellade rispetto all'orlo del disco di Marte nel momento di ciascuna osservazione.

| Data | $\omega$ | Annotazione |
|---|---|---|
| Nov. 9 | 335 | Ellade bianca all'orlo sinistro. |
| — 10 | 322 | bianca all'orlo sinistro. |
| — 11 | 323 | bianca. |
| — 12 | 309 | chiara e bianca. |
| — 13 | 300 | bianca la parte superiore. |
| — 14 | 290 | bianca la parte superiore, non molto brillante. |
| — 17 | 295 | in alto del disco, bianca, lucente. |
| — 18 | 273 | chiara in alto al lembo destro. |
| — 19 | 260 | bianca, ma non lucente. |
| — 24 | 252 | bianca all'orlo destro. |
| Dic. 14 | 336 | bianca all'orlo sinistro. |
| — 19 | 309 | molto bianca, ma non come neve, mal definita. |
| — 23 | 279 | bianca e chiara, ma non brillante. |
| — 23 | 295 | accostandosi al meridiano ha perduto la bianchezza; è mal terminata. |
| — 24 | 248 | bianco assai smorto. |

| Data | $\omega$ | Annotazione |
|---|---|---|
| Dic. 25 | 254° | bianco pallido. |
| — 26 | 246 | bianco poco brillante. |
| — 27 | 226 | bianca all'orlo. |
| — 27 | 288 | nebulosa, mal terminata, non brillante. |
| — 28 | 230 | all'orlo fa una piccola prominenza bianca che par quasi neve. |
| — 29 | 220 | compare all'orlo bianca quasi come neve. |
| Genn. 18 | 365 | come una nuvola bianca all'orlo. |
| — 19 | 348 | all'orlo sinistro, bigio-pallida, alquanto bianca. |
| — 21 | 330 | bianca, bella, ma non come neve. |
| — 21 | 343 | comincia a luccicare. |
| — 22 | 316 | giallo-scura, quadripartita. |
| — 22 | 340 | bianco vivo. |
| — 26 | 277 | poco brillante. |
| — 26 | 292 | giallo-cupa, non lucente, quadripartita. |
| — 28 | 262 | bianca pallida. |
| — 28 | 300 | nebbia confusa ovale. |
| — 28 | 304 | si vede meglio, fosca, mostra il suo profilo. |
| — 30 | 325 | chiara. |
| — 31 | 312 | quadripartita, ben terminata, giallo-verdognola, poco brillante. |
| Feb. 1 | 266 | avviluppata in nube, un po' gialla. |
| — 3 | 286 | nube rotonda, nebul. giallo-bigia, mal term.; pare una balla di cotone. |
| Feb. 27 | 365 | bianca, ma non lucente all'orlo manco. |
| Mar. 3 | 300 | bianca in alto del disco, ma non brillante. |
| — 5 | 295 | appena visibile. |
| — 10 | 291 | poco chiara nel limite dell'ombra. |
| Apr. 6 | 358 | bianca all'orlo manco. |

## Sezione XXVI.

*Novissima Thyle.*

549. Il 29 Gennaio, essendo $\omega = 341°,5$ vidi sopra l'Ellade all'orlo una macchia biancastra, non però brillante, che mi pareva ancora tutta dentro del disco; era molto più piccola di Argyre, della quale in quel momento imitava il colore. L'angolo di posizione in quell'istante risultò 340°,9, dalla media di due misure. Ciò conduce ad una posizione quasi identica a quella segnata sulla carta del 1879 col nome

di *Novissima Thyle*, e fornisce un nuovo argomento in addizione a quelli già riferiti nel § 409 sull' esistenza di quell' isola. Infatti assumendo per il centro di Novissima Thyle la longitudine 325° e la distanza dal polo australe 18° come sulla carta del 1879 (Tav. IV della seconda Memoria), risulterebbe per l' epoca dell' osservazione del 29 Gennaio 1882 l' angolo di posizione del detto centro 338°, il quale differisce soltanto di 3° dall' angolo osservato. Tale quantità sta nei limiti possibili dell'errore che si può aspettare dalla osservazione e dall' incertezza della posizione assunta per il centro dell' isola.

## Sezione XXVII.

### *Osservazioni generali sui risultati ottenuti in questa opposizione circa la topografia del pianeta.*

550. Comparando le carte annesse alla presente Memoria con quella del 1879 si vedrà che un passo abbastanza importante si è fatto nella cognizione della zona del pianeta compresa fra i paralleli 20° e 50° di latitudine boreale. Ma, anche astraendo dal fenomeno delle geminazioni, il quale necessariamente dev' essere transitorio e probabilmente è periodico, anche nelle regioni equatoriali ed australi si ottennero risultati non privi d' interesse. Fu riacquistato definitivamente l' Hiddekel, e riveduto il Fonte di Gioventù, che non erano più stati riconosciuti nel 1879. Tutte le isole polari australi furono rivedute senza eccezione, col favore della bianchezza che le distinse nella prossimità dell' orlo. Si è potuto avere una analisi più completa e più sicura delle vaghe e pallide forme del Mare Eritreo. Nella zona equatoriale si acquistò la prima notizia dell' Idraote, dell'Anubi, dell'Astusape, dell' Efesto, dell'Athyr, dell'Anteo, dell'Averno, dell' Orco, dell' Erinni e dell' isola Cimmeria. Per la prima volta si è potuto aver un' idea qualunque di ciò che sta sotto il Mare delle Sirene fra 100° e 160° di longitudine; e fino ad un certo punto è stato risoluto il Nodo Gordiano.

551. Circa le variazioni delle forme che presenta il pianeta, le nostre nozioni sono tuttavia ancora fragmentarie ed imperfette; ma anche in questa parte qualche cosa si è potuto imparare. Continuate e confermate le osservazioni anteriori sulle variazioni di colore e specialmente sul candore più o meno pronunciato che certe regioni assumono sotto grandi obliquità. Notabili sono le novità osservate nella Terra Elettride, come pure la disparizione quasi completa di Coloe, le curiose vicende intorno al Nepente ed al Lago Tritone. Ma niente di tutto questo è comparabile al fatto delle geminazioni, al quale sembrano coordinarsi altri fatti di segmentazione, come la divisione di Argyre e del lago Niliaco, e la troncatura del Corno d'Ammone. Qualche relazione pure sembrano aver col fatto delle geminazioni quegli strani ponti o diaframmi che sono distribuiti intorno al pianeta sotto i paralleli 40° e 50°, e di cui il Ponte d'Achille è il modello più perfetto e più facile a studiare. Sopra tutto quello, che concerne le geminazioni e i fenomeni loro correlativi, ho raccolto le notizie generali in una sezione apposita del Capitolo seguente.

# CAPITOLO III.

## Osservazioni concernenti la natura della superficie e dell'atmosfera di Marte.

### Sezione I.

### *Macchia polare australe.*

552. Le osservazioni della macchia polare australe non furono questa volta di molta importanza. Sei mesi prima dell'opposizione essa si presentava in prospettiva ancora molto favorevole, ma la grande distanza del pianeta non permise di farne esatte misure: soltanto ne fu a varie riprese stimata l'ampiezza angolare, e da queste stime risultò quello che già si era potuto constatare nel 1877, cioè un rapido decremento di essa nei mesi immediatamente contigui al solstizio estivo di quella regione. Tali estimazioni sono comprese nella tabella che segue.

| Data 1881 | Dal solstizio australe giorni | Diametro angolare della macchia polare australe |
|---|---|---|
| Giugno 17 | — 8 | circa 25°. |
| — 19 | — 6 | meno di 30°. |
| — 20 | — 5 | circa 20°. |
| — 24 | — 1 | 15°, visibile, ma piccola. |
| — 29 | + 4 | appena visibile, aria cattiva. |
| — 30 | + 5 | certamente non sorpassa 10°. |
| Luglio 12 | + 17 | 10° al più, visibile. |
| — 16 | + 21 | forse 15°, bella cospicua. |
| — 18 | + 23 | forse 15°, bella. |
| — 29 | + 34 | difficilissima. |
| Agosto 18 | + 54 | incerta. |

La qual serie, benchè osservata mentre il pianeta si trovava a grande distanza dalla Terra, e sotto un'inclinazione dell'asse già alquanto lontana dal suo *maximum* (1),

(1) Soggiungo qui l'inclinazione dell'asse del pianeta sul piano del circolo terminatore della vista, e il suo diametro apparente per alcune epoche dell'intervallo, in cui le precedenti osservazioni furono fatte. Il polo visibile è stato sempre l'australe.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1881 | 1° Giugno | inclinazione | 22°,9 | diametro apparente | 5″,6 |
| — | 1° Luglio | — | 17, 8 | — | 6, 1 |
| — | 1° Agosto | — | 10, 3 | — | 6, 8 |
| — | 1° Settembre | — | 2, 5 | — | 7, 8 |

pure conferma, o almeno non contradice le serie analoghe ricavate dalle opposizioni 1862 e 1877, esposte nei §§ 211 e 213. Ma il polo australe, durante i mesi estivi del 1881 si venne rapidamente accostando al circolo terminatore, che oltrepassò l'11 Settembre, e rimase d'allora in poi nascosto nell'emisfero invisibile, e non emerse da questo che d'un paio di gradi per tutto il tempo che durarono le osservazioni della presente opposizione, cioè dall'Ottobre 1881 all'Aprile 1882 (1). Nessuna meraviglia quindi, che la macchia polare australe sia rimasta perpetuamente occulta durante tale intervallo. Di quando in quando si presentarono bensì al lembo australe del pianeta diverse macchie bianche o biancastre, che avevano tutta l'apparenza di una macchia polare. Ma un esame delle medesime, accompagnato da misure, fece comprendere, che quelle erano semplicemente or una, or un'altra delle isole australi già note del pianeta, cioè Thyle I e II, Argyre I e II, Novissima Thyle ed Ellade, così biancheggianti presso l'orlo per effetto d'una proprietà che sembra inerente a quelle regioni, e della quale ho già discorso in più luoghi delle Memorie precedenti.

553. Dall'invisibilità della vera macchia australe anche nei mesi di Gennaio e Febbraio 1882, quando il corrispondente polo s'inoltrò nell'emisfero visibile per circa 2° è permesso trarre qualche congettura sul limite possibile d'estensione della macchia stessa in quell'epoca. Infatti noi possiamo ammettere, che il suo centro si trovasse, come al solito, a 6° circa dal polo in una longitudine non molto diversa da 30°, tale essendo stato il luogo di questo centro nelle opposizioni 1830, 1862, 1877, 1879 (v. § 413). Ora tal punto passò al meridiano centrale più volte durante le osservazioni da me fatte, segnatamente nelle sere 17, 18, 19, 21, 22 Gennaio, che contano fra le più belle di questa opposizione; esso ha dovuto in questa occasione inoltrarsi di circa 8° dentro al circolo terminatore della vista. Non essendo diventata visibile la macchia nei suddetti giorni, malgrado le ricerche da me espressamente fattene (2) ne concludiamo, che in quell'epoca, cioè sette mesi dopo il solstizio australe, la macchia in questione non era maggiore che non fosse nell'Ottobre 1879, nel qual mese essa fu osservata più volte (con fatica ed incertezza, è vero) a distanze dal terminatore minori di 8° o ben poco maggiori, come si può vedere nella serie di osservazioni esposta § 416. In quel tempo il suo diametro è stato stimato per lo più di 10° (§ 425). Tale è dunque il limite di grandezza, al di sotto del quale possiamo congetturare fosse la macchia australe *sette* mesi dopo il solstizio estivo del corrispondente emisfero. L'epoca del suo *minimum* che nel § 426 con molta incertezza si stimava potesse esser protratta fino a $3\frac{1}{2}$ o 4 mesi dopo il solstizio australe, è resa da queste considerazioni vieppiù incerta, e può darsi che abbia luogo anche più tardi.

(1) Vedi sopra § 438.

(2) Nel mio giornale d'osservazione trovo scritto sotto il 21 Gennaio 1882, essendo $\omega = 13°$, questa annotazione: *E mai nessuna neve in alto!* L'aria era stupenda, e pochi minuti prima ho notato di aver visto nel 6° satellite di Saturno (Titano) un disco sensibile, cosa che non mi è mai avvenuta nè prima nè poi.

## Sezione II.

### *Macchia polare boreale.*

554. Un' apparenza di bianco nella parte più boreale del lembo del pianeta non mancò mai durante le osservazioni di questa opposizione. Non si tardò tuttavia a constatare, che queste apparenze non provenivano da una macchia polare unica, e di posizione stabilmente fissata sul pianeta. Oltre ad esser per lo più pallide, mal terminate e molto variabili di splendore e di ampiezza, il sensibile cambiamento che subiva il loro angolo di posizione in poche ore dimostrava una distanza relativamente grande dal polo. Inoltre la sequenza irregolare delle loro apparizioni e il fatto che più d' una volta due se ne videro simultaneamente a poca distanza l'una dall' altra, rendeva evidente che tutte queste osservazioni non si riferivano ad un medesimo oggetto, ma che, attesa la poco favorevole posizione dell' asse, comparivano successivamente al terminatore diverse ramificazioni delle nevi boreali, in maniera analoga a quanto già era stato osservato, sebbene imperfettamente, nel 1879. L' esame accurato della cosa ha fatto anzi vedere che i diversi rami erano questa volta sostanzialmente identici per forma e disposizione, a quelli veduti nel 1879 e studiati nei §§ 428-435, benchè in generale non si spingessero nel caso presente ad una distanza polare così grande, come nel 1879. Questo stato di cose tuttavia durò soltanto fino verso la metà di Gennaio. Incominciarono dopo questo termine i rami a farsi più corti e più splendenti; e il 26 Gennaio, dopo alcuni giorni di tempo non sereno, tutto il bianco polare apparve per la prima volta raccolto in una massa unica compatta e sufficientemente regolare, ben contornata e di posizione stabile; le quali proprietà poi si conservarono fino alla fine di Aprile, quando la grande distanza del pianeta pose un termine alle osservazioni. Dobbiamo pertanto distinguere nella presente discussione due periodi: il primo, quello delle ramificazioni sparse, comprende le annotazioni fatte dal 26 Ottobre al 22 Gennaio; il secondo, quello della macchia polare unica, si estende dal 26 Gennaio al 22 di Aprile. Le osservazioni del 1° periodo divideremo poi secondo i diversi rami già notati nel 1879, e che come allora si designeranno coi numeri I, II, III, IV, V, VI.

555. *Ramo I.* Appena intraveduto nel 1879, questo ramo si potè adesso osservare con qualche maggior precisione a tre diverse riprese, cioè dal 3 al 14 Novembre, dal 14 al 19 Dicembre, e il 17-18 Gennaio. In Novembre e Dicembre ne furono misurati i seguenti angoli di posizione, riferibili a quel punto (naturalmente piuttosto indeterminato) che ciascuna volta si presentava come centro della porzione apparente. Nel quadro seguente e negli altri analoghi che seguiranno, $\omega$ rappresenta la longitudine areografica del centro del disco, $p$ l' angolo di posizione misurato dell' area bianca, $P$ l' angolo di posizione della parte boreale dell' asse di Marte in quel momento.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nov. | 9 | $\omega = 333°,1$ | $p = 352°,5$ | $P = 341, 9$ | $p-P = +\ 10°,6$ |
| Dic. | 14 | 339, 2 | 348, 2 | 339, 5 | $+$ 8, 7 |
| Dic. | 14 | 349, 6 | 339, 5 | 339, 5 | $=$ 0, 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dic. 14 | 8, 3 | 333, 6 | 339, 5 | — 5, 9 |
| Dic. 14 | 50, 4 | 322, 4 | 339, 5 | — 17, 1 |
| Dic. 14 | 56, 2 | 325, 0 | 339, 5 | — 14, 5 |
| Dic. 19 | 9, 3 | 336, 9 | 339, 5 | — 1, 6 |
| Dic. 19 | 21, 0 | 329, 9 | 339, 5 | — 8, 6 |

risultati che si possono tollerabilmente rappresentare, ammettendo come centro della parte visibile di questo ramo il punto di cui la longitudine è 358° e la distanza dal polo boreale 20°. Da questa posizione l'identità generale di questo ramo col ramo I del 1879 è bene comprovata, soltanto pare che nel 1879 fosse alquanto più lungo, altrimenti non avrebbe potuto essere osservato con l'obliquità dell'asse che allora ebbe luogo. Le osservazioni seguenti del Gennaio

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gennaio | 18 | $\omega =$ 3°,2 | $p =$ 333°,0 | $P =$ 333°,2 | $p$-$P =$ — 0°,2 |
| — | 18 | 32, 2 | 331, 0 | 333, 2 | — 2, 2 |
| — | 18 | 43, 4 | 326, 9 | 333, 2 | — 6, 3 |

darebbero press' a poco la stessa longitudine, ma una distanza dal polo assai minore cioè 6° o 7° al più. Ciò non vuol già significare che il ramo si stendesse solo a tale distanza dal polo, ma che a tale distanza fu dall'osservatore stimato trovarsi il centro comune del ramo stesso (forse già di molto accorciato) e della macchia o calotta centrale. Infatti già allora questa era in via di formazione, o piuttosto di sensibile aumento. Poichè nei giorni 17 e 18 Gennaio il ramo già considerato è descritto come raccolto, bello e brillante; caratteri che poi si videro appartenere alla calotta polare, la quale apparve completamente formata 8 giorni dopo, cioè il 26 Gennaio. — Alcune altre misure di posizione fatte nei giorni 19, 20, 22 Gennaio già talmente si accostano a quella posizione che doveva allora avere la calotta polare, che si può ammettere in tali giorni il ramo I esser quasi totalmente scomparso, o piuttosto agglomerato colla massa principale, che allora appunto si andava formando intorno al polo.

556. Eccetto che nelle osservazioni del 17-22 Gennaio, il ramo in discorso parve di estensione piuttosto indeterminata e di bianco non molto intenso; nelle misure di esso (come degli altri rami) si mirò sempre alla parte più chiara presso il lembo, non tenendo conto dei suoi prolungamenti accidentali e straordinarii, che talvolta giunsero a toccare l'equatore del pianeta. Più volte infatti fu veduto partire dalla porzione bianca del lembo inferiore una striscia bianca pur essa attraverso alla regione che sulla carta è chiamata Cidonia, e passato il Deuteronilo, spingersi in alto, un po' obliquamente rispetto al meridiano, fra il Gehon e l'Hiddekel. Ecco le note prese sopra questo curioso fenomeno.

9 *Novembre*, $\omega = 4°$. La neve del ramo I è fra Gehon ed Eufrate, e pare si avanzi un poco obliquamente traversando il Deuteronilo. — 9 *Novembre*, $\omega = 10°$. La striscia bianca formata dal ramo I in questo momento ha una direzione, il cui prolungamento tende esattamente verso Argyre. — 10 *Novembre*, $\omega = 341°$. Decisamente la neve del ramo I spinge una striscia sopra il Deuteronilo, senza interromperlo; o almeno sopra di questo vi è una macchia bianca fra Eufrate, Oronte e Gehon in direzione obliqua. $\omega = 346°$. Il ramo I forma una stupenda striscia a lati paralleli, che arriva fin presso il vertice d'Aryn. $\omega = 350°$. La striscia bianca suddetta tende quasi al centro del disco, in quel luogo l'angolo col meridiano centrale, dal medio di due misure, risulta essere 16°,4. Larghezza, secondo il disegno, 8° circa. — 11 *Novembre*, $\omega = 342°$. La neve del primo ramo si pro-

lunga in striscia verso l'alto come ieri, ma è interrotta dal Deuteronilo il quale l'attraversa e la taglia. — 12 *Novembre*, $\omega = 330°$. Il ramo I sembra spingere ancora la sua striscia verso Sud-Ovest e verso il vertice d'Aryn. — 14 *Novembre*, $\omega = 330°$. Vi è ancora traccia della striscia nevata del ramo I, ma poco manifesta. — 14 *Novembre*, $\omega = 337°$. Si vede ancora la parte più bassa della suddetta striscia, come una linea bianca obliqua, sottilissima e appena visibile. — 14 *Dicembre*, $\omega = 342°$. La neve del ramo I spinge ancora una striscia bianca a traverso del Deuteronilo, verso il vertice d'Aryn; il Deuteronilo è largo e pallido, ma dove quella neve lo attraversa è appena visibile.

Ritornata in vista questa regione il 17 e 18 Gennaio, si nota che la neve del primo ramo è « piccola, raccolta e brillante » ma della striscia non si fa più parola. Veggasi in fine di questa Memoria la carta destinata ad illustrare il presente fenomeno e gli altri analoghi che sono stati osservati (Tav. III). Del resto un bagliore bianco sulla regione Cidonia è stato notato anche assai più tardi sotto le date del 27 Febbraio e del 6 Aprile, quando la grande macchia polare era già intieramente formata e regolarmente definita nel suo contorno.

557. *Ramo II.* Questo fu osservato quasi tutte le volte che si presentarono in vista le regioni intorno al 60° meridiano (1-8 Novembre, 9-14 Dicembre, 8-21 Gennaio). A causa della sua forma male determinata le poche misure prese del medesimo non si accordano bene fra di loro:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nov. | 2 | $\omega = 53°,3$ | $p = 342°,9$ | $P = 341°,3$ | $P-p = +\ 1°,6$ |
| Gen. | 8 | 99, 6 | 318, 4 | 334, 5 | — 16, 1 |
| Gen. | 9 | 88, 0 | 323, 2 | 334, 4 | — 11, 2 |
| Gen. | 11 | 74, 5 | 323, 2 | 334, 1 | — 10, 9 |

dalle quali si ricaverebbero: longitudine 57° e distanza polare 24° come coordinate del centro della parte osservata. Anche questo ramo si prolungò a distanze dal polo assai maggiori di quella, che or ora fu indicato. La regione detta Tempe fu bianca molte volte, e in più altre occasioni (2, 3, 4 Novembre, 9 Dicembre, 8, 12, 13, 18 Gennaio) una lunga striscia molto regolare, larga 8° o 10°, a lati perfettamente paralleli fu vista attraversare Tempe e Tharsis con corso alquanto obliquo rispetto al meridiano da Nord-Est a Sud-Ovest, per andar a finire nell'angolo compreso fra l'Iride e l'Agatodemone presso il Lago della Fenice. È precisamente quel medesimo fenomeno, che osservato da me il 26 Dicembre 1879, si trova descritto nei §§ 351 e 430, e delineato nella Tavola VI, figura 5ª della precedente Memoria. Trascrivo qui le note più interessanti che lo riguardano.

2 *Novembre*, $\omega = 62°$. C'è di nuovo la striscia bianca parallela al Chrysorrhoas. Essa continua anche a traverso dei due Nili e del canale della Fortuna; è indubitato il suo nesso colla neve boreale (ramo II). Pare adesso una corda bianca tesa obliquamente; ma il suo bianco non è brillante come quello d'Argyre. — 3 *Novembre*, $\omega = 42°$. Comincia a vedersi la striscia bianca a traverso dei due Nili: sembra che essa continui pure a traverso della striscia scura sotto Tempe, la quale è quasi invisibile nel luogo dell'incontro. — 3 *Novembre*, $\omega = 59°$. La striscia bianca pare meno visibile di ieri e sembra proiettarsi in questo momento esattamente secondo una linea retta. — 4 *Novembre*, $\omega = 50°$. C'è ancora la striscia bianca, ma si vede con difficoltà. Nebbia, imagine assai mediocre e buia per giunta. — 8 *Novembre*, $\omega = 68°$. Compare la striscia bianca solita a destra, ma solo sotto il doppio Nilo. — 9 *Dicembre*, $\omega = 84°$. La striscia bianca è completa, e vince col suo albore tutti i canali che attraversa. — 9 *Dicembre*, $\omega = 114°$. Splende meravigliosamente tutta la striscia bianca di Tempe e di Tharsis. — 14 *Dicembre*, $\omega = 56°$. La striscia solita non si

vede più. — 8 *Gennaio*, $\omega = 100°$. Fra il Lago della Luna e il Golfo Ceraunio la solita striscia bianca. — 12 *Gennaio*, delineato la striscia bianca sul disegno fatto sotto $\omega = 73°,7$. — 13 *Gennaio*, $\omega = 81°$. La striscia bianca è splendidissima sotto il Tanai; il pezzo fra il Tanai ed il Dardano è anche molto bello. — 18 *Gennaio*, $\omega = 50°$. La striscia bianca di Tempe e Tharsis è sottile brillante, stupenda. — *Gennaio* 19, $\omega = 82°$. Stupendamente visto il doppio Nilo, come fili grigi attraverso campi di neve. — 20 *Gennaio*, $\omega = 49°$. Un po' di bianco in Tempe. — 21 *Gennaio*, $\omega = 66°$. Neve in nessun luogo, salvo che presso il polo boreale e in Tempe attraverso il Dardano. — 24 *Febbraio*, $\omega = 38°$. Bianco fra Tanai e Nilokeras.

La forma della striscia quale risulta dal complesso delle descrizioni e dei disegni è tracciata sulla carta della Tavola III. — Il bel fenomeno non fu più veduto in tutta la sua magnificenza dopo il 18 Gennaio. Tracce sensibili di bianco in Tempe si notarono bensì ancora sotto le date del 24 Febbraio e del 30 Marzo; anzi il 30 Marzo il bianco si prolungava ancora in Tharsis, e la forma di striscia era ancora manifesta.

558. *Ramo III.* Veduto a più riprese (1-4 Novembre, 9-14 Dicembre, 6-13 Gennaio); pare fosse meno brillante che nel 1879. Fu misurato, per quanto lo permise la sua forma poco bene determinata, e la sua lunghezza molto variabile:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nov. | 1 | $\omega =$ 62°,6 | $p =$ 6°,8 | $P =$ 341°,2 | $P-p =$ | + 25°,6 |
| — | 2 | 74, 4 | 351, 8 | 341, 3 | | + 10, 5 |
| — | 3 | 52, 1 | 1, 2 | 341, 4 | | + 19, 8 |
| — | 4 | 57, 2 | 7, 2 | 341, 5 | | + 25, 7 |
| Dic. | 9 | 96, 2 | 348. 1 | 340, 4 | | + 7. 7 |
| — | 9 | 105, 4 | 346, 8 | 340, 4 | | + 6, 4 |
| — | 14 | 14, 2 | 21, 8 | 339, 5 | | + 42, 3 |
| Gen. | 6 | 123, 8 | 328, 9 | 334, 9 | | — 5, 0 |

da questi dati è difficile dedurre risultati ben concordi, e manifestamente l'osservazione del 14 Dicembre non appartiene a questo ramo. Esclusa questa, le altre si possono rappresentare in modo sufficiente ammettendo 115° come longitudine e 28° come distanza polare del centro della massa bianca visibile. Onde appare anche questa volta essersi il ramo III dilungato dal polo più dei precedenti. Il suo prolungamento verso Sud-Ovest tuttavia, che nel 1879 era stato assai manifesto, non ebbe più luogo in modo così evidente: soltanto il 2 Novembre, il 9 e 14 Dicembre e il 13 Gennaio se ne videro deboli tracce nello stesso luogo e nella stessa direzione che fu notata nel 1879. La neve Olimpica, che dipende certamente da questo ramo, e che per un mese intero aveva brillato nel 1879 (§ 370), questa volta più non comparve; al che può anche aver contribuito la distanza molto maggiore di Marte dalla Terra. Dopo la formazione della calotta polare sulla fine di Gennaio, il ramo III scomparve affatto, o almeno non trovo di averne notato osservazioni.

559. *Ramo IV.* Di esso si hanno nel 1881-82 poche e non molto certe osservazioni. Le due note che si possono riferire a questo ramo sono del 5 e del 10 Gennaio, ed altro non fanno che constatarne l'esistenza in un luogo poco diverso da quello, che con abbastanza sicure determinazioni era stato fissato nel 1879: ma non

si può dedurne alcuna notizia circa la sua estensione verso l'equatore. Le osservazioni son queste:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gen. | 5 | $\omega = 153°,0$ | $p = 331°,1$ | $P = 335°,0$ | $p-P = -3°,9$ |
| Gen. | 10 | 150, 9 | 334, 8 | 334, 2 | + 0, 6 |

da cui risulterebbe una longitudine di 150° circa. Forse a questo ramo era collegato un albore che si notò qualche volta nella regione segnata col nome d'Arcadia fra il Sirenio e il Titano (V. § 504).

560. *Ramo V.* Qualche traccia di esso fu notata il 26 Ottobre. Più tardi in fine di Dicembre fu veduto meglio, e anche al principio di Gennaio: ma se n'ebbero poche e non molto concludenti osservazioni.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Dic. | 30 | $\omega = 193°,2$ | $p = 336°,2$ | $P = 336°,2$ | $p-P = \pm 0°,0$ |
| Gen. | 5 | 193, 4 | 330, 6 | 335, 0 | — 4, 4 |
| Gen. | 6 | 183, 9 | 331, 2 | 334, 9 | — 3, 7 |

onde risulta, che un ammasso bianco si trovava nei dintorni del 185° meridiano, senza che si possa assegnare a qual distanza dal polo. Il 6 Gennaio era grande e brillante. Le osservazioni che abbiamo assegnato ai rami IV e V possono anche interpretarsi ammettendo che fra le longitudini 140° e 200° nell'intervallo dal 30 Dicembre al 10 Gennaio il perimetro della calotta polare fosse già press'a poco formato nei limiti e nell'estensione che fu poi osservata dopo il 26 Gennaio. Col ramo V può forse aver relazione il color bianco così frequente nell'Eliso. Il 7 Febbraio ($\omega = 207°$) si notò nelle regioni di Flegra, dell'Eliso e dell'Etiopide una serie di aree bianche, le quali nel loro insieme davano l'aspetto di una striscia obliqua simile per disposizione e per inclinazione a quelle notate come dipendenti dai rami I e II.

561. *Ramo VI a.* Nella precedente Memoria § 434 abbiamo designato col nome di *Ramo VI* un insieme di masse bianche estese per 70° di longitudine dal 230° al 300° meridiano, le quali però non sempre furono visibili tutte simultaneamente. Nell'attuale opposizione tale ramo apparve diviso per lo più in 3 masse o rami secondarii, che dobbiamo esaminare uno ad uno. Il primo nell'ordine delle longitudini, che chiameremo VI *a*, fu più bello e più visibile degli altri, ed apparve fin dal primo giorno delle osservazioni (26 Ottobre); esso non mancò nei successivi ritorni di quella parte del pianeta, cioè il 22 e 24 Novembre, nei quali giorni era bianco splendido; e il 24, 25, 26, 27 Dicembre nel quale intervallo fu notato come molto largo e brillante. Ne ho fatto le seguenti misure.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ottob. | 26 | $\omega = 142°,4$ | $p = 362°,5$ | $P = 340°,4$ | $p-P = +22°,1$ |
| Dic. | 24 | 248, 0 | 324, 4 | 337, 4 | — 13, 0 |
| — | 25 | 257, 9 | 326, 4 | 337, 2 | — 10, 8 |
| — | 26 | 230, 7 | 335, 6 | 337, 0 | — 1, 4 |
| — | 27 | 224, 0 | 336, 8 | 336, 8 | ± 0, 0 |
| — | 27 | 237, 0 | 331, 4 | 336, 8 | — 5, 4 |
| — | 27 | 275, 9 | 321, 3 | 336, 8 | — 15, 5 |

dalle quali emerge con discreta sicurezza la sua longitudine 227° e la distanza dal polo del centro apparente 23° a un dipresso. È possibile che da questo ramo VI *a* dipenda il bagliore bianco che talvolta in questa opposizione fu notato sulla regione d'Iside; con esso forse può anche aver relazione la neve Atlantica, così notabile per

la sua persistenza. Ma una vera striscia obliqua e regolare, come quelle dei rami I e II non fu qui mai veduta.

562. *Ramo VIb.* Questo cominciò a rendersi distinto il 17 Novembre; il 19 era assai chiaro. Fu riveduto nei giorni 23 e 25 Dicembre, e misurato come segue:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Dic. | 23 | $\omega = 273°,4$ | $p = 328°,3$ | $P = 337°,6$ | $p$-$P = -\ 9°,3$ |
| — | 23 | 279, 0 | 327, 3 | 337, 6 | — 10, 3 |
| — | 23 | 289, 0 | 324, 3 | 337, 6 | — 13, 3 |
| — | 23 | 304, 6 | 325, 3 | 337, 6 | — 12, 3 |
| — | 23 | 312, 3 | 323, 9 | 337, 6 | — 13, 7 |
| — | 25 | 255, 7 | 338, 1 | 337, 2 | + 9, 9 |

e di qui si ricava, per il centro della parte visibile la posizione long. 255°, distanza dal polo 25°. Questo ramo fu visto connettersi coi suoi collaterali, confondendosi con essi; cioè il 14 Novembre col ramo seguente VI *c*, il 29 Dicembre col precedente VI *a* ed in queste occasioni l'area bianca occupava sul lembo una grande estensione. Forse con questo ramo è connessa la striscia bianca, che il 30 Gennaio fu veduta occupare l'isola Meroe e la riva orientale d'Aeria sulla Gran Sirte fino al Corno d'Ammone: striscia, che nella parte compresa fra la foce australe dell'Astabora e il Corno d'Ammone fu notata anche altre volte (cf. § 450).

563. *Ramo VIc.* Questa terza suddivisione del ramo VI fu osservata bene soltanto dall'11 al 19 Novembre; nel giorno 14 pareva connettersi in alte latitudini coi vicini rami VI *b* ed I; nel giorno 18 aveva raggiunto una notevole estensione. Nel Dicembre non ne rimasero che dubbiose tracce il giorno 23. Più tardi non fu veduto o almeno non è stato possibile considerarlo come distinto dal ramo VI *b*. Dall'insieme delle note prese risulterebbe ch'esso trovavasi sotto il meridiano 300°, senza che si possa assegnare il suo limite in latitudine. A questo ramo, o al precedente, o forse ad ambidue si connette con probabilità una striscia bianca che più volte fu veduta correre obliquamente in Arabia, analoga a quelle notate in relazione coi rami I e II; sulla quale riferisco le seguenti notazioni del diario originale.

23 *Dicembre*, $\omega = 309°$. Una lievissima striscia bianca va dalla neve del ramo VI a traverso il Protonilo a destra di Coloe, e s'introduce fra il Phison e l'Eufrate arrivando sin quasi al lago Sirbonide. A traverso di essa si vede bene il Protonilo inferiore come bella linea sottile, ma il superiore rimane invisibile per adesso. Più tardi ($\omega = 318°$) furono veduti ambidue benissimo attraverso alla striscia bianca. — 27 *Dicembre*, $\omega = 298°$. Vedute benissimo le due componenti del Protonilo, vi son debili tracce di una striscia bianca tra Phison ed Eufrate a traverso di quelle, la quale accenna alla neve polare boreale in direzione obliqua da Sud-Ovest a Nord-Est. — 28 *Dicembre*, $\omega = 306°$. La solita striscia bianca tra Eufrate e Phison scende obliquamente; a traverso di essa i due Protonili appaiono sottilissimi, ma poi si allargano a destra e a sinistra del luogo d'intersezione. La striscia pare diretta alla neve polare del ramo VI, la quale però è press'a poco invisibile. — 29 *Dicembre*, $\omega = 306°$. Si vede la striscia bianca tra l'Eufrate e il Phison, ma non arriva più alto (cioè più al Sud) dell'Astabora. — *Gennaio* 21, $\omega = 330°$. Vi è del bianco sopra il Protonilo fra la Gran Sirte e il Lago Ismenio. — 22 *Gennaio*, $\omega = 320$. Vi è del bianco fra la Nilosirte e il Lago Ismenio. — 26 *Gennaio*, $\omega = 297°$. Una bella striscia bianca larga 8° circa fiancheggia a destra i due Phison gemelli, tenendosi loro parallela, e va a terminare sulla terra di Edom; essa parte dalla neve boreale. — 28 *Gennaio*, $\omega = 304°$. Ecco la striscia bianca, che dalla neve boreale va alla terra di Edom. Essa lascia però vedere i canali che attraversa.

Da questo insieme di notizie risulta, che tale striscia bianca fu veduta dal 23 Dicembre fino al 28 Gennaio tutte le volte che l'Arabia e le regioni sottoposte si trovarono in posizione opportuna per le osservazioni.

564. Più d'una volta è avvenuto che fossero visibili al lembo contemporaneamente due dei rami fin qui descritti, sotto forma di due macchie polari distinte: cosa del resto, di cui varii esempi si avevano anche nelle osservazioni del 1879 (vedi la Tavola V annessa alla prima Memoria, dischi dell' 8 e dell' 11 Novembre 1879). Nel diario 1881-1882 è notata la simultanea apparizione dei rami V e VI*a* il 26 Ottobre; di II e III il 1° Novembre e il 9 Dicembre: di I e II il 3 Novembre; di VI*c* e I l' 11 Novembre: di VI*c*, I, II il 14 Novembre; di VI*b* e VI*c* il 17 e il 19 Novembre: di VI*a* e VI*b* il 25 e il 28 Dicembre. In alcune di tali circostanze però, si è potuto tracciare presso l' ultimo lembo del pianeta la connessione di due rami consecutivi nelle alte latitudini boreali, ciò che nel 1879 non s' era veduto:

12 *Novembre*, i rami VI*c* ed I pare siano connessi, o almeno il loro intervallo non sembra molto oscuro. — 14 *Novembre*, la connessione fra i medesimi rami VI*c* ed I risulta dal disegno fatto sotto $\omega = 328°$. — 14 *Dicembre*, pare che i rami I e II partano da una stessa massa centrale. — 25 *Dicembre*, i due rami VI*a* e VI*b* sono distinti, tuttavia paiono connessi nelle parti più vicine al polo.

Queste osservazioni sono importanti perchè danno il mezzo di farsi un' idea dell' estensione che aveva in Novembre e in Dicembre il nucleo centrale o polare, da cui come raggi di una figura stellata dobbiamo supporre si dipartissero i diversi rami bianchi finora considerati. Basta per ciò combinar questi risultati con quelli delle esperienze fatte nel 1879 sulla visibilità della macchia polare australe; i quali si possono compendiare dicendo, che affinchè una regione bianca come le macchie polari ed alquanto estesa manifesti al lembo la sua esistenza, bisogna che estenda il suo confine almeno fino a 10° o 12° dal circolo terminatore (§§ 415-425). Ciò ammesso, e tenendo conto della posizione del polo boreale di Marte durante le osservazioni qui sopra riferite, se ne potrà concludere, che nel giorno 11 Novembre 1881, il golfo compreso fra i rami VI*c* ed I ha dovuto estendersi verso il polo boreale fino ad una distanza di circa 5°, mentre non ha potuto d' altrettanto avvicinarsi a quel polo nei giorni 12 e 14 Novembre. E similmente, che il golfo compreso fra i rami I e II il 3 Novembre ha dovuto spingersi verso il polo fino a 5° circa, mentre il 14 Dicembre probabilmente non ha potuto raggiungere il parallelo distante di 8° dal polo stesso. Il fatto poi, che nel Novembre e nel Dicembre, anche quando il polo boreale era avanzato di alcuni gradi entro il terminatore (§ 438) si videro così spesso separati due rami consecutivi, dimostra che i golfi frapposti sempre si spinsero fino a pochi gradi dal polo, e che pertanto durante quei mesi il nucleo della calotta polare ha dovuto essere d' assai piccola estensione, se pure esisteva. È possibile infatti, che le macchie bianche da noi considerate come rami di una calotta polare unica fossero in realtà macchie separate fra loro da intervalli scuri ed isolate da ogni parte.

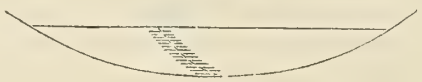
565. In Gennaio però cominciano a manifestarsi in tutto il sistema delle macchie bianche i segni di una progrediente concentrazione. Le diverse macchie rappresentanti sul lembo di Marte i varii rami, fanno, in conseguenza della rotazione del pianeta, digressioni a destra e sinistra sempre minori, e i loro angoli di posizione

mostrano deviazioni sempre più piccole dalla direzione del polo. Queste deviazioni, che in Novembre e Dicembre arrivavano fino a 20° e 25°, si riducono a pochi gradi verso la metà di Gennaio. Da ultimo, la serie delle ombre e delle linee rappresentanti il Piccolo Diaframma essendo diventata sempre più oscura ed apparente, formò in permanenza una corda nera nella parte boreale del disco, e la macchia bianca si ritirò nei confini del segmento così formato, riempiendolo da prima quasi tutto, poi ritirandosi successivamente, in modo da occupare spazi sempre minori intorno al polo, rimanendo però costantemente centrata sul medesimo (§ 441). Questa metamorfosi si trovò compiuta nelle sue linee essenziali il 26 Gennaio, nel qual giorno si potè considerare la calotta polare come interamente formata, e suscettibile di misure esatte per determinare la direzione dell'asse (§ 439). Tuttavia neppure in questo secondo periodo delle osservazioni può dirsi che la forma sia stata proprio sempre regolare, e la sua intensità uguale per tutto; come può rilevarsi dalle seguenti annotazioni del diario.

26 *Gennaio*, $\omega = 273°$. Il limite della calotta nevata è formato da una zona oscura; nella calotta vi è un gruppo più splendente del resto. — 28 *Gennaio*, $\omega = 266°$. Il segmento inferiore pare tutto pieno di neve compatta, solida, e brillante. — 29 *Gennaio*, $\omega = 259°$. Neve boreale solida; non riempie però tutto il segmento, e pare più forte in mezzo. — 29 *Gennaio*, $\omega = 320°$. Le nevi sono sottilissime nella direzione verticale, benchè estese trasversalmente. — *Gennaio* 31, $\omega = 252°$. La neve boreale è divisa in due metà uguali da una striscia oscura; il che si può vedere col favore della nebbia, che ha oscurato il pianeta (1). — *Febbraio* 1, $\omega = 228°$. L'intensità non è uguale, ma la bianchezza forte. Pare divisa così come nella figura A. In *a* vi è la massima luce. Di nuovo osservata sotto $\omega = 241°$ si presenta come nella figura B. Sotto $\omega = 270°$ non appar regolare, ma

Fig. A

Fig. B



è compatta. — *Febbraio* 2, $\omega = 221°$. La neve boreale ha un nucleo principale, esteso forse 30°, e compatto come al solito. — *Febbraio* 3, $\omega = 232°$. Più densa a sinistra, che a destra. — *Febbraio* 6, $\omega = 225°$. La neve ha un solco oscuro dirimpetto all'Eliso; è poco nero e poco largo, ma sicuro, e va proprio attraverso tutto il segmento fino ai confini del lembo. Questa divisione passa al meridiano centrale sotto $\omega = 230°{,}2$. — *Febbraio* 10, $\omega = 190°$. Neve divisa in mezzo precisamente da una linea oscura parallela all'asse di Marte. — *Febbraio* 17, $\omega = 86°$. Neve non simmetrica, ma più intensa a sinistra. — *Marzo* 10, $\omega = 284°$. Neve non simmetrica, ma più intensa a sinistra. — *Marzo* 13, $\omega = 240°$. Il segmento in basso è chiaro, ma non par tutta neve.

Dal 31 Gennaio al 10 Febbraio dunque la calotta polare presentò tre spaccature nel suo perimetro, nelle longitudini 252° (31 Gennaio), 230° (1 e 6 Febbraio), e 190° (10 Febbraio), le quali s'inoltrarono certamente fin presso il polo. La prima di esse forse rappresenta l'antico golfo fra i rami VI*a* e VI*b*; la seconda è senza dubbio il resto del golfo compreso fra i rami V e VI*a*; della terza nulla per adesso

(1) Quando la nebbia oscura leggermente il pianeta, il bianco brillante della macchia polare spicca assai più sul fondo del campo. Mi è avvenuto di veder la macchia polare sola, essendo press'a poco invisibile il resto.

si può congetturare. Queste spaccature non è tuttavia probabile fossero permanenti: se così fosse avrebbero dovuto presentarsi più spesso.

566. Il diametro angolare della calotta bianca è stato stimato molte volte nel solo intento di giudicare se di essa l'estensione andava crescendo o diminuendo. Tali stime sono comprese nel quadro che segue, dove la seconda colonna indica i giorni dal solstizio estivo boreale (negativi quando l'osservazione precede il detto solstizio); la seconda dà la quantità $\omega$, cioè la longitudine areografica del centro del disco durante l'osservazione, la terza il diametro stimato: nell'ultima sono compendiate le note sull'aspetto della macchia bianca.

| Data 1882 | Dal solstizio estivo boreale giorni | $\omega$ | Diametro estimato | Annotazioni |
|---|---|---|---|---|
| Genn. 28 | — 148 | 266° | 45° o 50° | certo meno di 60°. |
| — 28 | — 148 | 287 | 35 o 40 | solida e brillante. |
| — 29 | — 147 | 259 | forse 45 | salda, pare più forte in mezzo. |
| — 30 | — 146 | 247 | 50 | compatta. |
| — 30 | — 146 | 334 | 45 | compatta. |
| — 31 | — 145 | 248 | 30 | brillante, ma più piccola oggi. |
| Febb. 1 | — 144 | 223 | al più 35 | |
| — 1 | — 144 | 270 | 30 | non regolare, ma compatta. |
| — 1 | — 144 | 334 | circa 45 | compatta e bella. |
| — 2 | — 143 | 221 | 30 | compatta come al solito. |
| — 3 | — 142 | 215 | forse 30 | |
| — 3 | — 142 | 295 | circa 35 | compatta e regolare. |
| — 4 | — 141 | 198 | circa 45 | in pieno giorno. |
| — 4 | — 141 | 234 | circa 50 | bella densa. |
| — 4 | — 141 | 249 | circa 40 | bella lucente. |
| — 5 | — 140 | 240 | 35 o 40 | |
| — 6 | — 139 | 186 | 45 | |
| — 7 | — 138 | 200 | circa 45 | |
| — 7 | — 138 | 226 | 30 o 35 | |
| — 8 | — 137 | 167 | circa 45 | |
| — 9 | — 136 | 165 | circa 40 | |
| — 10 | — 135 | 154 | 45 | bella, compatta. |
| — 11 | — 134 | 145 | 40 | |
| — 12 | — 133 | 172 | 35 | |
| — 13 | — 132 | 131 | circa 50 | |
| — 16 | — 129 | 100 | circa 40 | |
| — 17 | — 128 | 86 | al più 30 | debole e irregolare. |
| — 22 | — 123 | 45 | forse 30 | |
| — 23 | — 122 | 42 | non più di 20 | però ben compatta. |
| — 24 | — 121 | 33 | al più 15 o 20 | bella bianca. |
| — 27 | — 118 | 5 | solo 20 | però larga e compatta. |

| Data 1882 | Dal solstizio estivo boreale giorni | $\omega$ | Diametro estimato | Annotazioni |
|---|---|---|---|---|
| Febb. 28 | — 117 | 344° | circa 40° | |
| Marzo 3 | — 114 | 300 | non più di 30 | molto sottile. |
| — 5 | — 112 | 295 | al più 30 | |
| — 10 | — 107 | 260 | circa 30 | non simmetrica. |
| — 14 | — 103 | 224 | 35 | |
| — 15 | — 102 | 215 | 40 | |
| — 16 | — 101 | 204 | 30 | |
| — 17 | — 100 | 200 | al più 30 | |
| — 18 | — 99 | 186 | circa 35 | |
| — 19 | — 98 | 178 | circa 30 | |
| — 29 | — 88 | 65 | . . . . . | poco luminosa. |
| — 30 | — 87 | 55 | . . . . . | indistinta. |
| Apr. 2 | — 84 | 30 | al più 20 | |
| — 4 | — 82 | 0 | circa 20 | molto compatta. |
| — 6 | — 80 | 358 | circa 30 | larga, bella, compatta. |
| — 19 | — 67 | 244 | 40 | ben visibile, ellittica. |
| — 21 | — 65 | 222 | 20 | ellittica. |

Queste stime manifestamente non possono essere di molta precisione, prima perchè in esse sogliono occorrere errori costanti, secondo perchè le due punte del segmento bianco non si vedevano egualmente bene in tutti gli stati dell'atmosfera, ed anche gradatamente andavano a perdersi nel bagliore del lembo. Fatta però anche abbondante considerazione di queste circostanze, una cosa tuttavia rimane indubitata, cioè che il segmento bianco apparso per la prima volta in forma completa e regolare il 26 Gennaio aveva ad ogni modo un diametro assai maggiore di quel che potesse avere il nucleo centrale polare nei mesi di Novembre e di Dicembre, nucleo che in nessun caso ha potuto arrivare a 20° di ampiezza, e probabilmente fu inferiore d'assai a questo limite (§ 564). La calotta polare veduta dopo il 26 Gennaio non fu dunque semplicemente il risultato della soppressione dei rami più sopra descritti, ma piuttosto nacque dal restringersi e addensarsi i medesimi intorno al detto nucleo, decrescendo forse alquanto in lunghezza, ma crescendo in larghezza in modo da riempire i golfi frapposti, o da lasciarne più deboli e passeggere tracce, visibili talvolta sotto forma di spaccature della calotta bianca, altrimenti divenuta tutta continua fino a 20° o 25° dal polo. In questa trasformazione è avvenuto un fatto della massima evidenza ed importanza, ed è questo: che la somma delle aree bianche non solo, ma anche lo splendore delle medesime è stato molto maggiore dopo il 26 Gennaio, che non prima. Ed infatti, quantunque nel Novembre e nel Dicembre la posizione del pianeta fosse più favorevole alla vista delle regioni boreali, e quantunque il diametro apparente del pianeta fosse sempre maggiore che nel Febbraio e nel Marzo, pure la somma di bianchezza veduta nella parte boreale del disco sotto forma di ramifica-

zioni avvicendate fu incomparabilmente minore di quella che poi apparve dopo il 26 Gennaio nel grande e lucido segmento, a cui l'osservatore ha attribuito tanto maggiore ampiezza, e che ha così spesso designato cogli epiteti di bello, solido, compatto, brillante. Or l'equinozio del pianeta avendo avuto luogo l'8 Dicembre 1881, e il solstizio boreale il 25 Giugno 1882, pare inevitabile la conseguenza, che per l'emisfero nordico di Marte la massima dispersione dell'albore polare sotto forma di rami sparsi verso l'equatore può bensì aver avuto luogo pochi mesi dopo il solstizio invernale di quelle regioni, come ho creduto di congetturare nel 1879 (§ 435); ma la massima intensità del medesimo tanto rispetto all'area occupata, quanto rispetto a splendore dell'unità di superficie, non ha avuto luogo che un mese e più dopo l'equinozio di primavera, e soli cinque mesi prima del solstizio estivo boreale. Il quale massimo corrisponde ad una calotta regolare del diametro di 40° o alquanto più, concentrica al polo: ed è seguito da una diminuzione dapprima lenta (come risulta dal quadro qui sopra), che poi si va accelerando verso il solstizio suddetto, (come da quanto s'è veduto in altre opposizioni è manifesto). — Riassumendo, dobbiamo inferire, almeno fino a nuove e più complete osservazioni su questo argomento, che il crescere periodico della macchia boreale non si fa in modo continuato e regolare, come il suo decremento. Dal minimum essa non giunge al maximum per piccole e continuate addizioni consecutive di nuove aree bianche intorno al suo perimetro; ma conservando un piccolo diametro, poco a poco si formano intorno ad essa diverse ramificazioni irregolari, che possono estendersi a 30° o 40° dal polo nei primi mesi dopo il solstizio australe, siccome si è constatato nel 1879. Le quali poi accorciandosi e condensandosi, formano la calotta polare soli cinque mesi prima del solstizio estivo o boreale: ed a quest'epoca corrisponde non solo il maximum d'estensione, ma anche il maximum d'intensità delle aree bianche. — Osservazioni future mostreranno, se un simile modo di formazione abbia luogo anche per la macchia polare australe.

567. Nella Tavola III si è tentato di coordinare graficamente in modo plausibile i pochi dati che sullo stato della macchia polare boreale si è potuto dedurre dalle osservazioni di Novembre e Dicembre 1881. Al di là del parallelo 60° la delineazione è in gran parte congetturale, ed ha soltanto lo scopo di render più chiara la portata delle deduzioni ottenute sull'estensione e sulla forma delle aree bianche e dei golfi interposti. Non si può aspettare qui alcuna esattezza di particolari; i diversi rami non si presentavano per lo più al lembo inferiore che come un bagliore informe e mal definito, e quand'anche i contorni fossero stati più precisi, il grande scorcio di prospettiva non avrebbe permesso un rilievo accurato. — Invece con qualche esattezza si poterono rappresentare le strisce oblique bianche, delle quali sopra si è fatto menzione: di esse tre sono perfettamente formate, di larghezza uniforme [1] e di corso regolare, e sono quelle che toccano l'equatore nelle longitudini 5°, 95°, e 350°; ipotetica è l'assimilazione con queste delle altre due meno continue, meno

[1] Questa larghezza uniforme si è creduto bene di doverla conservare nel disegno, mentre la natura della proiezione avrebbe richiesto che le strisce si allargassero verso l'equatore. L'adempire a questa condizione avrebbe dato all'insieme della figura un aspetto troppo strano e contrario al vero.

regolari e meno estese, una delle quali corre lungo il lato occidentale della Gran Sirte fino al Corno d'Ammone, l'altra taglia obliquamente il 125° meridiano. — La distribuzione e l'andamento di tali strisce può dar materia a qualche riflessione, e specialmente il corso delle medesime, che per tutte senza eccezione è diretto verso Sud-Ovest in modo da rappresentare una serie di spirali partenti da un medesimo polo. Si presenta qui tosto la congettura, che tal direzione obliqua sia connessa col moto rotatorio del pianeta, e la teoria dei venti alisei ricorre subito alla mente. Se (come dalla variabilità del fenomeno parrebbe) trattasi qui di processi di origine atmosferica, la poca inclinazione di quelle curve rispetto ai meridiani di Marte farebbe concludere a movimenti di grande velocità. L'andamento continuo ed elegantemente curvo di quelle strisce potrebbe altresì far pensare che i movimenti dell'atmosfera di Marte siano più regolari, e meno disturbati da circostanze accidentali, che quelli dell'atmosfera terrestre. Si osserverà ancora, che tali strisce non si continuano sulle aree oscure dette mari, e lasciano vedere in traverso del loro corso anche i così detti canali. Ciò sembra indicare, che esse realmente subiscono interruzione su quelle aree oscure; è chiaro infatti, che se questo non fosse, il loro candore dovrebbe essere più rilevato sul fondo oscuro dei mari, che sul giallo o sul rosso delle parti più chiare del pianeta, anche dato che elle fossero parzialmente trasparenti. Quindi, anzichè masse di nubi, io sarei inclinato a ravvisare in esse il risultato di una precipitazione atmosferica, una specie di brina o di neve più rara; la quale soltanto sopra aree solide potrebbe mantenersi per settimane o mesi, e sulle aree liquide (dato che mari siano) sarebbe immediatamente assorbita o distrutta.

## Sezione III.

### *Sul fenomeno delle geminazioni.*

568. Quantunque nel riferire le osservazioni particolari fatte sulle singole regioni del pianeta (§§ 443-551) sia stata descritta particolarmente ciascuna delle geminazioni che in quelle si produssero; utile tuttavia ed opportuno è sembrato di riunire qui insieme quelle notizie che le riguardano in generale. Con tale intento è stato disposto il quadro seguente nel quale le geminazioni stanno ordinate secondo l'epoca in cui apparvero, od in cui è stato possibile pronunziare con certezza sopra la loro esistenza. La prima colonna contiene il numero d'ordine, e il nome della geminazione. Nella seconda è indicato il giorno in cui furono osservate per la prima volta, od i giorni in cui si può ritenere diventassero apparenti per successivi gradi. Nella terza è indicata la data dell'ultima osservazione, in cui la linea od il canale in questione fu veduto, senza che se ne avvertisse la geminazione. Nella quarta colonna è indicato quale delle due linee era sola visibile prima della geminazione, e si può quindi fino a nuovo avviso, considerare come principale o normale. L'ultima indica finalmente se la geminazione è stata *perfetta,* cioè composta di due linee ben nette ed esattamente tracciate, parallele od equidistanti: diversamente, se è stata *anomala,* se cioè vi fu qualche difetto di parallelismo o di conformazione; o se è stata *imperfetta,* se cioè le linee non apparvero tracciate con nettezza e con precisione, e con

piena uniformità; o se è stata *incerta,* non osservata in modo sufficiente per stabilire il carattere di quell'oggetto.

QUADRO *delle geminazioni osservate in Marte durante l'opposizione 1881-82.*

| Numero e nome | Data della prima osservazione di geminazione | Data dell'ultima osservazione di linea non geminata | Quale dei due tratti fu prima osservato | Carattere della geminazione |
|---|---|---|---|---|
| 1. Protonilo | 19 Dicembre | 12 Novembre | . . . . . | perfetta |
| 2. Ismenio | 23 Dicembre | 12 Novembre | . . . . . | perfetta |
| 3. Cerbero | 27 Dicembre | . . . . . | . . . . . | perfetta |
| 4. Ibléo | 27 Dicembre? | . . . . . | il più orientale | anomala |
| 5. Nilo | 11 Gennaio | 8 Gennaio | il più boreale | perfetta |
| 6. Nilokeras | 11 Gennaio | 10 Gennaio | . . . . . | imperfettissima |
| 7. Ceraunio | 13 Gennaio | 12 Gennaio | il più occidentale | imperfetta |
| 8. Oronte | 18 Gennaio | 18 Dicembre | il più boreale | anomala |
| 9. Jamuna | 19 Gennaio | 18 Gennaio | il più occidentale | perfetta |
| 10. Gange | 19 Gennaio | 12 Gennaio | il più orientale | perfetta |
| 11. Tifonio | 21 Gennaio | 28 Dicembre | il più boreale | perfetta |
| 12. Eufrate | 21 Gennaio | 19 Gennaio | il più occidentale | anomala |
| 13. Phison | 21 Gennaio | 19 Gennaio | il più orientale | perfetta |
| 14. Serpentino | 22 Gennaio | . . . . . | il più orientale | incerta |
| 15. Gehon | 30 Gennaio | 21 Gennaio | il più occidentale | imperfetta |
| 16. Efesto | 3 Febbraio | 1 Febbraio | . . . . . | perfetta |
| 17. Thoth | 3 Febbraio | 29 Gennaio | il più occidentale | anomala |
| 18. Erebo | 5 Febbraio | 3 Febbraio | il più boreale | perfetta |
| 19. Averno | 5 Febbraio | 9 Gennaio | . . . . . | perfetta |
| 20. Ciclope | 5 Febbraio | 4 Febbraio | il più occidentale | perfettissima |
| 21. Anteo | 5 Febbraio | 4 Febbraio | il più boreale | perfetta |
| 22. Eunosto | 5 Febbraio | 4 Febbraio | il più boreale | perfetta |
| 23. Gigante | 9 Febbraio | 7 Febbraio | il più boreale | perfetta |
| 24. Eumenide | 10 Febbraio | 7 Febbraio | il più australe | perfetta |
| 25. Orco | 10 Febbraio | 9 Febbraio | . . . . . | perfetta |
| 26. Acheronte | 11 Febbraio | 10 Febbraio | il più boreale | perfetta |
| 27. Piriflegetonte | 12-18 Febbr. | 10 Febbraio | . . . . . | incerta |
| 28. Titano | 12-13 Febbr. | 11 Febbraio | il più occidentale | incerta |
| 29. Sirenio | 13 Febbraio | 12 Febbraio | il più occidentale | imperfetta |
| 30. Idraote | 22 Febbraio | 20 Gennaio | il più australe? | perfetta |

Sono in tutto 30 geminazioni, così ripartite:

| | |
|---|---|
| Perfette . . . | 19 |
| Anomale . . . | 4 |
| Imperfette . . | 4 |
| Incerte . . . | 3 |

Il numero delle geminazioni perfette avrebbe forse potuto ancora accrescersi d'alquanto, e scemare quello delle imperfette e delle incerte, se fosse stato possibile continuare le osservazioni in Marzo ed in Aprile in circostanze di buona atmosfera e con un diametro sufficiente del disco. Per un certo numero di geminazioni è stato impossibile indicare quale delle due linee abbia preceduto l'altra nel rendersi visibile. Alcune furono trovate mentre già erano in stato di geminazione: di altre invece non fu abbastanza sicura la comparazione collo stato anteriore.

569. Riguardo agli intervalli di tempo determinati dalle date contenute nelle colonne 2ª e 3ª del quadro precedente, non si può sempre ritenere che segnino i limiti dell'epoca della reale nascita di ciascuna geminazione. Infatti più d'una volta ha potuto avvenire, che alle epoche assegnate nella colonna 3ª la geminazione già esistesse, ma non sia stata avvertita, o per troppa difficoltà dell'oggetto stesso, o per essere l'atmosfera non abbastanza tranquilla, o per non esser l'osservatore abbastanza attento. Vi sono tuttavia alcuni casi incontestabili, in cui la geminazione si venne a produrre quasi, per così dire, sotto gli occhi dell'osservatore: tali sono quelli dei numeri 7, 9, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 25, 23, 30, per le quali si hanno limiti abbastanza sicuri per l'epoca origine, ed anzi in certi casi è stato possibile constatare quest'epoca entro 24 ore di tempo. Quando si rifletta, trattarsi qui di strisce larghe forse 100 chilometri, o non molto meno, e lunghe 1000 e spesso assai più, la rapidità con cui si producono modificazioni così estese non potrà non destare seria attenzione.

570. Come già si è avuto occasione di notare più volte nel descrivere specialmente alcune delle geminazioni, il fenomeno dello sdoppiamento non è già un effetto ottico prodotto da ciò che migliori circostanze di visione abbian permesso di scindere in due una linea anteriormente e a torto considerata come unica, come avviene per esempio nelle stelle doppie molto strette; nè ancora si produce da ciò che una linea o striscia molto larga si divida longitudinalmente in due; ma dipende semplicemente dall'*addizione* di una linea nuova, prima non visibile, a lato di un'altra già esistente. Tutti i casi di geminazione che è stato possibile analizzare con qualche precisione (Eufrate, Phison, Jamuna, Gange, Ciclope, Thoth, Tifonio, Idraote) hanno condotto a questo risultato. La nuova linea è per lo più uguale e parallela (equidistante) alla prima: in alcuni casi però fu sensibile una piccola differenza d'aspetto (Idraote, Acheronte, Erebo, Tifonio, Thoth) e talvolta anche una piccola divergenza di direzione (Eufrate). La distanza delle due linee ha variato dall'ultimo limite accessibile al potere risolvente del telescopio (4° all'incirca) a 10° e 12° di circolo massimo; ve n'è qualcuna (particolarmente il Lestrigone) di cui ho potuto sospettare la duplicità, ma la distanza minore di 4° non permetteva di giungere alla completa certezza, riducendosi il tutto ad una striscia larga ed un po' confusa. Talvolta una linea era divisa in due tratti di disuguale oscurità e larghezza (Anteo, Eunosto, Jamuna); anche la linea compagna allora mostra una diversità consimile. Quando una linea è divisa in più parti da intersezioni con altre linee, può avvenire che sia geminata solamente una parte e l'altra no (Idraote, Acheronte).

571. Rispetto alla larghezza delle linee così raddoppiate, mi pare di poter distinguere due categorie. Alcune geminazioni constano di due tratti sottilissimi (Phison,

Eufrate, Jamuna) talora tanto sottili da esser appena visibili (Averno, Orco, Anteo), separate da un intervallo molto maggiore della loro grossezza: queste generalmente mi parvero tracciate in colore più oscuro, in alcuni casi proprio nere (Ciclope, Jamuna). Altre invece sono formate di due tratti o strisce larghe fino a 3°, separate da un intervallo uguale o non molto maggiore della loro propria larghezza; ne sono esempi notabili l'Idraote (parte occidentale) il Ceraunio, il Gigante, l'Eumenide, l'Eunosto, e sopra tutti l'Efesto. Non sono più due linee nereggianti, ma piuttosto due zone colorate, talvolta anche assai leggermente, di una tinta rosso-bruna, la quale in alcuni casi (Ceraunio, Gigante) assai poco si distaccava dal fondo. Sebbene questa distinzione in due classi sin qui addotta per comodità, tuttavia non si vuole sostenere che non ci possan esser casi di transizione o intermedii (inclinerei per esempio a considerar come tale il Cerbero e il Ciclope stesso) o che una geminazione di una classe non possa trasformarsi in una dell'altra. Si hanno ad ogni modo esempi di geminazioni di una classe continuate nella direzione identica da una geminazione dell'altra: esempi Anteo-Eunosto, Idraote-Nilo. È probabile inoltre che il colore delle due classi differisca non per la qualità, ma per l'intensità, come si vede nei disegni fatti coll'inchiostro della China, dove la medesima materia ha servito a tracciare linee nerissime e a coprire larghi spazi di tinte variamente intense e porgenti tutte le possibili diversità di chiaroscuro.

572. Nell'incontrarsi di queste coppie di linee due a due è stato osservato un rinforzo di tinte pel caso del Gigante e dell'Eumenide (§ 499): almeno parve di ravvisare quattro punti più neri nelle quattro intersezioni. Certissima poi è l'osservazione fatta sopra le due larghe liste componenti il Ceraunio, le quali apparivano di color rossiccio più oscuro nei luoghi dov'erano intersecate dall'Uranio, dai due Nili e dall'Acheronte. Vi sono alcune regioni sul pianeta dove tali coppie s'intersecano in più di due, e vi producono una rete poligonale: tali sono il così detto lago Sirbonide (Eufrate, Phison, Tifonio-Oronte): il Lago della Luna (Nilokeras, Chrysorrhoas, Nilo, Gange, Idraote): il Nodo Gordiano (Sirenio, Eumenide, Gigante, Gorgone, Piriflegetonte): il Trivio di Caronte (Lestrigone, Erebo, Cerbero, Orco, Tartaro, Stige, Hades) e alcuni altri di meno importanza. Di questi uno almeno (il Lago della Luna) in altra epoca si è presentato coll'aspetto caratteristico delle regioni appellate mari (opposizione 1879). Lo studio di questi nodi e delle loro mutazioni strane e molto sensibili potrà esser molto istruttivo: sfortunatamente è difficilissimo, trattandosi di particolari minuti e numerosi raccolti in piccolissimo spazio.

573. Le geminazioni, che nel quadro qui sopra sono designate come perfette, mostrano una regolarità assoluta e in apparenza affatto geometrica, nei loro tracciamenti; completa è l'uniformità nella larghezza dei tratti e del loro intervallo; uguale dal principio alla fine la tinta, salvi i casi d'intersezione poco fa indicati. Alcune di esse che ho potuto esaminare con maggior successo (Ciclope, Eufrate, Phison, Jamuna, Efesto) non hanno presentato nelle loro delimitazioni la più piccola irregolarità sensibile all'amplificazione 417, e neppure alcun sospetto di essa. Insomma paiono lavoro di riga o di compasso. Questa proprietà, come pure l'esser loro transitorio e probabilmente periodico, non permette di assimilar queste formazioni con quelle permanenti e di carattere geografico, quali sono per esempio i così detti *mari*, i con-

torni variamente curvati dei continenti, le isole, ed i laghi propriamente detti, come quello del Sole. Sembra anzi (ed esprimo questa opinione con tutta riserva) che anche in quelle geminazioni, di cui una linea già esisteva intieramente tracciata in opposizioni anteriori (esempi: Eufrate, Jamuna, Efesto) il fatto della duplicazione abbia avuto effetto di togliere alla linea preesistente tutte le piccole irregolarità che in essa eran state prima osservate. L' Eufrate I del 1882 coincideva certamente, quanto a termini e corso, coll' Eufrate del 1879; ma in esso erano intieramente scomparse le piccole ondulazioni notate nel 1879 (§ 327). Lo stesso dicasi della Jamuna. la quale nel 1879 non era nè di larghezza uniforme, nè di corso affatto immune di irregolarità (§ 335), e tuttavia dritta ed uniforme apparve nel 1882 quando si trovò associata alla Jamuna II (§ 462). Similmente l' Efesto prima della geminazione formava una macchia oblunga alquanto irregolare, che geminata si trasformò in due strisce di perfetta uniformità e di completo parallelismo. E il Thoth, quando fu geminato, perdette intieramente quel suo rigonfiamento, che formava prima il Lago Tritone.

574. Qualche volta è stato possibile avvertire fenomeni preparatorii o fasi successive del processo di geminazione. In parecchi casi il canale fu veduto accrescersi e diventar più largo o più visibile prima di esser geminato; questo fu specialmente manifesto nella geminazione dell' Eufrate. Altre geminazioni fecero emergere le due linee da una striscia nebulosa (Ceraunio, Nilo, Nilokeras, Protonilo); o già esistendo ben descritta una delle due linee, a lato di essa comparve un annebbiamento, origine della seconda linea (Gange e probabilmente anche Gehon). Ho già descritto più sopra (§ 494) l' analogo processo con cui dall' ombra diffusa detta Nodo Gordiano emersero poco a poco le doppie strisce che in quella regione s' intersecano. Dall' insieme delle osservazioni parrebbe risultare, che tale stato di nebulosità sia una condizione generale della produzione di geminazioni; non conviene però intendere, che si tratti qui di oggetti celati da nebbie o da alcun che di simile, i quali si vadano discoprendo. Da tutte le osservazioni che ho fatto mi pare anzi di poter giudicare, che quanto ci appare sotto aspetto di nebulosità non costituisca un *ostacolo* alla visione di oggetti preesistenti, ma sia piuttosto da riguardarsi come *materia* in cui si vanno pronunziando forme regolari che prima non esistevano. Piuttosto che ad una nebbia, la quale scomparendo ci lasci vedere cose prima occulte, si può comparare quel processo di formazioni ad una moltitudine di soldati prima confusamente sparsi, i quali poco a poco si vadano ordinando in linee od in colonne. Se questo è vero, dovremo ancora concludere, non esser le geminazioni cose permanenti e indissolubilmente connesse colla superficie solida del pianeta; ma piuttosto formazioni variabili, determinate però da accidenti geografici permanenti della superficie, e quindi capaci di riprodursi periodicamente in un medesimo luogo e sotto un medesimo aspetto.

575. A questa opinione sembra condurre altresì il carattere transitorio di quelle apparizioni, che io credo periodico. Veramente non si potrà affermare risolutamente tale periodicità che dopo passate alcune opposizioni, e dopo riveduto il fenomeno ancora parecchie volte. Quello che già se n' è veduto rende tuttavia già la periodicità abbastanza probabile. Infatti nel 1877 nessuna traccia di geminazione si potè constatare nelle settimane che precedettero o seguirono immediatamente il solstizio

australe. Un solo caso isolato se ne presentò nel 1879. Il 26 Dicembre di quell'anno (un poco *prima* dell' equinozio vernale (1) di Marte che fu addì 21 Gennaio 1880) constatai la duplicità del Nilo fra il Lago della Luna ed il Ceraunio. Nell' opposizione 1881-82 aspettai con grande curiosità il ritorno di questo fenomeno, il quale per più di due mesi non si presentò, ma finalmente avvenne più tardi di quanto io credeva, cioè in modo rudimentare e confuso il dì 11 Gennaio 1862, e in guisa affatto manifesta il giorno appresso. Questo fu un mese *dopo* l' equinozio vernale del pianeta, che ebbe luogo l' 8 Dicembre 1881: la geminazione era ancora manifesta alla fine di Febbraio. A quella data dell'11 Gennaio già alcuni altri casi di geminazione s' eran fatti manifesti, e molti altri vennero nel mese che la seguì, come qui sopra si è esposto. Nell' opposizione consecutiva 1884 furono vedute distintamente ancora parecchie geminazioni, ed altre si annunziavano sotto forma di strisce alquanto larghe, di cui si poteva congetturare la risolubilità in due linee separate. Queste osservazioni furono fatte nei mesi di Gennaio, Febbraio, Marzo 1884; l' equinozio vernale immediatamente anteriore era avvenuto addì 26 Ottobre 1883, e il solstizio boreale consecutivo seguì addì 13 Maggio 1884. Finalmente nell' opposizione del 1886 la maggior parte delle geminazioni era affatto scomparsa, e soltanto una ben grande e visibile (quella del Nilo-Idraote) fu osservata a Milano ed a Nizza: inoltre furono constatate tracce più o meno probabili di alcune altre. Ciò fu appunto nell' epoche intorno al solstizio boreale di Marte, che ebbe luogo il 30 Marzo 1886. — Combinando insieme questi indizi si arriva alle seguenti probabili supposizioni: 1° che la geminazione sia regolata da un periodo corrispondente all' anno tropico di Marte, e dipenda dalle sue stagioni; 2° che incominci tal fenomeno a manifestarsi intorno all' equinozio vernale, producendosi il maggior numero di geminazioni nel secondo mese dopo tale equinozio; 3° che dopo aver durato alcuni mesi o settimane, esse vadano successivamente scomparendo, in modo da non restarne quasi più alcuna all' epoca del solstizio boreale del pianeta. Occuperebbero dunque le geminazioni tutta quella stagione, che noi chiameremmo primavera dell' emisfero boreale. È impossibile dire per ora, se l' autunno offra qualche cosa di corrispondente.

576. Voler fondare una spiegazione di questi singolarissimi fenomeni sopra le poche ed incomplete nozioni che fino adesso è stato possibile di acquistare sopra i medesimi, sarebbe una temerità senza pari. Nondimeno sia permesso di notare, che anche rispetto ad altre particolarità si manifesta in Marte una tendenza al dualismo. La divisione del Lago Ismenio e la separazione del Lago Niliaco dal Mare Acidalio per mezzo di diafragmi sottili pare abbia relazione col fatto delle geminazioni: quei diafragmi potrebbero infatti rappresentare la striscia chiara che divide i due elementi d' ogni geminazione. Anche la duplicità dei corni del Golfo Sabeo e quella delle due Atlantidi appartengono alla categoria di questi fenomeni dualistici. Forse una conseguenza di analogo principio sono certe combinazioni di due canali, che a rigor di termini potrebbero passar per geminazioni anch' esse; esempi ne sono Indo e Gehon;

(1) Chiamo per brevità equinozio vernale di Marte quello che corrisponde al passaggio del Sole dall' emisfero australe al l emisfero boreale; quello cioè che per l' emisfero boreale della Terra dicesi equinozio di primavera.

Nilosirte e Tritone-Thoth; Iride-Ceraunio e Sirenio; Tanai e Jaxarte. Devonsi pure citare qui alcuni strani parallelismi di conformazione che difficilmente sono effetti di puro caso; uno dei quali è già stato avvertito dal sig. Terby (1) fra la Sirte e il Golfo delle Perle. Questo parallelismo non solo riguarda in generale la forma e l'orientamento; ma si estende anche ad un certo numero di minuti particolari, come si vede nel prospetto seguente:

| | |
|---|---|
| Gran Sirte . . . . . | Golfo delle Perle. |
| Nilosirte . . . . . | Indo. |
| Nepente . . . . . | Canale fra la Terra di Deucalione e Thymiamata. |
| Laghi Meride e Tritone . | Corni del Golfo Sabeo. |
| Corno d'Ammone . . . | Capo degli Aromi. |
| Enotria . . . . . | Regione di Pirra. |
| Astusape . . . . . | Idaspe. |
| Tifonio . . . . . | Idraote. |
| Phison . . . . . | Jamuna. |
| Thoth . . . . . | Gehon. |

La differenza principale fra i due sistemi sta nelle dimensioni, il secondo avendo le sue dimensioni press' a poco eguali a due terzi delle dimensioni omologhe del primo.— Un altro parallelismo assai notevole è fra gli spazi bianchi chiamati Eliso e Tempe:

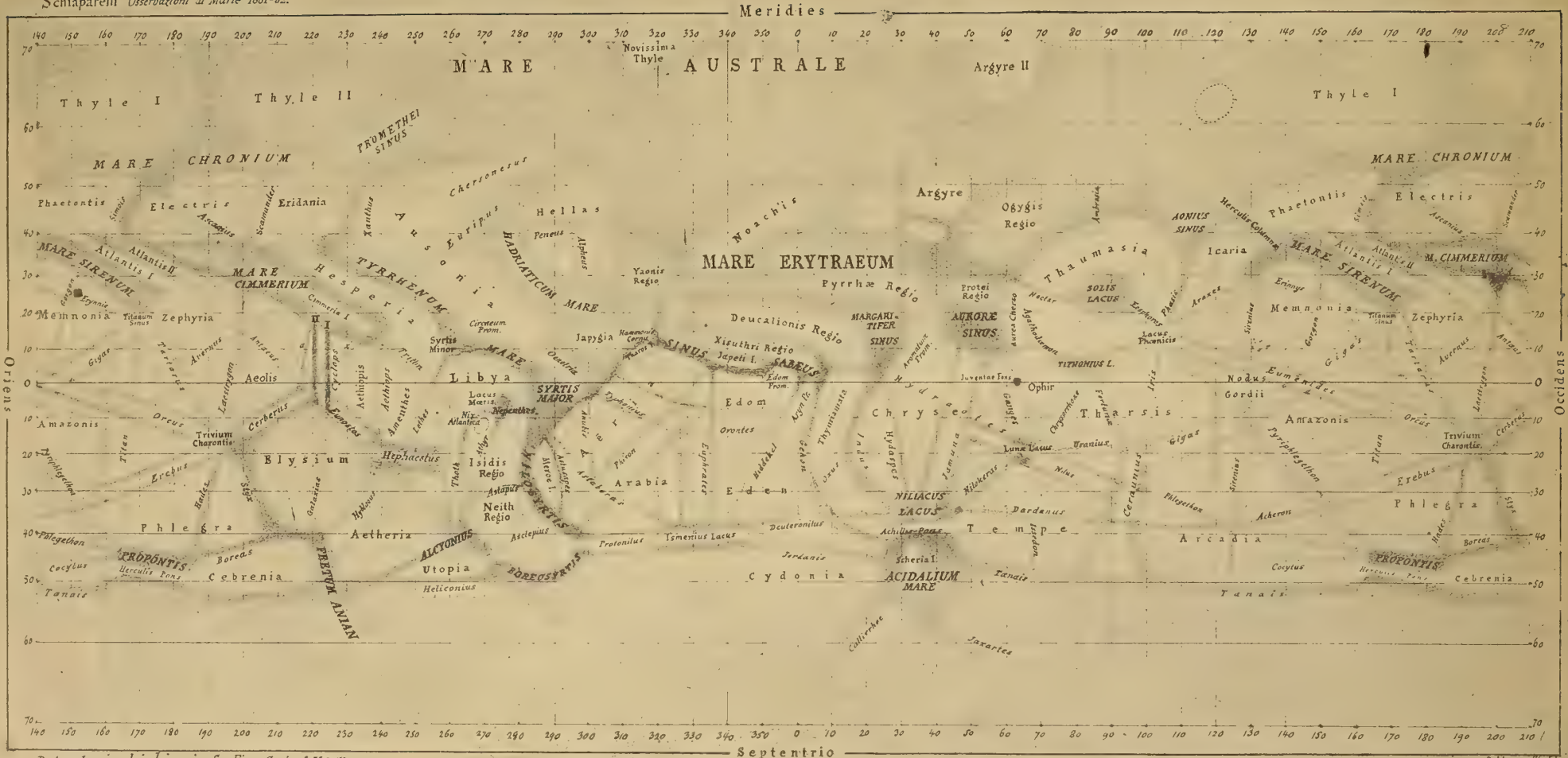
| | |
|---|---|
| Eliso . . . | Tempe |
| Gange . . . | Ciclope |
| Nilokeras . . | Cerbero |
| Nilo . . . . | Eunosto |
| Idraote . . . | Anteo |
| Ceraunio . . . | Ibléo |
| Issedone . . | Galaxias |

Altri simili parallelismi possono notarsi fra le Terre di Deucalione e di Pirra, fra Esperia ed Atlantide I, Argyre I e Argyre II, Thyle I e Thyle II; dei quali forse alcuno potrà esser accidentale, non certo tutti.

577. Il fenomeno delle geminazioni è così nuovo ed inaspettato, e tradotto graficamente sulla carta di Marte dà a questa un aspetto così singolare, che nulla deve meravigliare lo scetticismo con cui ne fu accolto il primo annunzio. Di fronte a simili novità, che si davano come risultato di osservazioni telescopiche abbastanza difficili, fatte da un solo osservatore, era non solo naturale, ma anche doveroso un prudente riserbo. Tale ragione di dubbio non esiste più, dacchè nell'opposizione del 1886 una almeno delle geminazioni (quella del Nilo-Idraote) fu veduta con tutta la desiderabile sicurezza da altri Astronomi, cioè a Milano dal professore Celoria col medesimo telescopio di Merz, che ha servito a tutti i miei lavori areografici fin adesso; e a Nizza dal signor direttore Perrotin con un Refrattore di Henry di 14 pollici; del quale

(1) *Note sur la gémination des canaux de Mars.* Bull. Acad. Roy. Bruxelles, 1885.

i risultati furono in generale confermati dai chiari osservatori sigg. Trépied e Thollon. Le geminazioni saranno dunque un fatto assai difficile a spiegare, ma di cui non si potrà più negare la realtà. — Pertanto, se nel presentare agli scienziati questo mio lavoro sento in me qualche apprensione, non è già sulla verità delle cose esposte, della quale non mi è mai stato possibile dubitare un istante, ma bensì sul modo con cui le ho osservate e le ho riferite. La novità dei fenomeni e la loro estrema complicazione, e la difficoltà di ben descrivere oggetti così minuti e così difficili si saranno manifestate senza dubbio sotto forma di omissioni e di errori, di cui non fuggo la responsabilità. Per questo lato pur troppo non posso presentare altra scusa, che quella già anticamente addotta da Galeno, e della quale prego il lettore voglia contentarsi: *Χαλεπὸν μὲν ἄνθρωπον ὄντα μὴ διαμαρτάνειν ἐν πολλοῖς, τὰ μὲν ὅλως ἀγνοήσαντα, τὰ δὲ κακῶς κρίναντα, τὰ δὲ ἀμελέστερον γράψαντα.*




*R. Accademia dei Lincei, Sc. Fis. Serie 4ª Vol. III.*

# MAPPA AREOGRAPHICA — 1881-82.

*Schiaparelli del.*

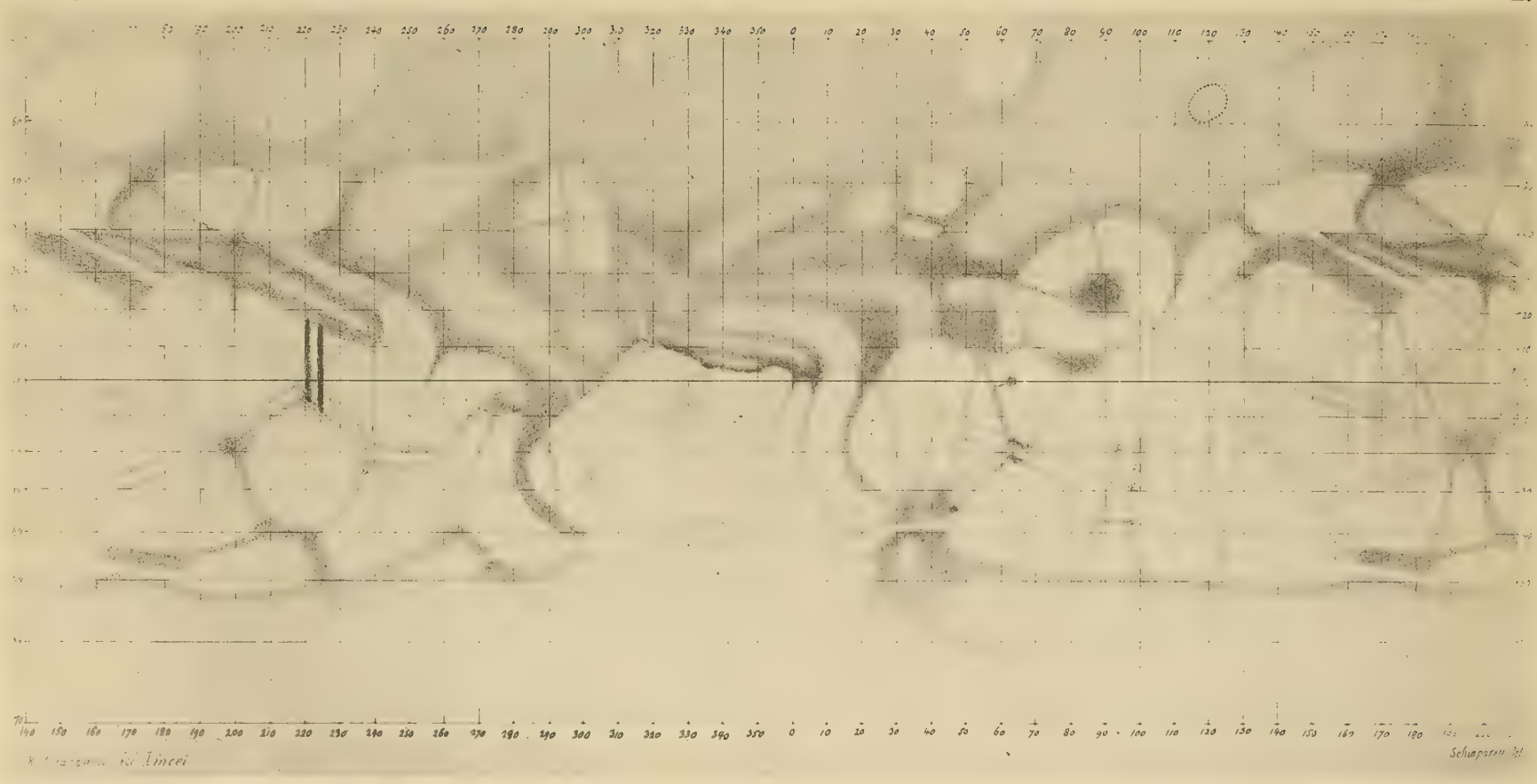

Schiaparelli

Fig. A.

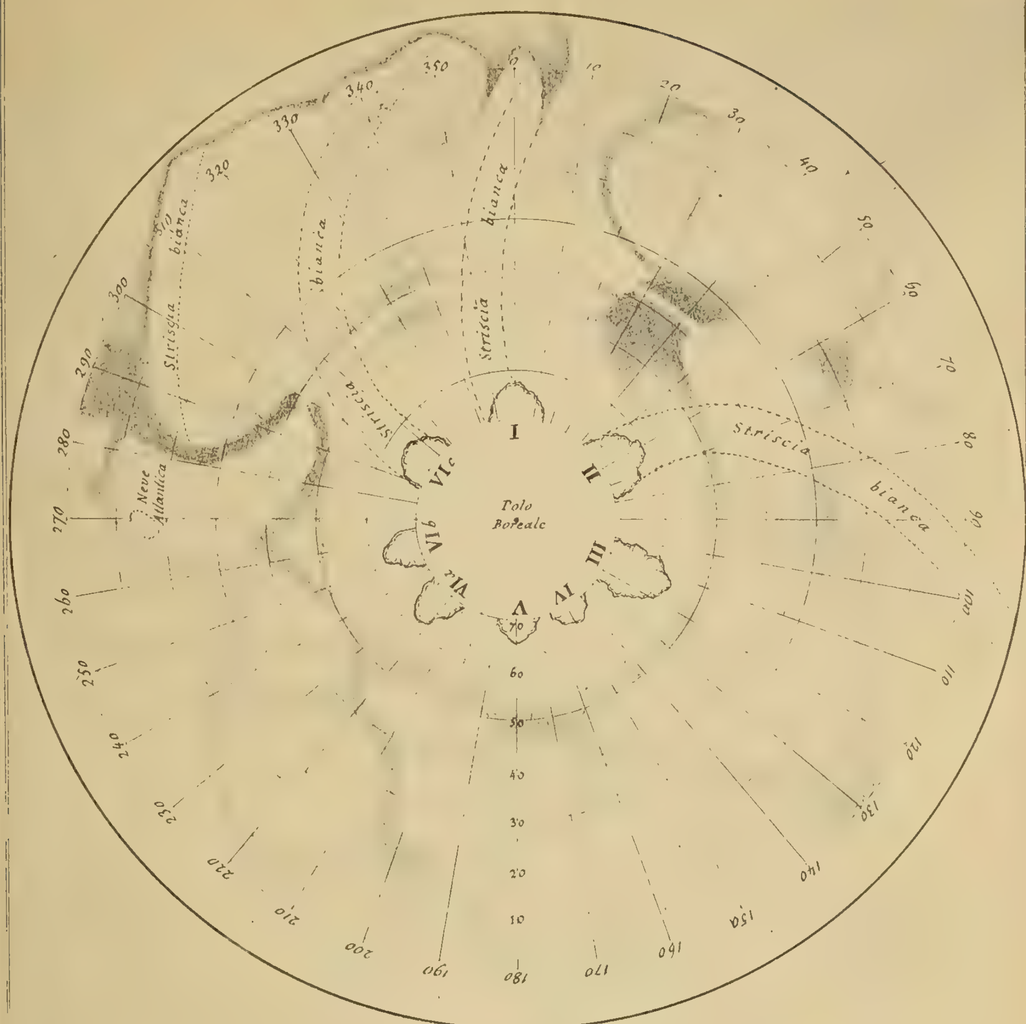



Fig. B

*13 Gennajo 1882.*

Fig. C

*1° Febbrajo 1882.*

# Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2).

Memoria I. (*) del dott. GIULIO PITTARELLI.

## § 1.

*Formole fondamentali e loro relazioni.*

L'equazione che definisce la corrispondenza (2, 1) tra due punti (ovvero, in generale, elementi) $\xi$ ed $\eta$, le cui coordinate binarie si indicheranno con $\xi_1 : \xi_2$ ed $\eta_1 : \eta_2$ rispettivamente, è

$$1) \qquad f \equiv f(\xi^2, \eta^1) \equiv a^2\xi\, \alpha_\eta \equiv b^2\xi\, \beta_\eta \equiv \ldots = 0\,,$$

dove ogni prodotto simbolico $a_i\, a_j\, \alpha_k \equiv b_i\, b_j\, \beta_k \ldots$ si dovrà rimpiazzare con un coefficiente effettivo. La coppia d'indici $ij$ assumerà i tre valori 11, 22, 33, mentre l'indice $k$ assumerà, per ogni terna di quelle coppie, i valori 1 e 2: e si hanno così sei coefficienti.

In virtù della 1) ad un punto $\xi$ corrisponde un sol punto $\eta$, ma ad un punto $\eta$ corrispondono due punti $\xi$, cioè al punto $\eta$ corrisponde una coppia $\xi'\,\xi''$ di punti $\xi$, che chiameremo anche coppia $(\xi)$ o, se non v'è luogo ad equivoco, coppia $\xi$.

È noto che la teoria algebrica delle forme contenenti più serie di variabili è fondata sul teorema: I covarianti e gl'invarianti di un sistema di forme con più serie di variabili sono sempre identici con quelli di un certo sistema di forme con una sola serie di variabili e con coefficienti l'un dall'altro indipendenti (1).

Questo teorema poi si deduce dallo sviluppo di una funzione di due serie di variabili $\xi$ ed $\eta$ per mezzo di potenze del covariante identico $(\xi\eta) = \xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1$ e di polari di forme che contengono una sola variabile (2).

Nel nostro caso si ha

$$2) \qquad f = \Delta \mathrm{D} f + \tfrac{2}{3}(\xi\eta)\,\Omega f\,,$$

dove le operazioni D, $\Delta$, $\Omega$ sono definite nel modo che segue ed insieme al risultato di ognuna:

$$\mathrm{D}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial \eta_2} = a^2\xi\, \alpha\xi = \varphi^3\xi = \varphi\xi'^3 = \ldots = \varphi\,;$$

$$\Delta \mathrm{D}f = \Delta\varphi = \tfrac{1}{3}\left(\eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\right) = \varphi^2\xi\, \varphi_\eta\,;$$

$$\Omega f = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1\, \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2\, \partial \eta_1}\right) = a_\xi\, a_1\, \alpha_2 - a_\xi\, a_2\, \alpha_1 = (a\alpha)\, a_\xi = \sigma\xi = \sigma\,.$$

(*) La Relazione della Commissione esaminatrice trovasi nei Rendiconti, Vol. II (1° semestre) pag. 384.

(1) Clebsch, *Theorie der binären Formen*, § 14.

(2) Clebsch, *Theorie* etc. § 7 e seg.

Con questi valori l'espressione 2) diviene

3) $$f \equiv a^2\xi\, a_\eta \equiv \varphi^2\xi\, \varphi_\eta + \tfrac{2}{3}(\xi\eta)\sigma\xi = 0 \ (^1).$$

Pertanto il sistema dei covarianti ed invarianti di $f$ è identico a quello appartenente alle due $\varphi^3\xi$ e $\sigma\xi$, che si compone delle forme seguenti:

4)
$$\begin{cases} 2 \text{ forme cubiche:} & \varphi = \varphi^3\xi\,, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_{\xi^3} = (\varphi\mathit{A})\,\varphi^2\xi\,\mathit{A}\xi\,; \\ 3 \text{ » quadratiche:} & \mathit{A} = \mathit{A}^2\xi = (\varphi\varphi')^2\varphi\xi\,\varphi'\xi,\ q = q^2\xi = (\varphi\sigma)\varphi^2\xi,\ r = r^{\prime 2}\xi = (\mathrm{Q}\tau)\mathrm{Q}^2\xi\,; \\ 4 \text{ » lineari:} & \sigma = \sigma\xi,\ \varkappa = \varkappa_\xi = (\varphi\sigma)^2\varphi\xi\,,\ \varrho = \varrho\xi = (\mathrm{Q}\tau)^2\mathrm{Q}\xi,\ \tau = \tau\xi = (\mathit{A}\sigma)\mathit{A}\xi \\ 4 \text{ » invarianti:} & \mathrm{R} = (\mathit{A}\mathit{A}')^2 = (\varphi\mathrm{Q})^3,\ \mathrm{L} = (\varphi\sigma)^3,\ \mathrm{M} = (\mathit{A}\sigma)^2,\ \mathrm{N} = (\mathrm{Q}\tau)^3. \end{cases}$$

Se nella relazione conosciutissima

5) $$\mathrm{R}\varphi^2 + \Delta^3 + 2\mathrm{Q}^2 = 0\,,$$

si pone $\xi_1 = \sigma_2$, $\xi_2 = -\sigma_1$ ovvero, come giova per brevità dire in ogni caso simile, $\sigma\xi = 0$, si trae

6) $$\mathrm{RL}^2 + \mathrm{M}^3 + 2\mathrm{N}^2 = 0\,,$$

ch' è la relazione che deve passare tra' quattro invarianti del sistema $\varphi$, $\sigma$ con sei coefficienti (2).

La geometria fornisce immediatamente alcuni invarianti e covarianti di $f$ (3). Io li scriverò qui prima coi simboli $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$...., indi li esprimerò in funzione degl'invarianti e dei covarianti di $\varphi$ e $\sigma$.

Variando il punto $\eta$, le coppie $\xi$ corrispondenti formano evidentemente un' involuzione quadratica, individuata dalle due coppie $\alpha_1\, a^2\xi = 0$ e $\beta_2\, b^2\xi = 0$, che si ottengono quando nella 1) si pone $\eta_2 = 0$ ed $\eta_1 = 0$. I punti *doppi* di tale involuzione sono rappresentati dal jacobiano di quelle due coppie, il quale si può scrivere, introducendo il fattor numerico 2, così:

$$\Omega^2\xi = 2\alpha_1\beta_2\,(ab)\,a\xi\,b\xi\,.$$

Permutando i simboli $ab$ ed $\alpha\beta$, e prendendo la semisomma delle due espressioni risultanti, si ha

7) $$\Omega = \Omega_{\xi^2} = \Omega_{\xi'^2} = (\alpha\beta)\,(ab)\,a\xi\,b\xi\,.$$

I punti $\eta$ corrispondenti a' due punti doppi forniti dall'equazione $\Omega_{\xi^2} = 0$, sono quelli che annullano il discriminante della forma $a^2\xi\, a_\eta$ quadratica in $\xi$. Questo discriminante è

8) $$\Theta = \Theta_{\eta^2} = \Theta_{\eta'^2} = (ab)^2\,a_\eta\beta_\eta\,.$$

I punti $\eta$ forniti dall'equazione $\Theta_{\eta^2} = 0$ si dicono di *diramazione* (4).

(1) Non simbolicamente (Clebsch, al § 14), posto

$$f = (a_0\xi_1^2 + 2a_1\xi_1\xi_2 + a_2\xi_2^2)\eta_1 + (b_0\xi_1^2 + 2b_1\xi_1\xi_2 + b_2\xi_2^2)\eta_2\,,$$

si ha

$$\mathrm{D}f = a_0\xi_1^3 + (2a_1 + b_0)\xi_1^2\xi_2 + (a_2 + 2b_1)\xi_1\xi_2^2 + b_2\xi_2^3. \qquad \Omega f = (b_0 - a_1)\xi_1 + (b_1 - a_2)\xi_2\,.$$

(2) Clebsch, *Theorie* etc. § 81.

(3) Battaglini, *Sulle forme binarie miste di 3° e 4° grado.* Rendiconto dell'Accad. di Napoli, dicembre 1864.

(4) Dott. Emil Weyr, *Theorie der mehrdeutigen Gebilde.* Qui ed in seguito citerò di questo autore l'opuscolo, che mi trovo: *Beiträge zur Curvenlehre*, Wien, 1880, pag. 2 e 3.

Esprimeremo ora in funzione delle forme 4) prima $\Theta$ poi $\Omega$.

Ponendo nei due membri della 3) $b\xi = 0$ e moltiplicandoli per $\beta_\eta$ si ha dapprima

$$\Theta_\eta^2 = (ab)^2\, a_\eta \beta_\eta = (\varphi b)^2 \varphi_\eta \beta_\eta + \tfrac{2}{3}(\sigma b)\, b_\eta \beta_\eta .$$

La prima parte dell'ultima espressione si deduce dalla stessa 3) scritta con i simboli $b\beta$, $\varphi'$; così:

9) $$(\varphi b)^2 \varphi_\eta \beta_\eta = (\varphi\varphi')^2 \varphi_\eta \varphi'_\eta - \tfrac{2}{3}(\varphi\sigma)\varphi_\eta^2 = \Delta_\eta^2 - \tfrac{2}{3} q_\eta^2 .$$

Per la seconda parte poi si ha successivamente, scrivendo $a\alpha$ in luogo di $b\beta$,

10) $$(\sigma a)\, a_\eta \alpha_\eta = \{(\sigma\alpha)\, a_\eta - (a\alpha)\sigma_\eta\}\, a_\eta = (\sigma\alpha)\, a_\eta^2 - (a\alpha)\, a_\eta . \sigma_\eta = (\sigma\alpha)\, a_\eta^2 - \sigma_\eta^2 .$$

Dalla stessa 3), ponendovi $\sigma_\eta = 0$ e poi mutandovi $\xi$ in $\eta$, si ricava

11) $$(\alpha\sigma)\, a_\eta^2 = (\varphi\sigma)\varphi_\eta^2 - \tfrac{2}{3}\sigma_\eta^2 = q_\eta^2 - \tfrac{2}{3}\sigma_\eta^2 .$$

Coi valori 9), 10), 11) si ottiene per $\Theta$ l'espressione cercata:

12) $$\Theta_\eta^2 = \Delta_\eta^2 - \tfrac{4}{3} q_\eta^2 - \tfrac{2}{9}\sigma_\eta^2 .$$

Per trasformare $\Omega_\xi^2$, si faccia la prima polare di $\zeta$ rispetto ai due punti $\xi$ forniti da 3), e si ha

$$a_\xi a_\zeta a_\eta = \varphi_\xi \varphi_\zeta \varphi_\eta + \tfrac{1}{3}(\xi\eta)\sigma_\zeta + \tfrac{1}{3}(\zeta\eta)\sigma_\xi .$$

Di qui, ponendo $b\zeta = 0$, $\beta_\eta = 0$ e moltiplicando per $b\xi$, segue subito:

$$\Omega_\xi^2 = (\alpha\beta)\,(ab)\, a_\xi b_\xi = (\varphi b)\,(\varphi\beta)\,\varphi_\xi b_\xi - \tfrac{1}{3}(\sigma b)\, b_\xi \beta_\xi + \tfrac{1}{3}(b\beta)\, b_\xi . \sigma_\xi .$$

Il valore dell'ultima parte è $\frac{1}{3}\sigma^2\xi$; quello della seconda è dato dalla 10) mutandovi $\eta$ in $\xi$. Quanto alla prima poi, osservando che

$$(\varphi\beta)\, b_\xi = (\varphi b)\,\beta_\xi + (b\beta)\,\varphi_\xi ,$$

essa diventa successivamente

$(\varphi b)(\varphi\beta)\varphi_\xi b_\xi = (\varphi b)^2 \varphi_\xi \beta_\xi + (\varphi b)(b\beta)\varphi^2\xi = (\varphi b)^2 \varphi_\xi \beta_\xi + (\varphi\sigma)\varphi^2\xi$, poichè $\sigma\xi = (b\beta) b_\xi$.

Per la 9) e per le 4) si ha

$$(\varphi b)\,(\varphi\beta)\,\varphi_\xi b_\xi = \Delta\xi^2 + \tfrac{1}{3} q\xi^2 .$$

Con questi valori si ha subito

13) $$\Omega_\xi^2 = \Delta\xi^2 + \tfrac{2}{3} q\xi^2 + \tfrac{4}{9}\sigma\xi^2 .$$

Di qui è facile trovare le espressioni degl' invarianti $(\Theta\Theta')^2$, $(\Omega\Omega')^2$, $(\Theta\Omega)^2$. Ricordando che $\sigma\xi$ è una forma lineare, per cui $(\sigma\sigma') \equiv 0$, si ha

$$(\Theta\Theta')^2 = (\Delta\Delta')^2 + \tfrac{16}{9}(qq')^2 - \tfrac{8}{3}(\Delta q)^2 - \tfrac{4}{9}(\Delta\sigma)^2 + \tfrac{16}{27}(q\sigma)^2$$
$$(\Omega\Omega')^2 = (\Delta\Delta')^2 + \tfrac{4}{9}(qq')^2 + \tfrac{4}{3}(\Delta q)^2 + \tfrac{8}{9}(\Delta\sigma)^2 + \tfrac{16}{27}(q\sigma)^2$$
$$(\Theta\Omega)^2 = (\Delta\Delta')^2 - \tfrac{8}{9}(qq')^2 - \tfrac{2}{3}(\Delta q)^2 + \tfrac{2}{9}(\Delta\sigma)^2 - \tfrac{20}{27}(q\sigma)^2 .$$

Ora $(\Delta\Delta')^2 = \mathrm{R}$, $(\Delta\sigma)^2 = \mathrm{M}$;

$$(q'q)^2 = (\varphi\sigma)\,(q'\varphi)^2 = (\varphi\sigma)\,(\varphi'\sigma)\,(\varphi'\varphi)^2 = (\Delta\sigma)^2 = \mathrm{M} ,$$
$$(q\sigma)^2 = (\varphi\sigma)\,(\varphi\sigma)^2 = (\varphi\sigma)^3 = \mathrm{L} ,$$
$$(\Delta q)^2 = (\varphi\sigma)\,(\Delta\varphi)^2 \equiv 0 \ (^1),$$

(1) Geometricamente: *i punti* $q^2\xi = 0$ *sono armonici ai punti* $\Delta^2\xi = 0$; ciò che sarà reso più evidente in seguito.

per una conosciuta proprietà delle forme cubiche; dunque si ha la relazione caratteristica,

14) $$(\Theta\Theta')^2 = (\Omega\Omega')^2 = \mathrm{R} + \tfrac{16}{27}\,\mathrm{L} + \tfrac{4}{3}\,\mathrm{M}\,,$$

insieme all'altra

$$(\Theta\Omega)^2 = \mathrm{R} - \tfrac{20}{27}\,\mathrm{L} - \tfrac{2}{3}\,\mathrm{M}\,.$$

Questi invarianti in funzione dei simboli $a\alpha$, $b\beta$.... si trovano facilmente adoperando le prime polari delle forme $\Theta_\xi^2$ ed $\Omega_\xi^2$ (1).

Per la forma $\Theta$ si ha

$$2\,\Theta_\xi\,\Theta_\zeta = (ab)^2\,\alpha_\xi\,\beta_\zeta + (ab)^2\,\alpha_\zeta\,\beta_\xi\,.$$

Le due parti sono identiche, essendo equivalenti i simboli $ab$, $\alpha\beta$; perciò possiamo rimpiazzare la loro somma col doppio di una di esse, della prima per es. Dunque

15) $$\Theta_\xi\,\Theta_\zeta = (ab)\,\alpha_\xi\,\beta_\zeta\,.$$

Nello stesso modo

16) $$\Omega_\xi\,\Omega_\zeta = (\alpha\beta)\,(ab)\,a_\xi\,b_\zeta\,.$$

Facendo uso di queste equazioni e di altre scritte con simboli equivalenti si trova subito:

$$\begin{aligned}
(\Theta\Theta')^2 &= (ab)^2\,(a\Theta')\,(b\Theta') &&= (ab)^2\,(cd)^2\,(a\gamma)\,(b\delta)\\
(\Omega\Omega')^2 &= (\alpha\beta)(ab)(a\Omega')(b\Omega') &&= (\alpha\beta)\,(\gamma\delta)\,(ab)\,(ac)\,(bd)\,(cd)\\
(\Theta\Omega)^2 &= (ab)^2\,(a\Omega)\,(b\Omega) &&= (\alpha\beta)\,(ab)\,(a\Theta)\,(b\Theta) = (ab)^2\,(\gamma\delta)\,(cd)\,(ac)\,(bd)\\
&&&= (\alpha\beta)\,(ab)\,(cd)^2\,(a\gamma)\,(b\delta)\,,
\end{aligned}$$

delle quali espressioni l'ultima non è a simboli *separati*.

In fine bisogna far menzione d'una proprietà della forma $\Omega$. Siffatta proprietà si ricava osservando che i punti $\Omega_\xi^2 = 0$ sono coniugati armonici con tutte le coppie $\xi$ fornite dall'equazione $a^2\xi\,a_\eta = 0$ al variar di $\eta$. Perciò

17) $$(a\Omega)^2\,a_\eta \equiv 0$$

qualunque sia $\eta$.

L'identità 17) è analoga all'altra $(\varphi\mathcal{A})^2\,\varphi_\eta \equiv 0$ nota nella teoria della forma $\varphi$, ed algebricamente si può verificare nel modo stesso che si usa per la $(\varphi\mathcal{A})^2\,\varphi_\eta \equiv 0$. Infatti, permutando i simboli, si trova

$$-(a\Omega)^2\,\alpha_\eta = (bc)\,(ca)\,(ab)\,(\beta\gamma)\,\alpha_\eta = (ca)\,(ab)\,(bc)\,(\gamma\alpha)\,\beta_\eta = (ab)\,(bc)\,(ca)\,(\alpha\beta)\,\gamma_\eta\,,$$

da cui

$$-3\,(a\Omega)^2\,\alpha_\eta = (bc)\,(ca)\,(ab)\,\{\,(\beta\gamma)\,\alpha_\eta + (\gamma\alpha)\,\beta_\eta + (\alpha\beta)\,\gamma_\eta\,\} \equiv 0\,,$$

perchè tale è la somma chiusa in $\{\ \}$.

Altre relazioni ed altri covarianti si possono dedurre dal sistema; ma le une e gli altri saranno trovati discussi ed interpretati nei seguenti §§, a proposito della rappresentazione geometrica su d'una conica.

(1) Se non v'è equivoco, riesce naturalmente indifferente scrivere le forme $\Theta$ ed $\Omega$ con un medesimo parametro $\xi$.

## § 2.

*Rappresentazione della corrispondenza* (1, 2) *su d'una conica.*

Si pongano, in un piano, una conica fissa $\mathbf{C}_2$ e due fasci di raggi tra loro proiettivi, dei quali uno abbia il centro $\varepsilon$ [1] su $\mathbf{C}_2$, l'altro l'abbia in O dovunque, ma non su $\mathbf{C}_2$. Tali fasci saranno indicati o con le sole lettere dei loro centri $\varepsilon$ ed O, o con le notazioni $(\varepsilon)$ ed (O), o infine con le altre $\varepsilon(\lambda\mu\nu..)$ ed $O(\lambda'\mu'\nu'....)$, dove $\lambda\mu\nu...$, $\lambda'\mu'\nu'...$ sono punti di $\mathbf{C}_2$ che giacciono su altrettanti raggi di quei fasci.

Se un raggio qualunque del fascio $\varepsilon$ sega $\mathbf{C}_2$ in un punto $\eta$, il raggio del fascio O corrispondente ad $\varepsilon\eta$ la segherà in due punti $\xi'\,\xi''$ (punti $\xi$), reali o immaginari, corrispondenti al punto $\eta$. Viceversa ad uno dei punti $\xi$ corrisponde quell'unico punto $\eta$, nel quale $\mathbf{C}_2$ è intersecata dal raggio corrispondente, nel fascio $\varepsilon$, al raggio $O\xi \equiv O\xi' \equiv O\xi''$ del fascio (O). Perciò i punti $\eta$ e $\xi$ formano sulla conica una corrispondenza (1, 2) $\equiv$ (2, 1).

Intendendo poi che le lettere $\xi, \eta....$ rappresentino anche le coordinate binarie $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\eta_1}{\eta_2}....$ in una rappresentazione razionale parametrica dei punti di $\mathbf{C}_2$ (ciò che, siccome è noto, è possibile in infiniti modi), tra esse coordinate, o parametri, esisterà una relazione algebrica della forma 1), cioè

$$a^2\xi\,\alpha_\eta = 0 \quad [2].$$

Le coppie $\xi'\,\xi''$ essendo sempre allineate con O determinano un'involuzione quadratica su $\mathbf{C}_2$, i punti doppi della quale sono i punti di contatto di $\mathbf{C}_2$ con le tangenti uscenti da O, e sono rappresentati dall'equazione $\Omega_\xi^2 = 0$. Chiameremo punti $\omega'\,\omega''$, o brevemente punti $\omega$, sì fatti punti doppi, $o$ la retta che li unisce; e diremo pure tangenti $\omega'\,\omega''$, o tangenti $\omega$, le tangenti nei punti $\omega$.

La retta $o$ è sempre costruibile; essa è polare del punto O rispetto a $\mathbf{C}_2$.

Supponiamo per ora reali i punti $\omega$. In tal caso i raggi del fascio $\varepsilon$ corrispondenti ai raggi $O\omega'$, $O\omega''$ intersecano la $\mathbf{C}_2$ nei punti $\theta'\,\theta''$ forniti dall'equazione $\Theta_\eta^2 = 0$, i quali, per l'ipotesi fatta intorno ai punti $\omega$, sono reali. — Che se i punti $\omega$ sono immaginari, tali saranno altresì i punti $\theta$. Ma in seguito vedremo come si possa costruire la retta reale $t$ sulla quale essi giacciono. Intanto l'essere insieme reali o immaginari i punti $\omega$ ed i punti $\theta$ è la prova geometrica che i due invarianti $(\Omega\Omega')^2$ e $(\Theta\Theta')^2$ sono eguali (eq.$^{e}$ 14).

La corrispondenza (1, 2) sulla $\mathbf{C}_2$ può ammettere anche elementi *uniti*, cioè punti tali che in essi coincida un punto $\eta$ con uno dei punti $\xi$ corrispondenti. Questi punti sono dati algebricamente dall'equazione

$$a^2\zeta\,\alpha\zeta \equiv \varphi^3\zeta = 0 \qquad (\text{per } \xi = \eta = \zeta).$$

Questi punti, che d'ora innanzi dinoteremo con $\alpha, \beta, \gamma$ [3], geometricamente si trovano così. I due fasci proiettivi O ed $\varepsilon$ generano una conica $\mathbf{C}'_2$ passante per O

(1) Possibilmente, noterò con lettere greche i punti di $\mathbf{C}_2$.

(2) Più tardi (§ 7) vedremo come si possa trovare siffatta relazione.

(3) Non è a temere confusione, nell'adoperare, per indicare i punti $\varphi^3\zeta = 0$, le lettere stesse $\alpha, \beta, \gamma$ che entrano invece come simboli nell'equazione $a^2\xi\,\alpha_\eta \equiv b^2\xi\,\beta_\eta \equiv c^2\xi\,\gamma_\eta = 0$.

ed $\varepsilon$. Le due coniche $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}'_2$ avranno in comune, oltre al punto $\varepsilon$, altri tre punti, dei quali uno è sempre reale. Questi punti sono appunto gli uniti; perchè se $\alpha$ è uno di essi, al raggio $O\alpha$ corrisponde il raggio $\varepsilon\alpha$; onde in $\alpha$ si trovano riuniti un punto $\xi$ ed un punto $\eta$.

I raggi $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ incontrano la conica fondamentale $\mathbf{C}_2$ in altri tre punti $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ tali che $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sono coppie di punti $\xi$.

La cubica che porge la terna $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ si trova semplicissimamente. Infatti, poichè $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sono coppie di punti $\xi$ e però coniugate armoniche rispetto ai punti $\Omega_\xi^2 = 0$, varranno le equazioni

$$\Omega_\alpha \Omega_{\alpha'} = 0 , \quad \Omega_\beta \Omega_{\beta'} = 0 , \quad \Omega_\gamma \Omega_{\gamma'} = 0 .$$

Inoltre, siccome al punto $\gamma'$ per es., considerato come punto $\xi$ cor isponde il punto $\gamma$ considerato come punto $\eta$, così possiamo scrivere

$$a^2_{\gamma'} \alpha_\gamma = 0 .$$

Eliminando $\gamma$ tra questa equazione e la terza delle sopra scritte e ponendo $\gamma' = \zeta$ si ha la cubica

18) $$(\alpha\Omega)\, a^2\zeta\, \Omega_\zeta = 0 \ (^1)$$

per determinare i tre punti $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$.

L'equazione 18) e le due $\Omega_\gamma \Omega_{\gamma'} = 0$ $a^2_{\gamma'} \alpha_\gamma = 0$ possono essere interpretate in altro modo, iu guisa da rendere indipendente dalla conoscenza dei punti $\alpha\beta\gamma$ quella dei punti $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, e da risolvere anche la quistione: quante coppie di una data involuzione quadratica appartengono alla corrispondenza $a^2\xi\, \alpha_\eta = 0$ (2)?

Siano U il centro ed $u$ l'asse dell'involuzione data su $\mathbf{C}_2$, cioè siano U ed $u$ polo e polare rispetto a $\mathbf{C}_2$, e sia $\psi^2\zeta = 0$ l'equazione che dà i punti $\zeta$ d'intersezione di $u$ con $\mathbf{C}_2$, ossia i punti doppi della data involuzione. Una coppia qualunque dell'involuzione sarà fornita dall'equazione $\psi_\lambda \psi_\eta = 0$.

Consideriamo poi l'equazione $a\xi^2 \alpha_\eta = 0$ ed eliminiamo $\eta$ tra essa e la precedente: sarà

19) $$(\alpha\psi)\, a^2\xi\, \psi_\lambda = 0 .$$

La 19) individua una corrispondenza (1, 2) tra i punti $\lambda$ e le coppie $\xi$, che si costruisce poi, con l'aiuto delle equazioni che condussero alla 19), nel seguente modo. Dato $\lambda$, si trovi la seconda intersezione del raggio $U\lambda$ colla $\mathbf{C}_2$: questa intersezione sarà $\eta$ definito dall'equazione $\psi_\lambda \psi_\eta = 0$. Trovando la coppia $\xi$ corrispondente al punto $\eta$ nella corrispondenza $a^2\xi\, \alpha_\eta = 0$, tale coppia sarà quella della corrispondenza 19) che corrisponde a $\lambda$. Viceversa dato $\xi$ si trovi $\eta$, al modo solito, dalla $a^2\xi\, \alpha_\eta = 0$. Il coniugato armonico di $\eta$ rispetto ai due punti $\psi^2\zeta = 0$ sarà il punto $\lambda$ richiesto.

(1) In funzione delle forme fondamentali 4)

$$(\alpha\Omega)\alpha_z^2 \Omega_z = Q^3{}_z - J^2{}_z \sigma_z - \frac{8}{9} q^2{}_z \sigma_z - \frac{8}{27} \sigma^3{}_z .$$

(2) Weyr, *Beiträge* etc., pag. 6.

In forza delle costruzioni precedenti i punti $\eta$ ed i punti $\lambda$ formano due serie proiettive (in involuzione), perciò i fasci $\varepsilon(\eta....)$ ed $\varepsilon(\lambda....)$ sono proiettivi (in involuzione) tra loro ed al fascio $O(\xi....)$. I due fasci $\varepsilon(\lambda....)$ ed $O(\xi....)$ generano una conica che taglia su $C_2$ i tre punti *uniti* della corrispondenza 19) forniti dall'equazione

20) $$(\alpha\psi)\, a^2\zeta\, \psi\zeta = 0 \qquad (\text{per } \xi = \lambda = \zeta).$$

Ognuno di questi punti *uniti* adunque sarà a considerarsi tanto come punto $\xi$ quanto come punto $\lambda$; il punto $\eta$ che gli corrisponde sia nell'involuzione sia nella corrispondenza $a^2\xi\, \alpha_\eta = 0$ formerà insieme ad esso una coppia comune all'involuzione ed alla corrispondenza. Perciò *vi sono tre di tali coppie.*

In altri termini la 20) è il risultato dell'eliminazione di $\eta$ tra le due (che debbono valere per una coppia comune) $\psi\zeta\, \psi_\eta = 0$, $a^2\zeta\, \alpha_\eta = 0$. Eliminando invece $\zeta$ si trova, introducendo il simbolo $\psi'$ equivalente a $\psi$,

$$o = 2\,(a\psi)(a\psi')\,\psi_\eta\,\psi'_\eta\,\alpha_\eta = \{\,(a\psi)^2\,\psi'^2_\eta + (a\psi')^2\,\psi_\eta^2 - (\psi\psi')^2\,a_\eta^2\,\{\,\alpha_\eta$$
$$= 2\,(a\psi)^2\,\alpha_\eta\,.\,\psi'^2_\eta - (\psi\psi')^2\,\varphi_\eta^3\,.$$

Ponendo $\psi = \Omega$, l'ultima equazione per la 17) si riduce a $\varphi = 0$, mentre la 20) coinciderà con la 18), ed il punto U e la retta $u$ diverranno O ed $o$.

Tornando ai punti uniti $\alpha, \beta, \gamma$, essi, come dicemmo, sono o tutti e tre reali, ovvero uno solo è reale. Nell'ultimo caso, costruito il punto reale, si potrà, come insegna la geometria proiettiva, costruire la retta reale che contiene la coppia dei punti immaginari coniugati (1).

La determinazione grafica di questi punti uniti è tanto importante, quanto quella de' due punti uniti in due forme proiettive sovrapposte (cioè in corrispondenza (1, 1)); tanto che mediante il loro uso l'ulteriore costruzione della corrispondenza (1, 2) si può semplificare.

Infatti il fascio O essendo proiettivo al fascio $\varepsilon$, e questo prospettivo alla serie de' punti $\eta$, sarà anche (O) proiettivo a quella serie. D'altra parte proiettando la serie $\eta$ da un altro punto $\varepsilon'$ di $C_2$, il fascio $\varepsilon'$ sarà proiettivo al fascio $\varepsilon$. Onde per costruire la corrispondenza (1, 2) si potranno assumere anche i due fasci proiettivi (O) ed $(\varepsilon')$ (2).

Poniamo ora il punto $\varepsilon'$ in uno dei punti $\alpha', \beta', \gamma'$, in $\alpha'$ per es. Le terne di raggi che individuano la proiettività saranno in tal caso $O(\alpha\beta\gamma)$ ed $\alpha'(\alpha\beta\gamma)$. Ma i due raggi $O\alpha$ ed $\alpha'\alpha$ coincidono, essendo per diritto i punti $O, \alpha\alpha'$; dunque i due fasci (O) ed $(\alpha')$ sono prospettivi e generano con le mutue intersezioni dei loro raggi la punteggiata $\beta\gamma$. Adunque (e questo è l'importante) dati i tre punti uniti $\alpha,\beta,\gamma$ della corrispondenza (1, 2) ed il centro O fuori di $C_2$, possiamo costruire la corrispondenza in tre modi per mezzo di fasci prospettivi, prendendo il centro $\varepsilon$ in uno dei tre punti $\alpha', \beta', \gamma'$.

Se, contemporaneamente a $\beta\gamma$, i punti $\beta'\gamma'$ diventano immaginari, la costruzione precedente si potrà effettuare in un sol modo reale: il centro $\alpha'$ sarà reale e la retta $\beta\gamma$ sarà pure reale e costruibile come fu cennato innanzi.

(1) Cremona, *Geometria proiettiva* n. 176. problema b).

(2) Con ciò naturalmente varierà la conica $C'_2$, poichè la nuova $C'_2$ è individuata da' 5 punti $O\alpha\beta\gamma\varepsilon'$. Tutte le $C'_2$ formano un fascio i cui punti-base sono $O, \alpha, \beta, \gamma$.

## § 3.

### *La corrispondenza (1, 2) coniugata.*

Alla corrispondenza (1, 2) definita dall'equazione 1) $f = 0$ è congiunta un'altra corrispondenza che ha con la prima importanti relazioni algebriche e geometriche.

Siano $\eta$ e $\xi'\xi''$ tre punti della corrispondenza $f = 0$. Le coppie $\omega'\omega''$, $\xi'\xi''$ individuano un involuzione quadratica, gli elementi doppi della quale saranno i punti dove $\mathbf{C}_2$ è segata dalla polare dal punto comune alle due rette $o \equiv \omega'\omega''$ ed $x \equiv \xi'\xi''$. La forma algebrica che fornisce i punti doppi sarà il jacobiano delle due forme $\Omega_\xi{}^2 = 0$ ed $a_\xi{}^2 \alpha_\eta = 0$, il quale scriverò per ora col parametro $\zeta$. Così.

21) $$F = F(\zeta^2, \eta^1) = (a\Omega)\, a_\zeta \Omega_\zeta \alpha_\eta = A_\zeta{}^2 A_\eta = B_\zeta{}^2 B_\eta = C_\zeta{}^2 \Gamma_\eta = 0 .$$

Chiamerò $\zeta'\zeta''$ i punti forniti dall'equazione 21) quadratica in $\zeta$, ovvero anche dirò punti $\zeta$ o coppie $\zeta$, ed indicherò con $z$ la retta su cui essi giacciono.

I punti $\zeta$ ed $\eta$ legati dalla 21) sono in corrispondenza (2, 1).

La retta $z$ su cui giace la coppia $\zeta$ essendo polare del punto $o.x$ della retta $o$, passa pel polo O di $o$. Perciò tutte le coppie $\zeta$ sono allineate con O e formano un'involuzione quadratica su $\mathbf{C}_2$. Inoltre la retta $z$ è coniugata di $x$ rispetto a $\mathbf{C}_2$, poichè il polo di $z$ giace sopra $x$. Adunque le infinite coppie $\xi$ e le infinite coppie $\zeta$ (corrispondenti ad uno stesso punto $\eta$) sono sopra rette a due a due coniugate rispetto a $\mathbf{C}_2$. Segue da ciò che gli elementi doppi dell'involuzione costituita dalle coppie $\zeta$ sono gli stessi elementi forniti dall'equazione $\Omega_\xi{}^2 = 0$.

Abbiamo veduto come, dato $\eta$, si determini la coppia ($\zeta$). Viceversa dato un punto $\zeta$ della coppia ($\zeta$) si può determinare $\eta$, trovando il raggio $\varepsilon\eta$ che nel fascio ($\varepsilon$) corrisponde al raggio $x$, del fascio O, coniugato al raggio $z$ che contiene il punto $\zeta$. Di qui segue che i due punti ai quali, nella corrispondenza $F = 0$, corrispondono gli elementi doppi $\omega'\omega''$ sono gli stessi punti $\theta'\theta''$ forniti dall'equazione $\Theta_\eta{}^2 = 0$.

Adunque le due corrispondenze $f=0$ ed $F=0$ ammettono gli stessi punti doppi e gli stessi punti di diramazione.

Questa è la prova geometrica del fatto, che più tardi sarà dimostrato, che le forme $\Omega_F$ e $\Theta_F$ calcolate per la forma F differiscono per un fattore costante da $\Omega$ e da $\Theta$.

La figura che risulta dalle costruzioni precedenti è costituita da due raggi $O\xi$, $O\zeta$ del fascio O coniugati rispetto a $\mathbf{C}_2$ e dal punto $\eta$ corrispondente a $\xi$ nella corrispondenza $f = 0$, mentre poi tra $\zeta$ ed $\eta$ si ha la relazione $F = 0$.

Considerando poi $\zeta$ come punto $\xi$ ad esso corrisponderà un punto $\eta'$, per modo che varrà l'equazione

22) $$a^2\zeta\, \alpha_{\eta'} = 0 .$$

Si hanno in tal modo le seguenti coppie di fasci proiettivi: $O(\xi....)$ ed $\varepsilon(\eta....)$, $O(\zeta....)$ ed $\varepsilon(\eta'....)$. Ma i due fasci $O(\xi...)$ ed $O(\zeta...)$ sono in involuzione perchè le rette $x \equiv O\xi...$, $z \equiv O\zeta...$ sono coniugate rispetto a $\mathbf{C}_2$; dunque anche i fasci concentrici $\varepsilon(\eta...)$ ed $\varepsilon(\eta'...)$ sono in involuzione, ed i raggi $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\eta'$ sono in essa coniugati. Conseguentemente le coppie $\eta\eta'$ sulla conica $\mathbf{C}_2$ costituiscono un'involuzione; e però le rette $\eta\eta'$ passano per un punto fisso T.

Per vedere quel che c' è di speciale nella posizione di questo punto T, si rifletta che ai raggi doppi dei fasci in involuzione $O(\xi...)$ ed $O(\zeta...)$ devono corrispondere i raggi doppi degli altri fasci in involuzione $\varepsilon(\eta...)$ ed $\varepsilon(\eta'....)$, proiettivi ai primi. Ma i raggi doppi della prima involuzione sono le rette $O\omega'$ ed $O\omega''$, dunque quelli della seconda saranno i raggi corrispondenti $\varepsilon\theta'$ ed $\varepsilon\theta''$ (§ 2). Onde i punti $\theta'\,\theta''$ sono punti doppi dell'involuzione formata dalle coppie $\eta\eta'$. Perciò le tangenti $\theta'\,\theta''$ a $C_2$ passano per T, il quale punto è così il polo della retta $\theta'\,\theta''$ indicata da noi con $t$.

Di qui segue primamente che quand' anche i punti $\theta$ siano immaginari, la retta reale $t$ è sempre costruibile siccome polare del punto T comune alle rette congiungenti due coppie qualunque (linearmente costruibili) dell' involuzione $\eta\eta'$. Ed in questo modo è tolta di mezzo la difficoltà creata dal fatto *contingente* di dover costruire la retta $t$ per mezzo della coppia $\theta'\,\theta''$, come si ammise nel § 2.

In secondo luogo i punti $\eta\eta'$ sono coniugati armonici rispetto ai punti doppi $\theta'\theta''$ forniti dall'equazione $\Theta_\xi^2 = 0$: onde sarà

$$\Theta_\eta\,\Theta_{\eta'} = 0\,.$$

Eliminando $\eta'$ tra questa e la 22) si ha la relazione tra $\zeta$ ed $\eta$:

23) $$(\alpha\Theta)\,a^2\zeta\,\Theta_\eta = 0\,.$$

Ma l'unica relazione ammessa tra $\zeta$ ed $\eta$ è $F = 0$; adunque le due forme $F = (a\Omega)\,a_\zeta\,\Omega_\zeta\,\alpha_\eta$ ed $(\alpha\Theta)\,a^2\zeta\,\Theta_\eta$ non possono differire che per un fattore.

E ciò appunto è provato dall'algebra.

Infatti dalla polare 16) della forma $\Omega$ segue

$$F = (\beta\gamma)\,(bc)\,(ac)\,b_\zeta\,a_\zeta\,\alpha_\eta = \tfrac{1}{2}\,(\beta\gamma)\,\{\,(bc)^2\,a^2\zeta + (ac)^2\,b^2\zeta - (ab)^2\,c^2\zeta\,\}\,\alpha_\eta\,.$$

Nell'ultima espressione la prima parte è identicamente nulla perchè muta segno col permutarvi i simboli: con la stessa permutazione le due altre parti si cambiano l'una nell'altra; onde si può scrivere

$$F = (ac)^2\,(\beta\gamma)\,b^2\zeta\,\alpha_\eta\,.$$

Facendo uso della polare 15) si ha subito dall'ultima equazione

24) $$F = (\beta\Theta)\,b^2\zeta\,\Theta_\eta\,,$$

il cui secondo membro è precisamente il primo della 23).

I punti uniti della corrispondenza F si ottengono da due qualunque delle forme cubiche

$$(a\Omega)\,a_\zeta\,\Omega_\zeta\,\alpha_\zeta \equiv (\alpha\Theta)\,a^2\zeta\,\Theta_\zeta = 0\ (^1),$$

per la seconda delle quali si potrebbero ripetere le cose dette per l'equazione 20), come per le 23) si potrebbero ripetere quelle dette per le 19).

Il punto $\sigma$ della corrispondenza $F = 0$, cioè il punto risultante dall' applicare l'operazione $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\,\partial\eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_2\,\partial\eta_1}\right)$, è

$$\tfrac{1}{2}\,(a\alpha)\,(a\Omega)\,\Omega_\zeta + \tfrac{1}{2}\,(\Omega\alpha)\,(a\Omega)\,a_\zeta = \tfrac{1}{2}\,(\sigma\Omega)\,\Omega_\zeta + \tfrac{1}{2}\,(a\Omega)\,\{\,(\Omega a)\,\alpha_\zeta + (a\alpha)\,\Omega_\zeta\,\}$$
$$= (\sigma\Omega)\,\Omega_\zeta\ (^2),\ \text{perchè}\ (a\Omega)^2\,\alpha_\zeta \equiv 0\ \text{eq.}^{\text{e}}\ 17).$$

(1) In funzione delle forme fondamentali: $Q^3\zeta + \frac{2}{3}\,q^2\zeta\sigma\zeta + \frac{4}{27}\,\sigma^3\zeta$.

(2) In funzione delle forme fondamentali: $-\tau\zeta - \frac{2}{3}\,\varkappa\zeta$.

Ma essendo, per due punti $\zeta$ e $\zeta'$ coniugati armonici rispetto ai due $\Omega_\xi^2 = 0$, $\Omega_{\zeta'}\Omega_\zeta = 0$, se per $\zeta'$ prendiamo il punto definito dall'equazione $\sigma\xi = 0$ bisogna porre $\zeta'_2 = \sigma_1$, $\zeta'_1 = -\sigma_2$; così $\Omega_{\zeta'}\Omega_\zeta$ diventa $(\sigma\Omega)\Omega_\zeta = 0$. Perciò questa equazione rappresenta il coniugato armonico di $\sigma$ rispetto ai due punti $\Omega_\xi^2 = 0$; il quale dunque si ottiene trovando la seconda intersezione di $\mathbf{C}_2$ con la retta $O\sigma$.

La corrispondenza coniugata alla F è la stessa $f$.

Infatti in forza della $F(\xi^2, \eta^1) = 0$ esiste una relazione proiettiva tra i punti $\eta$ ed i raggi del fascio $O(\zeta...)$. Per avere poi la corrispondenza coniugata di $F = 0$ bisogna far corrispondere al punto $\eta$ non il raggio $O\zeta$, ma il suo coniugato rispetto a $\mathbf{C}_2$. Ma questo raggio coincide con $O\xi$, cioè appunto con quel raggio che ha la coppia $\xi$ situata sovra di esso ligata dalla relazione $a_\xi^2 \alpha_\eta \equiv f = 0$ col punto $\eta$. E questo volevamo trovare.

Insomma ad uno stesso punto $\eta$, e però ad un raggio $\varepsilon\eta$ del fascio $\varepsilon$, corrispondono due raggi $O\xi$, $O\zeta$ del fascio O, tra loro coniugati rispetto alla conica fondamentale, secondo che $\eta$ si riguarda nella corrispondenza $a^2\xi\,\alpha_\eta = 0$ o nella corrispondenza $A_\xi^2 A_\eta = 0$. Viceversa ad un raggio $O\lambda$ del fascio O corrispondono due punti $\eta, \eta'$ secondo che si considera quel raggio posto nella corrispondenza $a_\lambda^2 \alpha_\eta = 0$ ovvero nell'altra $A_\lambda^2 A_{\eta'} = 0$: ed i punti $\eta\eta'$ sono coniugati nell' involuzione che ha per elementi doppi $\theta'\theta''$ (come appunto $O\xi$ ed $O\zeta$ sono raggi coniugati in quell' involuzione di rette reciproche che ha per raggi doppi le tangenti $\omega'\omega''$) (1).

Scrivendo le due forme $f$ ed F coi medesimi parametri variabili $\xi$ ed $\eta$, si faccia la forma composta

$$25) \qquad f_{\varkappa\lambda} \equiv \varkappa a^2\xi\,\alpha_\eta + \lambda A_\xi^2 A_\eta \equiv \varkappa f + \lambda F = 0\,,$$

dove $\varkappa : \lambda$ è una costante indeterminata.

La 25) stabilisce una corrispondenza (1, 2) tra i punti $\eta$ e le coppie $\xi$, le quali appartengono appunto all'involuzione che ha $\omega'\omega''$ per punti doppi, poichè, per $\eta$ dato, ciascuna delle coppie $f = 0$ ed $F = 0$ appartiene a quell' involuzione.

Se ora immaginiamo costruita la corrispondenza $F_{\varkappa\lambda} = 0$ coniugata di $f_{\varkappa\lambda} = 0$, la prima equazione deve essere della medesima forma della seconda, per es.

$$26) \qquad F_{\varkappa\lambda} = kf + lF = 0\,,$$

dove $k$ ed $l$ sono delle funzioni di $\varkappa$ e $\lambda$. Infatti a un punto $\eta$ nella corrispondenza $F_{\varkappa\lambda} = 0$ deve corrisponde la coppia $\zeta$ situata sul raggio $O\zeta$ coniugato rispetto a $\mathbf{C}_2$ del raggio $O\xi$ che corrisponde ad $\eta$ nella corrispondenza $f_{\varkappa\lambda} = 0$: così tutte le coppie $\zeta$ formano la stessa involuzione alla quale appartengono le coppie speciali $f = 0$ ed $F = 0$.

(1) Si vede facilmente del resto (se pur v'è bisogno) che le due relazioni $a\lambda^2\alpha_{\eta'} = 0$ ed $A\lambda^2 A_{\eta'} \equiv (a\Theta)\,a\lambda^2\,\Theta_{\eta'} = 0$ danno luogo, eliminando $\lambda$, all'altra $\Theta_\eta\,\Theta_{\eta'} = 0$. Infatti il risultante delle due forme quadratiche in $\lambda$ è, secondo la conosciuta regola, $V = (ab)^2\alpha_\eta\beta_\eta\,.\,(AB)^2 A_{\eta'}B_{\eta'} - \{(aA)^2\alpha_\eta A_{\eta'}\}^2 = 0$. Or $(ab)^2\alpha_\eta\beta_\eta = \Theta_\eta^2$; $(AB)^2 A_{\eta'}B_{\eta'} = (a\Theta)(a\mathrm{B})^2\Theta_{\eta'}B_{\eta'} = (ab)^2(\alpha\Theta)(\beta\Theta')\,\Theta_{\eta'}\Theta'_{\eta'} = (\Theta'\Theta)(\Theta''\Theta')\Theta_{\eta'}\Theta'_{\eta'} = \frac{1}{2}(\Theta'\Theta'')^2\,\Theta^2_{\eta'}$ (risultato già previsto, e che sarà trovato per altra via): $(aA)^2\alpha_\eta A_{\eta'} = (ab)^2\,(\beta\Theta)\alpha_\eta\Theta_{\eta'} = (\Theta'\,\Theta)\,\Theta'_\eta\,\Theta_{\eta'} = \frac{1}{2}(\Theta\Theta')^2(\eta\eta')$. Dunque $V = \frac{1}{2}(\Theta'\,\Theta'')^2\,\Theta_\eta^2\,\Theta'''^2_{\eta'} - \frac{1}{4}(\Theta'\,\Theta'')^2\,(\Theta\Theta''')^2\,(\eta\eta')^2 = \frac{1}{4}(\Theta'\,\Theta'')^2\{2\,\Theta_\eta^2\,\Theta'''^2_{\eta'} - (\Theta\Theta''')^2\,(\eta\eta')^2\} = \frac{1}{4}(\Theta'\,\Theta'')^2\{2\,\Theta_\eta^2\,\Theta'''^2_{\eta'} - (\Theta_\eta\,\Theta'''_{\eta'} - \Theta_{\eta'}\,\Theta'''_\eta)^2\} = \frac{1}{2}(\Theta'\,\Theta'')^2.\,\Theta_\eta\,\Theta_{\eta'}\,.\,\Theta_\eta'''\,\Theta'''_{\eta'} = \frac{1}{2}(\Theta'\,\Theta'')^2.(\Theta_\eta\,\Theta'_{\eta'})^2 = 0$.

Queste proprietà della funzione composta $f_{x\lambda}$ si trovano, col calcolo, espresse nelle seguenti formole

$$27)\quad \begin{cases} f_{x\lambda} = xf + \lambda F \\ \Omega_{x\lambda} = G\Omega\,, \qquad \Theta_{x\lambda} = G\Theta \\ D_{x\lambda} = G^2 D \\ F_{x\lambda} = G\left(xF - \dfrac{D}{2}\lambda f\right) = \frac{1}{2} G\left(F\dfrac{\partial G}{\partial x} - f\dfrac{\partial G}{\partial \lambda}\right), \end{cases}$$

dove

$$28)\quad D = (\Omega\Omega')^2 = (\Theta\Theta')^2\,, \qquad G = x^2 + \frac{D}{2}\lambda^2.\ (^2).$$

Queste formole sono identiche a quelle notissime nella teoria delle forme binarie cubiche; e si dimostrano nell' identico modo.

Io farò il calcolo nei suoi tratti essenziali, rimandando, per quello che taccio, alla *Theorie der binären Formen* § 36.

Siano $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ i coefficienti non simbolici di $f$, ed $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ quelli di F. Per ottenere le forme $\Omega_{x\lambda}$, $\Theta_{x\lambda}$, $D_{x\lambda}$ ed $F_{x\lambda}$ dobbiamo sostituire alle $a_i$ le $xa_i + \lambda A_i$ nelle quattro forme $\Omega$, $\Theta$, D ed F, e sviluppare poi secondo il teorema di Taylor. Onde, poichè $\Omega$ e $\Theta$ sono di 2° grado nei coefficienti, D di 4° ed F di 3°, si avranno gli sviluppi nelle forme seguenti:

$$\Omega_{x\lambda} = x^2\Omega + x\lambda\Omega_1 + \lambda^2\Omega_2\,, \qquad \Theta_{x\lambda} = x^2\Theta + x\lambda\Theta_1 + \lambda^2\Theta_2\,,$$
$$D_{x\lambda} = x^4 D + x^3\lambda D_1 + x^2\lambda^2 D_2 + x\lambda^3 D_3 + \lambda^4 D_4\,,$$
$$F_{x\lambda} = x^3 F + x^2\lambda F_1 + x\lambda^2 F_2 + \lambda^3 F_3\,;$$

dove per es.

$$\Omega_1 = \sum_{i=0}^{i=5} A_i \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\,, \qquad \Omega_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=5} A_i \frac{\partial\Omega_1}{\partial a_i}\ \text{ etc.}$$

In generale essendo $\psi$ una forma qualunque scritta coi coefficienti di $f$, definiremo l'operazione $\delta\psi$ per mezzo dell'equazione

$$\delta\psi = \sum_{i=0}^{i=5} A_i \frac{\partial\psi}{\partial a_i}\,,$$

e troveremo poi le forme $\delta\Omega$, $\delta\Theta$, $\delta$D, $\delta$F con la regola seguente (*Theorie* § 36 citato):

Il risultato dell' applicazione dell' operazione $\delta$ ad una data espressione simbolica $\psi$ è la somma delle espressioni che nascono, quando sempre in luogo di un simbolo di $f$ poniamo un simbolo di F (1).

Se la $\psi$ è simmetrica nei simboli di $f$, la somma delle espressioni che vengono dall' operazione $\delta$ si rimpiazzerà con un certo multiplo di una di esse.

(1) Di queste formole ebbi conoscenza a Napoli, lo scorso autunno. in una Nota dell'egregio sig. dott. Peano, inserita nel Giornale di Battaglini, anno 1882, e che ha per titolo: *Formazioni invariantive delle corrispondenze* (speditami più tardi dall'autore). Ne presi semplicemente nota; ma, sebbene allora il presente lavoro fosse stato già pensato ed in parte redatto, io non avrei sospettato di darne poi un' illustrazione geometrica in una più recente ed accurata revisione.

(2) Si avverta che il simbolo di $f$ e quello di F sono composti di un simbolo latino e di un simbolo greco: la sostituzione deve esser perciò contemporanea per i due simboli.

Applicando queste regole troviamo

$$\delta f = \mathrm{F} ;$$

e dalle 7) ed 8)

$$\delta\Omega = 2\,(\alpha A)\,(a\mathrm{A})\,a_\xi \mathrm{A}_\xi , \qquad \delta\Theta = 2\,(a\mathrm{A})^2\,\alpha_\xi A_\xi .$$

Dall'espressione $\mathrm{A}_\eta^2 A_\xi = (b\Omega)\, b_\eta\, \Omega_\eta\, \beta_\xi$ si trae subito, posto $a_\eta = 0$ e moltiplicando per $\alpha_\xi$,

$$(a\mathrm{A})^2\,\alpha_\xi A_\xi = (ab)\,(a\Omega)\,(b\Omega)\,\alpha_\xi\,\beta_\xi \equiv 0 ,$$

perchè muta segno mutandovi i simboli $ab$, $\alpha\beta$. Così $\delta\Theta = 0$.

Dall'altra espressione $\mathrm{A}_\eta^2 A_\xi = (\beta\Theta)\, b_\eta^2\, \Theta_\xi$ si trae prima $\mathrm{A}_\zeta \mathrm{A}_\eta A_\xi = (\beta\Theta)\, b_\zeta\, b_\eta\, \Theta_\xi$; e di qui

$$(\alpha A)\,(a\mathrm{A})\,a_\eta \mathrm{A}_\eta = (ab)\,(\alpha\Theta)\,(\beta\Theta)\,a_\eta\, b_\eta \equiv 0 . \qquad \text{Così } \delta\Omega = 0 .$$

In altri termini l'operazione $\delta$ applicata ai simboli $\Omega$ e $\Theta$ dà risultati identicamente nulli.

Di qui segue immediatamente

$$\delta\mathrm{D} = \delta\,(\Omega\Omega')^2 = \delta\,(\Theta\Theta')^2 \equiv 0 .$$

Per la stessa osservazione si ha successivamete:

$$\delta\mathrm{F} = \delta\Big[(\alpha\Theta)\,a_\xi^2\,\Theta_\eta\Big] = (A\Theta)\,\mathrm{A}_\xi^2\,\Theta_\eta = (\alpha\Theta')\,(\Theta'\,\Theta)\,a_\xi^2\,\Theta_\eta ;$$

di qui permutando $\Theta$ in $\Theta'$ e prendendo la semisomma delle espressioni risultanti

$$\delta\mathrm{F} = \tfrac{1}{2}\,(\Theta'\,\Theta)\,\big\{(\alpha\Theta')\,\Theta_\eta - (\alpha\Theta)\,\Theta'_\eta\big\}\,a_\xi^2 = -\tfrac{1}{2}\,(\Theta\Theta')^2\,a_\xi^2\,\alpha_\eta ,$$

e finalmente

$$\delta\mathrm{F} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{D}f .$$

Le forme $\Omega_2$, $\Theta_2$, $\mathrm{D}_2$, $\mathrm{D}_3$, $\mathrm{D}_4$, $\mathrm{F}_2$, $\mathrm{F}_3$ si ottengono con un calcolo ricorrente secondo lo schema composto dalle seguenti equazioni (V. *Theorie*) per una forma qualunque $\psi$:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \delta\psi \\
2\psi_2 &= \delta\psi_1 + \frac{\mu}{2}\,\mathrm{D}\psi \\
3\psi_3 &= \delta\psi_2 + \frac{\mu-1}{2}\,\mathrm{D}\psi_1 \\
4\psi_4 &= \delta\psi_3 + \frac{\mu-2}{2}\,\mathrm{D}\psi_2 \\
&\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dove $\mu$ è il grado di $\psi$ nei coefficienti di $f$.

Ponendo per $\psi$ successivamente $\Omega$, $\Theta$, D ed F, adoperando le espressioni ottenute di $\Omega_1$, $\Theta_1$, $\mathrm{D}_1$ ed $\mathrm{F}_1$, e ricordando che generalmente $\delta\,(\mathrm{D}\psi_i) = \mathrm{D}\delta\psi_i + \psi_i\delta\mathrm{D} = \mathrm{D}\delta\psi_i$ si ottengono subito le 27).

Oltre a queste relazioni ve n' è un' altra analoga a quella che liga tra loro le forme $\varphi$, $\Delta$, Q: eq. 5), e che si ottiene nel medesimo modo.

Per definizione la forma $\mathrm{F} = (a\Omega)\,a_\xi\,\Omega_\xi\,\alpha_\eta$ è il jacobiano delle due forme quadratiche $p = p^2{}_\xi = a^2{}_\xi\,\alpha_\eta$ ed $\Omega = \Omega_\xi{}^2$. Perciò, com' è risaputo [1].

$$-2\mathrm{F}^2 = (pp')^2\,\Omega^2 - 2\,(p\Omega)^2\,\Omega p + (\Omega\Omega')^2\,p^2 .$$

Ma $(pp')^2 = (ab)^2\alpha_\eta\,\beta_\eta = \Theta_\eta{}^2 = \Theta$, $(p\Omega)^2 = (a\Omega)^2\,\alpha_\eta \equiv 0$, $(\Omega\Omega')^2 = \mathrm{D}$, $p^2 = a^2{}_\xi\,\alpha_\eta = f^2$,

[1] *Theorie* etc. § 35.

dunque

29) $$-2F^2 = \Theta\Omega^2 + Df^2 .$$

## § 4.

*Forme proiettive ed in involuzione contenute nella corrispondenza* $f = 0$.

Ecco alcune altre considerazioni, che tolgo in sostanza dalla citata Nota del prof. Battaglini, ma che adatto, sviluppandole di più, alla forma ed allo scopo delle mie ricerche attuali.

I parametri $\lambda\mu$ di una coppia coniugata armonica rispetto alla coppia $\xi$ fornita dalla relazione $a^2_\xi \alpha_\eta = 0$ (per $\eta$ dato) soddisfano all'equazione

30) $$a_\lambda a_\mu \alpha_\eta = 0 ,$$

e formano un'involuzione i cui punti doppi sono i punti della coppia $\xi$ suddetta. Questa coppia, reale o immaginaria, giace sempre sopra una retta reale $x$ del fascio O che si sa costruire: le coppie $\lambda\mu$ poi, anch'esse reali o immaginarie, sono situate sui raggi del fascio che ha per centro il polo X di $x$ rispetto a $C_2$.

Tenendo fisso uno dei punti $\lambda\mu$, per es. $\lambda$, le coppie $\mu\eta$ che soddisfano la 30) che indicheremo allora con la forma bilineare

31) $$p_\mu \pi_\eta \equiv a_\lambda a_\mu \alpha_\eta = 0 ,$$

costituiscono due serie proiettive di punti su $C_2$, e si costruiscono nel seguente modo.

Dato il punto $\eta$ si trovi nel fascio O il raggio $x \equiv O\xi$ corrispondente al raggio $\varepsilon\eta$ del fascio $\varepsilon$. La congiungente il polo X di $x$ col punto fisso $\lambda$ incontra la $C_2$ nel richiesto punto $\mu$. Viceversa per trovare il punto $\eta$ corrispondente al punto dato $\mu$, si meni la retta $\lambda\mu$ e si cerchi l'intersezione X di essa con la retta $o$. La polare $x$ di X sarà una retta del fascio O, ed avrà per corrispondente nel fascio $\varepsilon$ una retta che segherà la conica nel richiesto punto $\eta$.

Costruendo in tal maniera tre coppie $\mu_0\eta_0$, $\mu_1\eta_1$, $\mu_2\eta_2$ di punti corrispondenti, si troverà poi la coppia degli elementi uniti delle due forme proiettive, rappresentata algebricamente dall'equazione

32) $$p_\nu \pi_\nu \equiv a_\lambda a_\nu \alpha_\nu = 0 ,$$

costruendo, com'è noto, la retta Pascal relativa all'esagono semplice $\mu_0\eta_1\mu_2\eta_0\mu_1\eta_2$ (in quest'ordine). Questa retta é sempre reale e costruibile *linearmente*.

Che i punti $\mu\eta$ costituiscono due forme proiettive sulla $C_2$ si vede, oltre che dall'equazioni 30) o 31), geometricamente osservando che, per la costruzione stessa precedente, il fascio $(\lambda)$ è prospettivo sia alla $C_2$ sia alla punteggiata $(o)$. A questa punteggiata è forma proiettiva il fascio delle polari $x$ dei suoi punti X, ed a questo fascio è proiettivo, per l'ipotesi fondamentale, il fascio $(\varepsilon)$, ch'è poi prospettivo alla conica. Perciò i fasci $(\lambda)$ ed $(\varepsilon)$ sono proiettivi ed incidono sulla $C_2$ due serie proiettivi di punti; come si voleva dimostrare.

Di qui si vede che i punti uniti si possono anche ottenere cercando le altre due intersezioni (oltre $\lambda$ ed $\varepsilon$) di $C_2$ con la conica individuata dai due fasci proiettivi $(\lambda)$ ed $(\varepsilon)$. La retta reale che contiene, realmente o immaginariamente, le due intersezioni è sempre costruibile, come fu ricordato nel § 2.

Anzi quì cade in acconcio osservare come al metodo indicato nel « Cremona n. 176 problema b) » citato e basato sul teorema di Désargues, si possa sostituire con eguale vantaggio il metodo precedente fondato sull'esagono di Pascal.

Perchè, infatti, date due coniche aventi due punti comuni in $\lambda$ ed $\varepsilon$, si proiettino tre punti qualunque $\alpha\beta\gamma$ di una di esse da' centri $\lambda$ ed $\varepsilon$. Le rette $\lambda\alpha$, $\varepsilon\alpha$; $\lambda\beta$, $\varepsilon\beta$; $\lambda\gamma$, $\varepsilon\gamma$ taglieranno sulla seconda conica i punti $\mu_0\eta_0$, $\mu_1\eta_1$, $\mu_2\eta_2$, coi quali si formerà poi l'esagono $\mu_0\eta_1\mu_2\eta_0\mu_1\eta_2$ etc.

Tornando alla nostra figura, troveremo altri punti della corrispondenza proiettiva $p_\mu\pi_\eta = 0$. A questo fine consideriamo il punto $\omega'$ come appartenente alla serie dei punti $\mu$. Poichè la polare $\omega'$ è la tangente in $\omega'$, così il punto della serie $\eta$ corrispondente ad $\omega'$ è quello dove il raggio del fascio $\varepsilon$ corrispondente alla tangente $\omega'$ sega $\mathbf{C}_2$, ossia è il punto $\theta'$. Similmente $\omega''$ e $\theta''$ sono punti corrispondenti. Si avranno perciò sulla curva le due serie proiettive

$$\omega'\,\omega''\,\mu_0\mu_1\mu_2\ldots\ldots, \quad \theta'\,\theta''\,\eta_0\eta_1\eta_2\ldots\ldots;$$

e la retta Pascal su trovata che ne contiene i punti uniti, passerà anche pel punto S comune alle due rette $\omega'\,\theta''$ ed $\omega''\,\theta'$ (1). Ma il punto S è indipendente dalla posizione del punto $\lambda$, dalla qual posizione dipendono invece le serie dei punti $\mu$ e dei punti $\eta$. Dunque:

Le coppie degli elementi uniti delle serie proiettive $a_\lambda a_\mu \alpha_\eta = 0$ corrispondenti a diversi $\lambda$, sono sempre allineate con un punto fisso S. Esse costituiscono sulla $\mathbf{C}_2$ un' involuzione quadratica i cui punti doppi sono quelli dove $\mathbf{C}_2$ è incontrata dalla polare $s$ di S.

I punti $\omega'\,\omega''$, $\theta'\,\theta''$ possono divenire immaginarî, ma il punto $S \equiv \omega'\,\theta''\,.\,\omega''\,\theta'$ è sempre reale; esso si ottiene in ogni caso come intersezione di due rette Pascal, corrispondenti a due punti $\lambda$.

I punti comuni ad $s$ e $\mathbf{C}_2$ si hanno eguagliando a zero il jacobiano delle due forme:

$$l_\nu^2 = 2a_1\,a_\nu\,\alpha_\nu\,, \qquad m_\nu^2 = 2b_2\,b_\nu\,\beta_\nu$$

appartenenti all' involuzione suddetta $a_\lambda\,a_\nu\,\alpha_\nu = 0$ e corrispondenti ai valori $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 = 0$ di $\lambda$.

Si trova immediatamente

$$(lm)\,l_\nu m_\nu = (\alpha\beta)\,a_1\,b_2\,a_\nu\,b_\nu + (\alpha b)\,a_1\,b_2\,a_\nu\,\beta_\nu + (a\beta)\,a_1\,b_2\,b_\nu\,\alpha_\nu + (ab)\,a_1\,b_2\,\alpha_\nu\,\beta_\nu\,.$$

La prima e la quarta parte, mutandovi i simboli e prendendo la semisomma delle espressioni che risultano, vengono subito eguali ad $\frac{1}{2}\,\Omega_\nu^2$ ed $\frac{1}{2}\,\Theta_\nu^2$.

Quanto alla seconda ed alla terza parte, chiamando M la loro somma e permutando i simboli nella terza viene

$$\mathrm{M} = (\alpha b)\,(ab)\,a_\nu\,\beta_\nu\,.$$

Sostituendo una volta ad $(\alpha b)\,\beta_\nu$ il valore $(\alpha\beta)\,b_\nu - (b\beta)\,\alpha_\nu$ ed un' altra volta ad $(\alpha b)\,a_\nu$ il valore $(ab)\,\alpha_\nu - (a\alpha)b_\nu$, e ricordando che $(a\iota)\,a_\xi = (b\beta)\,\beta_\xi = \sigma_\xi$, viene

$$\mathrm{M} = \Omega_\nu^2 - (a\sigma)\,a_\nu\,\alpha_\nu$$
$$\mathrm{M} = \Theta_\nu^2 + (a\sigma)\,a_\nu\,\alpha_\nu\,.$$

(1) Vedasi per es. Cremona, op. citata n. 157; Reye, *Geometrie der Lage* etc.

Di qui si traggono le:

33) $(a\sigma)\, a_\nu\, \alpha_\nu = \frac{1}{2}\,(\Omega_\nu^2 - \Theta_\nu^2)$ che sarà utile in seguito [1].

$$M = \tfrac{1}{2}\,(\Omega_\nu^2 + \Theta_\nu^2)\,;$$

e pel iacobiano richiesto l'espressione

34) $$(lm)\, l_\nu\, m_\nu = \Omega_\nu^2 + \Theta_\nu^2$$

che si trova nella Nota citata del Battaglini. Dalla forma della 34) si deduce che la coppia da essa rappresentata appartiene all'involuzione individuata dalle coppie $\Omega = 0$ e $\Theta = 0$; perciò $s$ passerà pel punto $o\,.\,t$.

Per avere poi i valori di $\lambda$ per i quali i punti $\nu$ dell'involuzione $a_\lambda\, a_\nu\, \alpha_\nu = 0$ coincidono, si deve annullare il discriminante di questa forma quadratica in $\nu$. Posto

$$n_\nu^2 = n'^2_\nu = a_\lambda\, a_\nu\, \alpha_\nu$$

si trova

$$(nn')^2 = a_\lambda\, (an')\, (\alpha n') = \tfrac{1}{2}\, a_\lambda\, b_\lambda \,\{\, (ab)\, (\alpha\beta) + (a\beta)\, (\alpha b)\,\{\,,$$

e, ricordando che

$$(ab)\, (a\beta) = (\alpha\beta)\, (ab) - (a\alpha)\, (b\beta)\,,$$

35) $$(nn'_{,})^2 = \Omega_\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\,\sigma_\lambda^2 = 0\,.$$

Le serie proiettive definite dalla forma bilineare

$$p_\mu\, \pi_\eta = p'_\mu\, \pi'_\eta = a_\lambda\, a_\mu\, \alpha_\eta$$

sono in istretta dipendenza dalla posizione del punto $\lambda$. Per riconoscere l'influenza di questo punto, giova ricordare che la funzione $p_\mu\, \pi_\eta$ ammette gl'invarianti $(n_\nu^2 = p_\nu\, \pi_\nu)$

36) $$l = (nn')^2\,, \qquad r = (pp')\, (\pi\pi')\,, \qquad k = (p\pi)\ [2].$$

Il primo invariante fu trovato poc'anzi: esso fornisce appunto due punti $\lambda$ pei quali la forma $n_\nu^2$ diviene un quadrato perfetto, ed in generale fa giudicare della realità o meno dei punti uniti forniti da $n_\nu^2 = 0$.

Il secondo invariante $r$ esprime, com'è noto, col suo annullarsi che la funzione $p_\mu\, \pi_\eta$ non stabilisce più alcuna dipendenza proiettiva tra i punti $\mu$ ed $\eta$, ma che si scinde nel prodotto di due forme lineari. Ora si ha

37) $$r = (ab)\, (\alpha\beta)\, a_\lambda\, b_\lambda = \Omega_\lambda^2\,.$$

Adunque i due punti $\omega'\, \omega''$ forniti dall'equazione $\Omega_\lambda^2 = 0$ sono tali che le serie proiettive ad esse corrispondenti cessano di sussistere; e dalla costruzione generale si vede che si ha sempre o ciascuno dei punti $\omega$ o ciascuno dei punti $\theta$.

Per un'altra prova, eliminando $\lambda$ tra le due $a_\lambda\, a_\mu\, \alpha_\eta = 0$ ed $\Omega_\lambda^2 = 0$ si ha

$$0 = (\Omega a)\, (\Omega b)\, a_\mu\, b_\mu\, \alpha_\eta\, \beta_\eta = \tfrac{1}{2}\,\{\, (\Omega a)^2\, b_\mu^2 + (\Omega b)^2\, a_\mu^2 - (ab)^2\, \Omega_\mu^2\,\{\, \alpha_\eta\, \beta_\eta$$

$$= -\tfrac{1}{2}\, \Omega_\mu^2\, \Theta_\eta^2\,,$$

perchè $(\Omega a)^2\, \alpha_\eta = (\Omega b)^2\, \beta_\eta = 0$. E così infatti s'era concluso prima.

Più importante a considerare è l'invariante $k$. Esso, è pur noto, esprime col suo annullarsi che le due serie proiettive sono in involuzione. Ora si ha, posto $g = p_\mu\, \pi_\eta = a_\lambda\, a_\mu\, \alpha_\eta$,

38) $$k = \frac{\partial^2 g}{\partial \mu_1\, \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 g}{\partial \mu_2\, \partial \eta_1} = (p\pi) = (a\alpha)\, a_\lambda = \sigma_\lambda\,.$$

[1] In funzione delle forme fondamentali: $(a\sigma)\, a_\nu\, \sigma_\nu = q_\nu^2 + \frac{1}{3}\,\sigma_\nu^2$; si cfr. le eq.$^{i}$ 10) ed 11).

[2] Nella *Theorie* sono indicati con $2l$, $2r$, $2k$ e non dati simbolicamente: § 24.

Dunque le serie proiettive corrispondenti al punto $\lambda$ definito dall' equazione $\sigma_\lambda = 0$ sono in involuzione.

E poichè dalla $\sigma_\lambda = 0$ si trae $\lambda_1 = \sigma_2$, $\lambda_2 = -\sigma_1$, tale involuzione è rappresentata dalla forma

39) $$(a\sigma)\, a_\mu\, \alpha_\eta = 0\,.$$

Il carattere involutorio, anche nell'espressione algebrica, si riconosce subito partendo dalla relazione polare

$$a_\lambda\, a_\mu\, \alpha_\eta = \varphi_\lambda\, \varphi_\mu\, \varphi_\eta + \tfrac{1}{3}(\lambda\eta)\, \sigma_\mu + \tfrac{1}{3}(\mu\eta)\, \sigma_\lambda \ (^1),$$

e ponendovi $\sigma_\lambda = 0$. Così

40) $$(a\sigma)\, a_\mu\, \alpha_\eta = (\varphi\sigma)\, \varphi_\mu\, \varphi_\eta + \tfrac{1}{3}\sigma_\mu\, \sigma_\eta = 0\,.$$

I punti doppî dell'involuzione sono forniti dall' equazione $(a\sigma)\, a_\nu\, \alpha_\nu = 0$ ovvero per le 40) 4) e 33)

41) $$\varphi_\nu^2 + \sigma_\nu^2 = 0\,, \quad \text{o} \quad \Omega_\nu^2 - \Theta_\nu^2 = 0\,.$$

L'ultima forma conduce immediatamente alla costruzione della retta sulla quale giacciono i punti doppî. Invero formando l' invariante simultaneo (armonizzante) delle due forme $\Omega_\nu^2 + \Theta_\nu^2 = 0$, $\Omega_\nu^2 - \Theta_\nu^2 = 0$, si trova

$$(\Omega\Omega')^2 - (\Omega\Theta)^2 + (\Theta\Omega)^2 - (\Theta\Theta')^2 \equiv 0\,;$$

a cagione della proprietà $(\Omega\Omega')^2 = (\Theta\Theta')^2$. Dunque la coppia 41) è armonica a quella comune ad $s$ e $C_2$ (eq.$^e$ 34); e la retta sulla quale giace la coppia 41) deve passare per S, come nel caso generale, ed inoltre pel punto $o\,.\,t$ (centro dell' involuzione individuata dalle coppie $\omega$ e $\theta$ esistenti sulle rette $o$ e $t$), ed è altresì coniugata armonica di $s$ rispetto ad $o$ ed a $t$.

Le precedenti ricerche intorno alla posizione del punto $\lambda$ sono casi particolari dell' altra:

Trovare i punti $\lambda$ per i quali le coppie $\mu\eta$ formino un rapporto anarmonico dato $\varrho$ coi due punti uniti.

Il detto rapporto anarmonico $\varrho$ è radice dell' equazione reciproca di 2° grado (*Theorie* § 24)

$$\left(\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\right)^2 = \frac{k^2}{-2l}\,,$$

ossia per le 35), 36) e 38)

$$(\varrho+1)^2\, \Omega_\lambda^2 - 2\varrho\sigma_\lambda^2 = 0\,;$$

e si vede che i punti $\lambda$ appartengono all' involuzione individuata dalla coppia $\omega'\omega''$ e dalla coppia $\sigma\sigma$, che rappresenta due punti riuniti in $\sigma$.

Invece di dare il punto $\lambda$ e costruire poi le coppie $(\nu)$ di punti uniti delle serie proiettive $a_\lambda\, a_\mu\, \alpha_\eta \equiv p_\mu\, \pi_\eta = 0$, coppie allineate col punto fisso S, supponiamo invece conosciuto il punto S (basta costruirlo con due rette Pascal), e che dato un punto $\nu'$ o $\nu''$ della coppia $(\nu)$ su una retta passante per S, per es. $\nu'$, si voglia costruire $\lambda$. Ecco come ciò si può fare.

Poichè ad un punto $\lambda$ corrisponde una sola coppia $\nu$ definita dall'equazione 32), e ad un punto $\nu$ un sol punto $\lambda$, ed inoltre le coppie $(\nu)$ sono sopra raggi uscenti

(1) Si vede a pag. 377.

da S, non solo si vede che i punti $\lambda$ e $\nu$ sono in corrispondenza (1, 2), ma che la serie $\lambda$ è proiettiva al fascio S sui raggi del quale sono le coppie $(\nu)$.

La proiettività è determinata costruendo (ma vedremo che se ne può far senza se si vuole) tre coppie di elementi corrispondenti: tre punti $\lambda$ e tre raggi per S.

Proiettando i punti $\lambda$ dal punto $\varepsilon$ si hanno i fasci proiettivi $\varepsilon(\lambda...)$ ed (S) che generano una conica $\mathbf{C''}_2$. Questa conica sega la fondamentale $\mathbf{C}_2$ nei punti uniti della corrispondenza $a_\lambda a_\nu \alpha_\nu = 0$, punti che, come insegna l' intuizione geometrica, o come si vede subito, sono dati dalla stessa forma $\varphi$.

In conseguenza di ciò la proiettività dei due fasci $\varepsilon$ ed S è immediatamente data dalle terne corrispondenti di raggi $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$; S$\alpha$, S$\beta$, S$\gamma$.

Da quel che precede segue subito una *prima costruzione del punto* $\sigma$. Basta perciò trovare nella corrispondenza $a_\lambda a_\nu \alpha_\nu = 0$ il punto $\lambda$ che corrisponde al raggio passante per S e pel punto $t.o$: quel punto sarà $\sigma$.

Nella predetta corrispondenza i punti analoghi ai punti $\Omega$ e $\Theta$ sono forniti dalle equazioni già trovate

$$\Omega_\nu^2 + \Theta_\nu^2 = 0 \quad \text{ed} \quad \Omega_\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_\lambda^2 = 0\,;$$

il punto analogo a $\sigma$ è lo stesso $\sigma$, perchè infatti posto $v = a_\lambda a_\nu \alpha_\nu$, si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \nu_1 \partial \lambda_2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \nu_2 \partial \lambda_1} = -(a\alpha)\, a_\nu = -\sigma_\nu\,.$$

Nel costruire la conica $\mathbf{C''}_2$ si è supposto tacitamente che la terna $\alpha\beta\gamma$ fosse tutta reale. Se i punti $\beta$ e $\gamma$ sono immaginarî, non cessa per questo di esistere la conica $\mathbf{C''}_2$. Nel § 2 infatti si cennò al modo, del resto conosciuto, come trovare sempre la retta reale $\beta\gamma$. Su questa retta esisterà in ogni modo un' involuzione di punti, reciproci rispetto a qualunque conica passante per $\beta\gamma$, che sono i punti doppî di quella involuzione. Il problema di costruire la $\mathbf{C''}_2$ si può allora presentare sotto la forma: *costruire una conica passante per tre punti* $\varepsilon$, $\alpha$, S, e rispetto alla quale siano reciproci i *punti coniugati in un' involuzione data sulla retta* $\beta\gamma$ [1]; ed è per tal modo reso indipendente dalla realità o immaginarietà de' punti $\beta\gamma$.

## § 5.

*Caso*: $\sigma_\xi \equiv 0$.

La forma

$$f = a^2_\xi\, \alpha_\eta = \varphi^2_\xi\, \varphi_\eta + \tfrac{2}{3}(\xi\eta)\, \sigma_\xi$$

suggerisce naturalmente lo studio della corrispondenza speciale polare definita dall'equazione

$$42) \qquad \varphi^2_\xi\, \varphi_\eta = 0$$

alla quale si riduce la $f$ supponendo il punto $\sigma$ indeterminato, ossia facendo $\sigma_\xi \equiv 0$. Ma la teoria della corrispondenza 42) fu data dal prof. Battaglini [2], che la rappresentò appunto sopra una conica. I punti $\xi$ in questo caso si dicono armonici di 2° ordine di $\eta$, ed il punto $\eta$ armonico di 1° ordine di $\xi$ rispetto a $\varphi$.

[1] Cremona, *Geometria projettiva* n. 247.

[2] Rendiconto dell'Accademia di Napoli, febbraio 1866.

Potrei ammetter conosciuta quella teoria, sebbene qualcosa resti ancora a fare nel caso che due elementi della forma $\varphi$ siano immaginarî: ciò che esporrò in un' altra Nota (1). Pure dirò le poche cose che seguono.

L' ipotesi $\sigma\xi \equiv 0$ conduce immediatamente alle relezioni

$$\alpha^2\xi\ \alpha_\eta = \varphi^2\xi\ \varphi_\eta$$

$$q,\ r,\ \varkappa,\ \varrho,\ \tau,\ \mathrm{L},\ \mathrm{M},\ \mathrm{N} \equiv 0\ ,$$

$$\Omega = \Theta = \Delta$$

$$\mathrm{D} = (\Omega\Omega')^2 = (\Theta\Theta')^2 = (\Theta\Omega)^2 = (\Delta\Delta')^2 = \mathrm{R}\ ,$$

$$\mathrm{F} = (\varphi\Delta)\ \varphi\xi\ \Delta\xi\ \varphi_\eta = (\varphi\Delta)\ \varphi^2\xi\ \Delta_\eta\ (2),$$

e l'equazione 18) diviene

$$(\varphi\Delta)\ \varphi\xi^2\ \Delta\xi \equiv \mathrm{Q}\xi^3 = 0\ .$$

L'ultimo risultato dice dunque, § 2 eq.e 18), che i punti $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ rappresentati in questo caso da Q sono coniugati armonici di $\alpha\beta\gamma$ rispetto ai punti $\Delta\xi^2 = 0$. Ma essi rappresentano pure, come in generale, uno dei punti $\xi$ quando il punto corrispondente $\eta$ coincide con uno dei punti $\alpha\beta\gamma$, con $\alpha$ per es. In tal caso, com' è noto dalla teoria dei centri armonici, uno degli armonici di 2° ordine $\xi$ coincide con $\alpha$, e l'altro sarà il coniugato armonico di $\alpha$ rispetto a $\beta\gamma$. Perciò i punti di Q saranno i coniugati armonici di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ rispetto alle coppie $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$: risultato notissimo.

Se dunque la terna $\alpha, \beta, \gamma$ è reale, costruita *linearmente* la terna $\alpha', \beta', \gamma'$, le rette $\alpha\alpha'.\ \beta\beta', \gamma\gamma'$ concorreranno in un punto D (che tien luogo del punto O del caso generale) la cui polare $d$ sega $\mathbf{C}_2$ nei punti doppî dell' involuzione costituita dalle coppie $\xi$ rappresentati dalla forma $\Delta\xi^2 = 0$. Chiamerò $\delta'\ \delta''$ questi punti, e $\delta'\ \delta''$ le relative tangenti (punti hessiani, tangenti hessiane).

La terna $\varphi$ determina in modo unico il punto D.

Anche la corrispondenza $\varphi^2\xi\ \varphi_\eta = 0$, come quella generale, si può costruire, ed in tre modi, dei quali uno sempre reale, mediante fasci prospettivi i cui centri siano D ed uno dei punti $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$, per es. $\alpha'$.

Se di tre punti $\lambda, \mu, \eta$ che soddisfano l' equazione

43) $$\varphi_\lambda\ \varphi_\mu\ \varphi_\eta = 0\ ,$$

si tien fisso $\lambda$, gli altri due $\mu$ ed $\eta$ saranno coniugati nell' involuzione che ha per elementi doppî i punti $\varphi^2_\nu\ \varphi_\lambda = 0$, cioè gli armonici di 2° ordine di $\lambda$; le coppie $\nu$ sono anch'esse coniugate nell'involuzione, i cui elementi doppî sono dati da $\Delta_\nu{}^2 = 0$ etc.

La terna di punti $\lambda$, $\mu$, $\eta$ che soddisfano l'equazione $\varphi_\lambda\ \varphi_\mu\ \varphi_\eta = 0$ si dice *armonica rispetto* alla terna $\alpha\beta\gamma$.

L'essere le coppie $\mu\eta$ in involuzione, qualunque sia $\lambda$, prova che il punto $\sigma$ riesce indeterminato; mentre nel caso generale erano in involuzione le sole coppie corrispondenti al punto, non indeterminato, $\sigma$.

La corrispondenza coniugata di $\varphi^2\xi\ \varphi_\eta = 0$ è $(\varphi\Delta)\ \varphi^2\xi\ \Delta_\eta = 0$, ossia $\mathrm{Q}\xi^2\ \mathrm{Q}_\eta = 0$ ecc.

(1) Tale Nota fu pubblicata, mentre la presente Memoria era sotto il giudizio della Commissione nominata per i premi del Ministero di P. I., nel Rendiconto dell' Accademia di Napoli, giugno 1885, col titolo: *Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche.* Vedasi anche con lo stesso titolo una lettera al prof. Battaglini nel suo Giornale, vol. 23, 1885.

(2) Questa identità è nota nella teoria delle forme cubiche. Del resto si ha

$$(\varphi\Delta)\ \varphi^2\xi\ \Delta_\eta - (\varphi\Delta)\ \varphi\xi\ \Delta\xi\ \varphi_\eta = (\varphi\Delta)\ \varphi\xi\ (\varphi\xi\ \Delta_\eta - \varphi_\eta\ \Delta\xi) = (\varphi\Delta)^2\ \varphi\xi\ (\xi\eta) \equiv 0\ .$$

## § 6.

*Alcune formole nella teoria delle coniche.*

Pongo in questo §, perchè serviranno poi in seguito, alcune formole che io diedi in uno scritto: *Le coniche e le forme binarie quadratiche e cubiche*, pubblicato nel volume XXI del Giornale di Battaglini. Esse formole si ottengono dal principio di Hesse (Uebertragunsprincip) [1], dandogli la veste simbolica delle forme binarie, così agevolmente, che bastano ad illustrarle i pochi cenni che ne fo qui appresso.

Sia dunque una conica, per es. la nostra conica fondamentale $\mathbf{C}_2$, definita dalle equazioni

44) $$\varrho X_1 = a^2{}_\lambda, \qquad \varrho X_2 = b^2{}_\lambda, \qquad \varrho X_3 = c^2{}_\lambda,$$

dove $\varrho$ è un fattore di proporzionalità; $X_i$ sono le coordinate di un punto X riferito ad un triangolo fondamentale $X_1, X_2, X_3 = 0$; $a^2{}_\lambda$, $b^2{}_\lambda$, $c^2{}_\lambda$ sono tre forme binarie quadratiche in $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ tali che $(ab).(bc)(ca) \gtrless 0$.

Ponendo

45) $$p_\lambda{}^2 = (bc)\, b_\lambda c_\lambda, \qquad q_\lambda{}^2 = (ca)\, c_\lambda a_\lambda, \qquad r_\lambda{}^2 = (ab)\, a_\lambda b_\lambda,$$

saranno:

46) $$\sigma U_1 = p^2{}_\lambda, \qquad \sigma U_2 = q^2{}_\lambda, \qquad \sigma U_3 = r^2{}_\lambda$$

le coordinate di una retta U tangente alla conica nel punto X, se la *situazione riunita* di un punto e di una retta è espressa dall' annullarsi della forma

$$X_U = U_X = X_1 U_1 + X_2 U_2 + X_3 U_3 .$$

Per modo che ponendo simbolicamente

47) $$U_1 a^2{}_\lambda + U_2 b^2{}_\lambda + U_3 c^2{}_\lambda = u^2{}_\lambda = u'^2{}_\lambda = \ldots$$

48) $$X_1 p^2{}_\lambda + X_2 q^2{}_\lambda + X_3 r^2{}_\lambda = x^2{}_\lambda = x'^2{}_\lambda = \ldots$$

saranno $u^2{}_\lambda = 0$ ed $x^2{}_\lambda = 0$, se $\lambda$ è dato, le equazioni del punto di $\mathbf{C}_2$ e della tangente in esso, punto e tangente appartenenti allo stesso parametro $\lambda$ o, come si sogliono chiamare, punto $\lambda$ e tangente $\lambda$. Se invece son date le $U_i$ e le $X_i$, ovvero, ch' è lo stesso, le $u_i$ e le $x_i$, le equazioni $u_\lambda{}^2 = 0$ ed $x_\lambda{}^2 = 0$ forniscono i parametri dei punti d' intersezione di U (o di $u$) con $\mathbf{C}_2$, e delle tangenti uscenti da X (o da $x$).

Eguagliando i coefficienti delle potenze di $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ nelle 47) e 48) si hanno le espressioni non simboliche

49) $$u_i = a_i U_1 + b_i U_2 + c_i U_3, \quad x_i = p_i X_1 + q_i X_2 + r_i X_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Queste equazioni dànno una trasformazione di coordinate; e poichè le coordinate $u_i$ ed $x_i$ sono coefficienti delle forme quadratiche $u^2{}_\lambda$ ed $x^2{}_\lambda$ così possiamo dire:

I coefficienti di una forma quadratica binaria si possono assumere come coordinate di una retta o di un punto nel piano di una conica fissa.

Le equazioni di $\mathbf{C}_2$ in coordinate di rette e di punti sono rispettivamente

$$(uu')^2 = 2\,(u_1 u_3 - u_2{}^2) = d_{11} U_1{}^2 + \ldots + 2d_{23} U_2 U_3 + \ldots = 0,$$
$$(xx')^2 = 2\,(x_1 x_3 - x_2{}^2) = D_{11} X_1{}^2 + \ldots + 2D_{23} X_2 X_3 + \ldots = 0 .$$

[1] Hesse, *Vier Vorlesungen der anal. Geom.* — Clebsch, *Vorl. über Geom.*

dove

$$d_{11} = (aa')^2 \quad , \quad d_{23} = (bc)^2$$
$$D_{11} = (pp')^2 = \tfrac{1}{2}(d_{22}\, d_{33} - d^2_{23}) \, , \quad D_{23} = (qr)^2 = \tfrac{1}{2}(d_{12}\, d_{23} - d_{11}\, d_{23})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il nuovo triangolo di riferimento è formato dalle rette $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ tangenti alla $\mathbf{C}_2$ nei punti $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, e dalla retta $x_2 = 0$ ch' è polare del punto $u_2 = 0$.

Nel sistema di coordinate $x_i$ ed $u_i$ è interessante trovare la condizione che un punto ed una retta si appartengano, siano in *situazione riunita*. Si trova ciò nel modo seguente.

Essendo $x$ un punto dato ed $u$ una retta data, le equazioni 48) e 47) forniscono, come si è detto, i punti di contatto delle tangenti uscenti da $x$, ed i punti dove $u$ sega la curva. Se la prima coppia di punti è armonica con la seconda, il punto $x$ e la retta $u$ si appartengono: e viceversa. La condizione analitica di questo fatto è data dall' annullarsi dell'invariante simultaneo $(xu)^2$ delle due forme $x^2_\lambda$ ed $u^2_\lambda$. Onde la equazione

50) $$(ux)^2 = 0 \ (^1)$$

è la condizione richiesta. Essa rappresenta poi un punto $x$ o una retta $u$ secondo che le variabili sono $u$ o $x$.

Se ora data l' equazione della retta $u$: $(ux)^2 = 0$, si cercano i parametri dei punti d' intersezione con $\mathbf{C}_2$, bisogna riscrivere l'equazione 47), cioè $u^2_\lambda = 0$. Or questa equazione si ottiene dalla 50) facendo le sostituzioni $x_2 = \lambda_1$, $x_1 = -\lambda_2$, cioè ponendovi $x_\lambda = 0$ (simbolicamente). Allo stesso modo scritta l'equazione del punto $(xu)^2 = 0$ e postovi $u_\lambda = 0$, si ottiene l' equazione 48) $x^2_\lambda = 0$, che porge i parametri delle tangenti uscenti da $x$. In generale se si ha un' equazione dell'ordine $n$ o della classe $n$, le sostituzioni precedenti forniscono i parametri dei $2n$ punti o delle $2n$ tangenti comune alle $\mathbf{C}_2$ e rispettivamente alla curva di ordine $n$ o a quella di classe $n$.

In sostanza le sostituzioni simboliche

51) $$x_1 = \lambda_2 \, , \ x_2 = -\lambda_1 \qquad u_1 = \lambda_2 \, , \ u_2 = -\lambda_1$$

equivalgono a queste altre effettive

52) $$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_2^2 : -\lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1^2$$
$$u_1 : u_2 : u_3 = \lambda_2^2 : -\lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1^2$$

che rappresentano appunto la $\mathbf{C}_2$ riferita al nuovo triangolo fondamentale.

Invertendo le cose dette si trae l'altra conseguenza, che se in una forma quadratica

$$\psi_\lambda^2 = 0$$

si fanno le sostituzioni 51), si hanno le equazioni

53) $$(\psi x)^2 = 0 \, , \qquad (\psi u)^2 = 0$$

d'una retta e di un punto che sono polo e polare rispetto a $\mathbf{C}_2$, perchè la retta unisce i due punti $\psi_\lambda^2 = 0$, e il punto è l' intersezione delle due tangenti in essi.

(1) Tornando alle antiche coordinate ed approfittando di proprietà conosciute delle 6 forme $a, b, c, p, q, r$ si trova infatti

$$(ux)^2 = d\,(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) = 0 \, , \quad \text{dove} \quad d = (bc)\,(ca)\,(ab) \gtrless 0 \, .$$

Le 53) possono ancora trasformarsi introducendo i parametri-radici di $\psi_\lambda^2 = 0$. Chiamandoli $\mu$ e $\nu$ possiamo supporre

$$\psi_\lambda^2 = (\lambda\mu)\,(\lambda\nu) = 0\,.$$

Di qui per le sostituzioni 51) si traggono le equazioni

54) $$(\psi x)^2 \equiv x_\mu x_\nu = 0\,, \qquad (\psi u)^2 = u_\mu u_\nu = 0$$

della corda $\mu\nu$ e del polo $\mu\nu$ di essa.

Se $x$ ed $y$ sono due punti del piano reciproci rispetto a $C_2$, le due forme $x^2{}_\lambda = 0$, $y^2{}_\lambda = 0$ sono armoniche; onde sarà

55) $$(xy)^2 = 0$$

la relazione tra due punti reciproci o coniugati. Così pure sarà

56) $$(uv)^2 = 0$$

la relazione tra due rette reciproche. In altri termini, supponendo $x$ ed $u$ fissi, le 55) e 56) rappresentano rispettivamente la polare di $x$ ed il polo di $u$. Ma se $u$ è proprio la polare di $x$ la sua equazione è, come fu visto prima a proposito dell'equazione 50), $(ux)^2 = 0$; dunque paragonando questa equazione con 55) si traggono le relazioni importanti (vedi le eq.$^i$ 54) tra il polo $x$ e la polare $u$

57) $$x_1 : x_2 : x_3 = u_1 : u_2 : u_3\,.$$

Dalle cose suesposte si trae inoltre l'importante principio:

Se tre punti $x$, $y$, $z$ sono per diritto sarà nullo l'invariante simultaneo $(yz)\,(zx)\,(xy)$, ovvero sarà nullo l'invariante simultaneo $(vw)\,(wu)\,(uv)$ se le tre rette $u$, $v$, $w$ passano per un punto [1].

Infatti le coppie di tangenti uscenti dai punti $x$, $y$, $z$ sono fornite dalle equazioni

$$x_\lambda^2 = 0\,, \quad y_\lambda^2 = 0\,, \quad z_\lambda^2 = 0\,.$$

Ma se $x$, $y$, $z$ sono per diritto, le tre coppie di tangenti o dei punti di contatto sono in involuzione, e perciò si annullerà l'invariante simultaneo di queste tre forme. Analogamente per la seconda parte.

Si hanno dunque le due condizioni per tre punti in linea retta o per tre rette passanti per un punto:

58) $$(yz)\,(yx)\,(zx) = 0$$

59) $$(vw)\,(vu)\,(wu) = 0\,.$$

Se, rispettivamente, $y$ e $z$ sono fissi e lo sono anche $v$ e $w$, mentre $x$ ed $u$ sono variabili, la 58) è l'equazione della congiungente due punti qualunque $y$ e $z$, la 59) è l'equazione dell'intersezione di due rette qualunque $v$ e $w$ del piano.

Queste equazioni, ponendo le forme jacobiane

59') $$A_\lambda^2 = (yz)\,y_\lambda z_\lambda\,, \qquad P_\lambda^2 = (vw)\,v_\lambda w_\lambda$$

si trovano ricondotte ai tipi 50) e 53).

## § 7.

*Applicazione delle formole precedenti. Altre costruzioni del punto $\sigma$.*

Poniamo che due rette arbitrarie condotte per O abbiano le equazioni della forma

60) $$\alpha_1\,(ax)^2 = 0\,, \qquad \alpha_2\,(ax)^2 = 0\,:$$

[1] Hesse, *Vier Vorlesungen* etc.

l'equazione di una retta qualunque condotta per esso si ottiene sommando le 60) dopo averle moltiplicate per le costanti $x_1$ e $x_2$; così:

61) $$\alpha_x (ax)^2 = 0 .$$

La 61) sega poi $C_2$ nei due punti $\xi$ forniti dalla

62) $$\alpha_x a^2\xi = 0 .$$

I parametri $x_1 : x_2$ e $\xi_1 : \xi_2$ che fissano l'uno la posizione del raggio uscente da O l'altro un punto o due punti $\xi$ sulla $C_2$ sono anch' essi in corrispondenza (1, 2); ma non è di questa corrispondenza che noi ci vogliamo qui occupare, sibbene di quella che nasce su $C_2$ rendendo prospettivi il fascio predetto di centro O ed un altro fascio che abbia il centro in un punto qualunque $\varepsilon$ di $C_2$ medesima e ne proietti i punti $\eta$.

Or essendo l' equazione di questo raggio $x_\varepsilon x_\eta = 0$, se con $(mx)^2 = 0$ si dinota la retta $m$ sulla quale cadono le intersezioni di due raggi corrispondenti dei fasci (O) ed ($\varepsilon$), troveremo una relazione tra $x$ ed $\eta$ esprimendo che le tre rette $\alpha_x (ax)^2 = 0$, $x_\varepsilon x_\eta = 0$, $(mx)^2 = 0$ passino per un punto. Perciò bisogna (eq.$^e$ 59) annullare l' invariante simultaneo delle tre forme quadratiche in $\lambda$:

$$\alpha_x a^2{}_\lambda = 0 , \quad (\lambda\varepsilon)(\lambda\eta) = 0 , \quad m^2{}_\lambda = 0$$

ottenute dalle equazioni delle tre rette per mezzo della sostituzione 51).

Si ha così:

63) $$(ma) \{ m_\eta a_\varepsilon + m_\varepsilon a_\eta \{ \alpha_x = 0$$

ch' è la relazione di proiettività tra i parametri $x$ ed $\eta$. Eliminando $x$ con l'aiuto della 62) scritta coi simboli $b\beta$ si ha la richiesta equazione di corrispondenza tra i punti $\eta$ ed i punti $\xi$ su $C_2$:

64) $$f = f(\xi^2, \eta^1) = (ma)(\alpha\beta) \{ m_\eta a_\varepsilon + m_\varepsilon a_\eta \{ b^2\xi = 0 .$$

Facendo uso dell'identità

$$(ma) b_\lambda + (ab) m_\lambda + (bm) a_\lambda = 0$$

la $f$ si trasforma facilmente in

$$\begin{aligned} f &= m_\varepsilon m_\eta \Omega_\xi{}^2 - m_\eta m_\xi \Omega_\varepsilon \Omega_\xi - m_\varepsilon m_\xi \Omega_\eta \Omega_\xi \\ &= (m_\varepsilon \Omega_\xi - m_\xi \Omega_\varepsilon) m_\eta \Omega_\xi - \left( m_\xi \Omega_\varepsilon + (m\Omega)(\varepsilon\xi) \right) m_\xi \Omega_\eta , \end{aligned}$$

dove al prodotto $m_\varepsilon \Omega_\xi$ dell'ultima parte è stata sostituita la somma eguale

$$m_\xi \Omega_\varepsilon + (m\Omega)(\varepsilon\xi) .$$

Di qui segue immediatamente, mutando il segno

$$f \equiv m^2\xi \Omega_\varepsilon \Omega_\eta - (m\Omega)^2 (\varepsilon\xi)(\eta\xi) = 0 .$$

Per i punti uniti si ha

$$\varphi^3\xi = m^2\xi . \Omega_\varepsilon \Omega_\xi = 0 .$$

Il primo fattore dà i due punti dove $m$ sega $C_2$; e il terzo punto $\Omega_\varepsilon \Omega_\xi = 0$ è il coniugato armonico di $\varepsilon$ rispetto ai due punti $\Omega_\lambda{}^2 = 0$, perciò si ottiene dalla seconda intersezione di $O\varepsilon$ con $C_2$: risultati conosciuti nel § 2.

Applicando l'operazione $\frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2}{\partial\xi_1 \partial\eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_2 \partial\eta_1} \right)$ si ha l'equazione del punto $\sigma$:

$$\sigma_\xi = (m\Omega) \Omega_\xi m_\xi - \tfrac{3}{2} (m\Omega)^2 (\xi\varepsilon) .$$

e successivamente

$$\sigma_\xi = (m\Omega)\,\{\,\Omega_\xi\, m_\varepsilon + (\Omega m)\,(\varepsilon\xi)\,\} - \tfrac{2}{2}\,(m\Omega)^2\,(\xi\varepsilon)$$

65)

$$= (m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi - \tfrac{1}{2}\,(m\Omega)^2\,(\xi\varepsilon)\,.$$

Per costruire $\sigma_\xi$ consideriamo il punto rappresentato dall'equazione

$$\varsigma_\xi = (m\Omega)\, m_\varepsilon \Omega_\xi + \tfrac{1}{2}\,(m\Omega)^2\,(\xi\varepsilon) = 0\,:$$

il punto $\varsigma_\xi$ sarà coniugato armonico di $\sigma_\xi$ rispetto ai due punti rappresentati dall'equazioni

$$(m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi = 0 \quad \text{e} \quad (\xi\varepsilon) = 0\,.$$

Il secondo di questi punti è il punto $\varepsilon$. Il primo risulta eliminando $\lambda$ tra le due equazioni $\Omega_\lambda\, \Omega_\xi = 0$, $m_\lambda\, m_\varepsilon = 0$. Il secondo di questi punti essendo coniugato armonico di $\varepsilon$ rispetto ai due punti $m$. $\mathbf{C}_2$ si costruisce menando per $\varepsilon$ e pel polo di $m$ una corda: il primo poi si ottiene analogamente menando pel punto ora trovato e pel punto O una trasversale fino ad incontrare la seconda volta $\mathbf{C}_2$: e questo incontro è il punto $(m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi = 0$.

Costruiamo ora il punto $\varsigma_\xi = 0$ trasformandone l'equazione così:

$$\begin{aligned}\varsigma_\xi &= \tfrac{1}{2}\,(m\Omega)^2\,(\xi\varepsilon) + (m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi \\ &= \tfrac{1}{2}\,(m\Omega)\,\{\, m_\xi\, \Omega_\varepsilon - m_\varepsilon\, \Omega_\xi\,\} + (m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi \\ &= \tfrac{1}{2}\,(m\Omega)\,(m_\xi\, \Omega_\varepsilon + m_\varepsilon\, \Omega_\xi)\,.\end{aligned}$$

Di qui, posto $\quad \vartheta_\lambda{}^2 = (m\Omega)\, m_\lambda\, \Omega_\lambda\,,$

si ha $\quad \varsigma_\xi = \vartheta_\varepsilon\, \vartheta_\xi = 0\,.$

Dunque $\varsigma$ è il coniugato armonico di $\varepsilon$ rispetto alla coppia $\vartheta_\lambda{}^2 = 0$ cioè rispetto ai punti doppî dell'involuzione individuata dalle due coppie $m_\lambda{}^2 = 0$, $\Omega_\lambda{}^2 = 0$; in altri termini $\varsigma$ è il coniugato di $\varepsilon$ in sì fatta involuzione.

Costruiti in tal modo i tre punti $(m\Omega)\, m_\varepsilon\, \Omega_\xi = 0$, $(\varepsilon\xi) = 0$, $\varsigma_\xi = 0$, il 4° armonico di $\varsigma_\xi = 0$ in ordine agli altri due sarà il punto richiesto $\sigma_\xi = 0$.

Invece di assumere prospettivi i due fasci O ed $\varepsilon$, possiamo assumerli addirittura proiettivi.

Allora se l'equazione d'un raggio del fascio O è simbolicamente

$$\alpha_\eta\,(ax)^2 = 0\,,$$

possiamo fargli corrispondere sulla curva un punto il cui parametro sia identico al parametro $\eta$ che fissa la posizione del raggio nel fascio O. Così che l'equazione del raggio corrispondente nel fascio $(\varepsilon)$ sarà

$$x_\varepsilon\, x_\eta = 0\,;$$

mentre chiamando $\xi$ il parametro d'uno dei punti dove il raggio per O sega la curva, si ha la relazione tra $\eta$ e $\xi$ nella forma voluta (eq.i 51)).

$$a^2{}_\xi\, \alpha_\eta = 0\,.$$

Per l'equazione fondamentale 3) possiamo dare all'equazione del raggio $\alpha_\eta\,(ax)^2 = 0$ la forma seguente

66)

$$\alpha_\eta\,(ax)^2 = \varphi_\eta\,(\varphi x)^2 + \tfrac{2}{3}\,(\sigma x)\, x_\eta = 0\,.$$

Dalla forma di questa equazione si vede che sul raggio da essa rappresentato si segano costantemente le due rette

$$\varphi_\eta\,(\varphi x)^2 = 0\,, \qquad (\sigma x)\, x_\eta = 0\,.$$

La prima è la congiungente gli armonici di 2° ordine $\varphi_\eta \varphi^2_\xi = 0$ di $\eta$ rispetto a' tre punti $\alpha\beta\gamma$ e però passa pel punto D, la seconda è quella che congiunge il punto $\eta$ al punto $\sigma_\xi = 0$ (le cui coordinate sono $\sigma_2$ e $-\sigma_1$).

Di qui segue un'altra semplicissima costruzione del punto $\sigma$. Perchè, dato $\eta$ e trovati i raggi dei fasci (O) e (D) corrispondenti a quel punto $\eta$ nelle due corrispondenze $a^2_\xi \alpha_\eta = 0$, $\varphi^2_\zeta \varphi_\eta = 0$, la retta che congiunge $\eta$ col punto comune a quei due raggi incontra $\mathbf{C}_2$ nel punto fisso $\sigma_\xi = 0$.

Un'altra costruzione è poggiata sopra una proprietà caratteristica del punto $\sigma$.

Questa proprietà si deduce dalla 3) ponendovi $\sigma_\xi = 0$, ossia $\xi_1 = \sigma_2$, $\xi_2 = -\sigma_1$; e si ha

67) $$(a\sigma)^2 \alpha_\eta = (\varphi\sigma)^2 \varphi_\eta \qquad (= \varkappa_\eta, \text{ eq.}^{\text{i}} 4).$$

Adunque il punto $\sigma$ è tale che considerato come punto $\xi$ tanto nella corrispondenza $a_\xi{}^2 \alpha_\eta = 0$ quanto nell'altra $\varphi^2_\xi \varphi_\eta = 0$ gli corrisponde lo stesso punto $\eta$. Perciò ai due raggi $O\sigma$ e $D\sigma$ dei due fasci (O) e (D) corrisponde uno stesso punto $\eta$ sulla curva.

Ora i due fasci O e D, riferiti proiettivamente al fascio $\varepsilon(\eta....)$, sono proiettivi tra loro e generano una conica $\mathbf{K}_2$. Questa conica incontra $\mathbf{C}_2$ nei punti uniti $\alpha\beta\gamma$ perchè i raggi $O\alpha$, $D\alpha$; $O\beta$, $D\beta$; $O\gamma$, $D\gamma$ sono tra loro corrispondenti. Il quarto punto comune sia $\chi$. Saranno $O\chi$ e $D\chi$ raggi corrispondenti, e corrisponderanno ad uno stesso punto $\eta$ di $\mathbf{C}_2$; dunque $\chi$ coincide con $\sigma$.

Perciò $\sigma$ è il 4° punto comune alle due coniche $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{K}_2 \equiv (OD\alpha\beta\gamma)$. La costruzione precedente è, com' è noto, anch' essa lineare (1).

## § 8.

*Costruzione della corrispondenza* (1, 2) *date 5 coppie di elementi corrispondenti.*

Poichè i coefficienti della forma $a^2_\xi \alpha_\eta = 0$ sono sei e si possono ridurre a cinque con la divisione di tutti per uno tra essi, la corrispondenza può dirsi determinata prendendo ad arbitrio 5 coppie di elementi corrispondenti, dove per coppia di elementi si dee intendere un punto $\eta$ ed *uno dei due punti* $\xi$, $\xi'$ per es.: possiamo indicare queste coppie con $\eta_i \xi'_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Si avranno così cinque equazioni tra' cinque coefficienti di $f$ per determinarli.

Come poi si possa primieramente completare ciascuna coppia $\xi_i$, trovare cioè l'altro punto $\xi_i''$ che insieme a $\xi_i'$ costituisca la coppia corrispondente al punto $\eta_i$, ed in secondo luogo costruire quante si vogliano terne della corrispondenza, altri ha mostrato in altre occasioni (2), senza peraltro rappresentare la corrispondenza (1, 2) sopra una conica o sopra un solo *sostegno*.

Noi qui diremo, partendo dalla relazione fondamentale 3), che la corrispondenza (1, 2) è pure determinata conoscendo i 3 punti $\alpha\beta\gamma$ uniti, il punto $\sigma$ ed un' altra

(1) Cremona, *Geometria projettiva* n. 176, problema *a*).

(2) Weyr, Beiträge pag. 54 e seg.ⁱ

coppia qualunque $\xi_0\ \eta_0$ di punti corrispondenti. Infatti si hanno prima le quattro coppie $\alpha\alpha,\ \beta\beta,\ \gamma\gamma,\ \xi_0\ \eta_0$ ed un punto $\sigma$ della quinta coppia. Ma, considerando $\sigma$ come punto $\xi$, il punto $\eta$ corrispondente in virtù della 67) è conosciuto di per sè: esso è il punto $\varkappa$ armonico di 1° ordine di $\sigma$ rispetto alla terna $\alpha\beta\gamma$ (1). Si hanno dunque cinque coppie, quante bastano.

Ma ciò che più interessa e che risponde poi meglio anche all'indole del presente scritto è il problema geometrico di dedurre dai dati ammessi le due serie di punti $\eta$ e di coppie $\xi$.

Date adunque le coppie corrispondenti

$$\alpha\alpha,\ \beta\beta,\ \gamma\gamma,\ \sigma\varkappa,\ \xi_0\ \eta_0\ ,$$

si considerino le due serie

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \sigma\ \xi_0 \ldots)\ , \qquad (\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ \eta_0 \ldots)$$

appartenenti la prima alla serie $\xi$ e la seconda alla serie $\eta$, e si proiettino da due punti $\lambda$ e $\mu$ della $\mathbf{C}_2$. I due fasci $(\lambda)$ e $(\mu)$ saranno prospettivi alle due serie e saranno perciò anch'essi in corrispondenza (1, 2), per modo che ad un raggio di $(\lambda)$ corrisponde un raggio di $(\mu)$, e ad uno di $(\mu)$ corrispondono due di $(\lambda)$.

Poniamo ora $\lambda \equiv \varkappa$, $\mu \equiv \sigma$; i due fasci saranno

$$\varkappa\,(\alpha\ \beta\ \gamma\ \sigma\ \xi_0 \ldots) \quad \text{e} \quad \sigma\,(\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa\ \eta_0 \ldots)\ .$$

Essi generano una curva razionale del 3° ordine; ma essendo il raggio $\varkappa\sigma$ comune ai due fasci, la curva suddetta si spezza nella retta $\varkappa\sigma$ e nella conica individuata da' cinque punti

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varkappa\xi_0 \,.\, \sigma\eta_0 \quad \text{e} \quad \varkappa\ (2).$$

Sia $\mathbf{H}_2$ questa conica.

Ad un raggio $\sigma\eta$ di $(\sigma)$, essendo $\eta$ un punto di $\mathbf{C}_2$, corrispondono i due raggi che proiettano da $\varkappa$ i punti $\mathbf{H}_2 \,.\, \sigma\eta$; e questi due raggi tagliano poi $\mathbf{C}_2$ in due punti $\xi'\ \xi''$ corrispondenti al punto $\eta$. Viceversa a un punto $\xi$ di $\mathbf{C}_2$ corrisponde quell'unico punto $\eta$, che il raggio che unisce $\sigma$ al punto (unico) dove $\varkappa\xi$ sega $\mathbf{H}_2$, taglia su $\mathbf{C}_2$. Perciò i punti $\xi\eta$ sono in corrispondenza (2, 1).

Il carattere involutorio delle coppie $\xi'\ \xi''$ si manifesta da ciò, che i punti $\sigma\eta.\mathbf{H}_2$ essendo sempre allineati con $\sigma$ formano un' involuzione sopra $\mathbf{H}_2$; e però sono in involuzione le coppie di raggi che proiettano da $\varkappa$ le coppie di punti $\sigma\eta \,.\, \mathbf{H}_2$; e queste coppie di raggi passanti per $\varkappa$ incidono sulla conica $\mathbf{C}_2$ appunto le coppie $\xi$, le quali pertanto sono in involuzione. Adunque le rette $\xi'\ \xi''$ passano sempre per un punto, ch' è il punto O delle nostre prime ricerche.

Inoltre essendo $\alpha\beta\gamma\varkappa$ armonici di 1° ordine rispetto alla terna $\alpha\beta\gamma$ dei punti $\alpha\beta\gamma\sigma$, sarà la serie $\alpha\beta\gamma\varkappa$ proiettiva al fascio $\mathrm{D}\,(\alpha\beta\gamma\sigma)$; e proiettando dal punto $\sigma$ di $\mathbf{C}_2$ la quaderna $\alpha\beta\gamma\varkappa$, si ha pure che

$$\sigma\,(\alpha\beta\gamma\varkappa)\ \overline{\wedge}\ \mathrm{D}\,(\alpha\beta\gamma\sigma)\ (3).$$

(1) Ricordo che le costruzioni degli armonici di 1° e 2° ordine le ammetto senz'altro.

(2) È chiaro che questa conica non può passare per $\sigma$, altrimenti avendo 5 punti comuni $\alpha\beta\gamma\sigma\varkappa$ con $\mathbf{C}_2$ coinciderebbe con questa; onde anche il punto $\varkappa\xi_0 \,.\, \sigma\eta_0$ starebbe su $\mathbf{C}_2$, e però $\xi_0 \equiv \eta_0$, contro l'ipotesi (si avrebbero 4 punti uniti e le serie non sarebbero più distinte). D'altra parte ad un raggio di $(\sigma)$ corrispondono due di $(\varkappa)$; perciò esso contiene due punti della conica diversi da $\sigma$.

(3) Il segno $\overline{\wedge}$ sta per le parole « è proiettivo », com' è d'uso.

Siccome poi il fascio di centro O che proietta i punti $\xi$ è proiettivo ai punti $\eta$, così sarà

$$O(\alpha\beta\gamma\sigma) \bar{\wedge} \sigma(\alpha\beta\gamma\varkappa).$$

Di qui paragonando le due relazioni di proiettività

$$O(\alpha\beta\gamma\sigma) \bar{\wedge} D(\alpha\beta\gamma\sigma):$$

donde si vede che il punto O giace sulla conica determinata dai 5 punti $D\alpha\beta\gamma\sigma$ (indicata da noi con $\mathbf{K}_2$ nel § 7).

Conosciuto per tale modo il punto O, tutto il resto segue come fu discusso precedentemente.

Se due punti uniti per es. $\beta$ e $\gamma$ sono immaginari coniugati situati però sopra una retta reale, la costruzione della conica $\mathbf{H}_2$ non presenta difficoltà (§ 4 in fine). Però in questo caso bisognerà conoscere il punto D in altro modo, per poter determinare il punto $\varkappa$ armonico di 1° ordine di $\sigma$ rispetto alla terna $\alpha\beta\gamma$, $\beta$ e $\gamma$ essendo immaginari coniugati.

Ma, come dissi al § 5, questo sarà esposto altra volta: per ora l' ho ammesso, e l'ammetterò conosciuto anche nella Memoria seguente: *Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza* (*1, 2*).

NOTA

Mentre a Napoli io correggeva le bozze di stampa di questa Memoria, il sig. prof. d'Ovidio mi disse che un suo discepolo, il dott. Saul Piazza, s' era occupato da qualche anno delle corrispondenze (1, 2) ed (1, 3).

La Nota del sig. Piazza si legge negli Atti della R. Accademia di Torino, anno 1881-82. Vi si trova, tra l'altro, il sistema di forme da noi indicato con 4), il punto $\sigma$ (chiamato B dall'autore) e la proprietà espressa nell' eq.e 40).

Settembre 1886.

# Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). Memoria II. (*) del dott. GIULIO PITTARELLI.

## 1.

### *Prima cubica.*

In questa Memoria, che segue l'altra: *Studio algebrico-geometrico intorno alla corrisdondenza* (*1, 2*), saranno fatte alcune applicazioni dei risultati ivi ottenuti alle cubiche con un punto doppio. Perciò seguirò ad adoperare le medesime notazioni, e nelle dimostrazioni cercherò d'essere brevissimo, compatibilmente con la chiarezza.

Data la corrispondenza (1, 2) sopra $\mathbf{C}_2$ e rappresentata analiticamente dall'equazione $a_\xi^2 \alpha_\eta = 0$, ad un punto $\zeta$ corrispondono un punto $\eta$ e due punti $\xi$ ($\xi'$ e $\xi''$), secondo che si considera $\zeta$ appartenere alla serie de'punti $\xi$ o a quella dei punti $\eta$. Così pure ad una tangente $\zeta$ corrispondono una tangente $\eta$ e due tangenti $\xi$ ($\xi'$ o $\xi''$).

Variando la tangente $\zeta$ i suoi punti $\zeta\eta$, $\zeta\xi'$, $\zeta\xi''$ descriveranno una curva $\Gamma'$.

Per determinare l'ordine di questa curva, cerchiamo il numero dei punti dov'essa è incontrata da una retta arbitraria $u$. Siano P uno di cotali punti, e $\lambda$ e $\mu$ le tangenti condotte da esso a $\mathbf{C}_2$. Se $\lambda$ si considera come una tangente $\zeta$, allora $\mu$ sarà o una tangente $\eta$ o una delle tangenti $\xi$; ossia la coppia $\lambda\mu$ apparterrà alla corrispondenza (1, 2). Ma essa appartiene pure all'involuzione determinata dalla retta $u$ su $\mathbf{C}_2$. Dunque vi saranno tanti punti P, quante saranno le coppie [1] comuni alla corrispondenza (1, 2) ed all'involuzione: *questo numero è dunque 3* (Memoria I § 2) [2]. Le equazioni che dànno tali coppie sono

$$a_\lambda^2 \alpha_\mu = 0 . \qquad u_\mu u_\lambda = 0 :$$

di qui eliminando $\mu$

$$(\alpha u)\, a_\lambda^2 u_\lambda = 0 , \tag{1}$$

le cui radici si possono ottenere con una conica facile a costruire (M. I, § 2).

Se $\zeta$ coincide con una delle tangenti $\theta'\,\theta''$, con $\theta'$ per es., ad essa, considerata come tangente $\eta$, corrisponderanno le due tangenti $\omega'$ coincidenti, e considerata come tangente $\xi$, le corrisponderà una tangente $\eta'$. Onde il punto $\theta'\,\omega'$ è punto di contatto di $\Gamma'$ con la $\theta'$, ed il punto $\theta'\,\eta'$ n'è il punto tangenziale.

Se $\zeta$ coincide con un punto unito $\alpha$, alla tangente in $\alpha$ corrisponderà due volte la stessa $\alpha$ ed una volta la tangente $\alpha'$. Perciò $\Gamma'$ tocca $\mathbf{C}_2$ nei punti $\alpha\beta\gamma$, ed i

(*) La Relazione della Commissione esaminatrice trovasi nei Rendiconti, Vol. II (1° semestre) pag. 384.

(1) Weyr, opuscolo citato pag. 6.

(2) Scriverò sempre: M. I § etc.

punti tangenziali di $\alpha\beta\gamma$ sono rispettivamente i punti comuni alle tangenti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Ma questi punti sono sulla retta $o$ polare di O col quale sono allineate le coppie di punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; si ottiene in tal modo immediatamente il teorema noto: I punti tangenziali dei punti di contatto di una curva del 3° ordine con una conica sono per diritto (1).

Per trovare il punto doppio (isolato) dobbiamo risolvere prima la quistione: Nelle serie di punti $\xi$ ed $\eta$ della corrispondenza (1, 2) ci saranno coppie di punti involutorie (2), cioè coppie tali che ad un punto di essa corrisponde sempre l'altro, sia considerato come punto $\xi$ sia considerato come punto $\eta$?

Detta $\lambda\mu$ una di queste coppie, per essa devono valere le equazioni

$$a_\mu{}^2\, \alpha_\lambda = 0\,, \qquad b_\lambda{}^2\, \beta_\mu \equiv c_\lambda{}^2\, \gamma_\mu = 0\,.$$

Eliminando $\mu$ si ha la seguente equazione di 5° grado in $\lambda$:

$$\psi'\,\lambda^5 = (a\beta)\,(a\gamma)\,\alpha_\lambda\, b_\lambda{}^2\, c_\lambda{}^2 = 0\,,$$

che si trasforma facilmente come segue.

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda{}^5 &= (a\gamma)\,\alpha_\lambda\, b_\lambda\, c_\lambda{}^2 \,\{\, (ab)\,\beta_\lambda + (b\beta)\,a_\lambda \,\{ \\
&= (ab)\,(a\gamma)\,\alpha_\lambda\,\beta_\lambda\, b_\lambda\, c_\lambda{}^2 + (a\gamma)\,a_\lambda\,\alpha_\lambda\, c_\lambda{}^2\,\sigma_\lambda \quad (\text{perchè } (b\beta)\,b_\lambda = \sigma_\lambda) \\
&= \tfrac{1}{2}\,(ab)\,\alpha_\lambda\,\beta_\lambda\, c_\lambda{}^2 \,\{\, (a\gamma)\, b_\lambda - (b\gamma)\, a_\lambda \,\{ + a_\lambda\, c_\lambda{}^2\,\sigma_\lambda \,\}\, (a\alpha)\,\gamma_\lambda + (\alpha\gamma)\,a_\lambda \,\{ \\
&= \tfrac{1}{2}\,\Theta_\lambda{}^2 \,.\, c_\lambda{}^2\,\gamma_\lambda + \sigma_\lambda{}^2 \,.\, c_\lambda{}^2\,\gamma_\lambda \quad (\text{perchè } (a\gamma)\,a_\lambda{}^2\, c_\lambda{}^2 \equiv 0)\,.
\end{aligned}$$

La $\psi_\lambda{}^5$ dunque si scompone nel prodotto della forma cubica $\varphi_\lambda{}^3 = a_\lambda{}^2\,\alpha_\lambda$ la cui presenza è giustificata dal significato de'punti $\alpha\beta\gamma$ ma che non fa al nostro caso, e della forma quadratica, che rappresenta la coppia involutoria richiesta,

$$2) \qquad \Pi_\lambda{}^2 = \Theta_\lambda{}^2 + 2\sigma_\lambda{}^2 = 0\,.$$

Chiamerò $\pi'\,\pi''$ i punti forniti dalla 2), P il polo della loro congiungente $p \equiv \pi'\,\pi''$.

Intanto l' equazione 2) dice che la coppia $\pi'\,\pi''$ appartiene all' involuzione individuata dalle coppie $\Theta_\lambda{}^2 = 0$ e $\sigma_\lambda{}^2 = 0$, il cui centro è per conseguenza l'intersezione della retta $t \equiv \theta'\,\theta''$ e della tangente in $\sigma$ alla $C_2$: ($\sigma_\lambda{}^2$ è il quadrato della forma lineare $\sigma$, e $\sigma$ è un punto doppio dell'involuzione).

Un'altra trasformazione della forma $\psi_\lambda{}^5$, che si ottiene sostituendovi per $(a\beta)\,\alpha_\lambda$ il valore $(a\alpha)\,\beta_\lambda + (\alpha\beta)\,a_\lambda$ porge un'altra forma di $\Pi_\lambda{}^2$. Ma a questa novella forma si può giungere adoperando le relazioni (M. I eq.e 11 ed eq.e 33 in nota)

$$(\alpha\sigma)\,a_\lambda{}^2 = q_\lambda{}^2 - \tfrac{2}{3}\,\sigma_\lambda{}^2\,, \qquad \Omega_\lambda{}^2 - \Theta_\lambda{}^2 = 2q_\lambda{}^2 + \tfrac{2}{3}\,\sigma_\lambda{}^2.$$

Di qui eliminando la forma $q$,

$$\Theta_\lambda{}^2 = \Omega_\lambda{}^2 - 2\,(\alpha\sigma)\,a_\lambda{}^2 - 2\sigma_\lambda{}^2\,.$$

Cosicchè la 2) diviene

$$\Pi_\lambda{}^2 = \Omega_\lambda{}^2 - 2\,(\alpha\sigma)\,a_\lambda{}^2\,.$$

La quale dice che la coppia $\pi'\,\pi''$ appartiene pure all' involuzione individuata dalla coppia $\omega'\,\omega''$ e dalla coppia $(\alpha\sigma)\,a_\lambda{}^2 = 0$ che si ottiene cercando nella serie $\xi$ i punti corrispondenti al punto $\sigma_\eta = 0$ considerato nella serie $\eta$.

(1) Il teorema è vero per una cubica qualunque, anche senza punto doppio.

(2) Weyr, loco citato pag. 6.

Perciò la coppia $\pi' \pi''$ si ottiene come coppia comune alle due involuzioni sopra citate. Naturalmente la coppia $\pi' \pi''$ può essere reale o immaginaria, ma la retta $p$ ed il suo polo P sono sempre costruibili, come s' è visto.

Poniamo ora la tangente $\zeta$, mobile intorno a $C_2$, sulla tangente $\pi'$. Se questa tangente si riguarda come tangente $\eta$, una delle tangenti corrispondenti $\xi$ sarà la $\pi''$: se invece si riguarda come tangente $\xi$, la stessa $\pi''$ sarà la tangente $\eta$. Onde il punto P, comune alle due tangenti $\pi' \pi''$ appartiene a $\Gamma'$. Facendo coincidere $\zeta$ con $\pi''$ il precedente discorso resta tal quale, salvo a mutare tra loro $\pi'$ e $\pi''$; e se ne conclude che la curva passa due volte per P, che perciò è il punto doppio.

Del rimanente possiamo condurre per P una retta qualunque $m$ e cercare le sue intersezioni con la curva, cioè cercare le coppie comuni all'involuzione quadratica, determinata da $m$, ed alla corrispondenza (1, 2). Ora per le cose dette dinanzi $\pi' \pi''$ è una di cotali coppie, anzi poichè si ha in pari tempo

$$a^2_{\pi'} \alpha_{\pi''} = a^2_{\pi''} \alpha_{\pi'} = 0 ,$$

tal coppia conta per due nel numero totale. Resta dunque una sola coppia, il cui polo è l'intersezione di $m$ con $\Gamma'$. Adunque ogni retta per P incontra $\Gamma'$ in un sol punto, oltre che in P: carattere speciale del punto doppio (1).

Possiamo trovare subito le equazioni dei punti $\zeta\eta$, $\zeta\xi'$, $\zeta\xi''$. Esse sono $u_\zeta u_\eta = 0$, $u_\zeta u_{\xi'} = 0$, $u_\zeta u_{\xi''} = 0$ (M. I, § 6) con le condizioni $a_\zeta^2 \alpha_\eta = 0$, $a^2_{\xi'} \alpha_\zeta = a^2_{\xi''} \alpha_\zeta = 0$. Eliminando $\eta$ tra le due $u_\zeta u_\eta = 0$ $a_\zeta^2 \alpha_\eta = 0$, e $\zeta$ tra le coppie analoghe delle altre equazioni, e ponendo $\lambda$ in luogo di $\zeta$, di $\xi'$ o di $\xi''$, si ha per l'equazione di un punto della curva $\Gamma'$ (punto $\lambda$)

$$(\alpha u)\, a_\lambda^2\, u_\lambda = 0 ,$$

identica alla 1), come doveva appunto essere.

Nella teoria della cubica ha capitale importanza la ricerca dei tre flessi, ovvero della retta sulla quale essi giacciono.

L'equazione di questa retta, che chiamerò $i$, si ottiene subito formando l'invariante simultaneo delle due forme cubiche

3) $$A_\lambda^3 = (\alpha u)\, a_\lambda^2\, u_\lambda , \qquad B_\lambda^3 = (\beta v)\, b_\lambda^2\, v_\lambda \ (2).$$

Si ha dunque, applicando ripetutamente il processo polare, e chiamando con $x$ il punto $u.v$,

$$(ix)^2 = (AB)^3 = (\alpha u)(aB)^2 (uB) = \tfrac{1}{3}(ab)^2 (uv)(\alpha u)(\beta v) - \tfrac{2}{3}(ab)(av)(bu)(\alpha u)(\beta v)$$
$$= \tfrac{1}{3} M - \tfrac{2}{3} N .$$

L'invariante M per la equazione 15) della prima Memoria si trova eguale ad

$$(uv)(\Theta u)(\Theta v) .$$

(1) L'equazione analoga alla 1) per la retta $m$ condotta per P è, come facilmente si trova,

$$0 = 2(\alpha m)\, a_\lambda^2\, m_\lambda = \left(\varphi_\mu^2\, \varphi_\lambda + \tfrac{4}{3}(\lambda\mu)\, \sigma_\mu\right) \Pi_\lambda^2 .$$

Perciò si ha, come altra prova, la coppia fissa $\Pi_\lambda^2 = 0$ ed il punto $\lambda$ variabile con $\mu$: $\varphi_\mu^2 \varphi_\lambda + \frac{4}{3}(\lambda\mu)\sigma_\mu = 0$, dove $\mu$ è uno dei punti d'intersezione di $m$ con $C_2$: e se l'altro è $\mu'$ si ha la relazione $\Pi_\mu \Pi_{\mu'} = 0$, la quale dice appunto che $m$ passa pel polo P.

(2) Vedi Franz Meyer, *Apolarität*, § 7, n. 17; ed anche una mia Nota inviata all'Accademia di Napoli, ma fino a questo momento non pubblicata. (Fu poi pubblicata nel Rendiconto del maggio 1885, col titolo: *Sulle curve del 3° ordine con un punto doppio*).

Ma essendo $x$ il punto $u.v$ dovremo porre (M. I eq.$^{i}$ 59 e 59′)

4) $$x_\lambda^2 = (uv)\, u_\lambda\, v_\lambda\,;$$

per cui

$$M = (\Theta x)^2\,.$$

Quanto all'invariante N, siccome

$$(bu)\,(\beta v) = (b\beta)\,(uv) + (bv)\,(\beta u)\,,$$

esso diviene

$$\begin{aligned} N &= (ab)\,(av)\,(\alpha u)\,(b\beta)\,(uv) + (ab)\,(av)\,(\alpha u)\,(bv)\,(\beta u) \\ &= (ab)\,(av)\,(\alpha u)\,(b\beta)\,(uv)\,, \end{aligned}$$

poichè l'ultima parte, mutando di segno con la permutazione dei simboli, è identicamente nulla. Ed essendo $(b\beta)\, b_\lambda = \sigma_\lambda$, verrà

$$N = (a\sigma)\,(av)\,(\alpha u)\,(uv)\,.$$

Dall'equazione polare (M. I. pag. 378)

$$a_\xi\, a_\zeta\, \alpha_\eta = \varphi_\xi\, \varphi_\zeta\, \varphi_\eta + \tfrac{1}{3}\,(\xi\eta)\,\sigma_\zeta + \tfrac{1}{3}\,(\zeta\eta)\,\sigma_\xi\,,$$

ponendovi $\sigma_\xi = 0$, $v_\zeta = 0$ $u_\eta = 0$ si deduce moltiplicando poi per $(uv)$,

$$N = (uv)\,(\varphi\sigma)\,(\varphi u)\,(\varphi v) + \tfrac{1}{3}\,(uv)\,(\sigma u)\,(\sigma v)\,;$$

e per la 4)

$$N = (\varphi\sigma)\,(\varphi x)^2 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma x)^2 = (qx)^2 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma x)^2 \qquad \text{(M. I eq.}^{i}\text{ 4).}$$

Così con questi valori di M ed N, viene una prima espressione di $(ix)^2$

5) $$(ix)^2 = \tfrac{1}{3}\,(\Theta x)^2 - \tfrac{2}{3}\,(qx)^2 - \tfrac{2}{9}\,(\sigma x)^2\,.$$

Altre forme della $(ix)^2$ si ottengono partendo dalle relazioni (M. I eq.$^{i}$ 12 e 13)

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda^2 &= \Delta_\lambda^2 - \tfrac{4}{3}\, q_\lambda^2 - \tfrac{2}{9}\, \sigma_\lambda^2 \\ \Omega_\lambda^2 &= \Delta_\lambda^2 + \tfrac{2}{3}\, q_\lambda^2 + \tfrac{4}{9}\, \sigma_\lambda^2\,, \end{aligned}$$

e ponendovi $x_\lambda = 0$.

Si hanno così le:

5′) $$(ix)^2 = \tfrac{1}{3}\,(\Delta x)^2 - \tfrac{10}{9}\,(qx)^2 - \tfrac{8}{27}\,(\sigma x)^2$$

5″) $$(ix)^2 = \tfrac{1}{3}\,(\Omega x)^2 - \tfrac{4}{3}\,(qx)^2 - \tfrac{4}{9}\,(\sigma x)^2\,.$$

Un'altro forma osservabilissima della $(ix)^2$ e che conduce immediatamente alla costruzione della retta, si ha moltiplicando la 5) per 2 e sottraendone la 5″). Così:

5‴) $$(ix)^2 = \tfrac{2}{3}\,(\Theta x)^2 - \tfrac{1}{3}\,(\Omega x)^2\,.$$

Di quì si vede che la $i$ passa pel punto comune alle rette $t \equiv (\Theta x)^2 = 0$ ed $o \equiv (\Omega x)^2 = 0$.

Il rapporto anarmonico del fascio

$$o \equiv (\Omega x)^2 = 0,\ t \equiv (\Theta x)^2 = 0,\ i \equiv 2(\Theta x)^2 - (\Omega x)^2 = 2t - o = 0,\ k = (\Theta x)^2 - (\Omega x)^2 = t - o = 0\,,$$

è (in quest'ordine)

$$(ot\,,\, ik) = 2\,,$$

dunque, com'è noto, le rette $o, i$ sono coniugate armoniche rispetto alle rette $t, k$ [1]. Essendo conosciute le rette $o, t$ e $k$ che passa pel punto S e pel punto $o, t$ (M. I eq.$^{e}$ 41), la precedente relazione armonica permette di costruire linearmente la retta $i$.

[1] Si ricordi che se $(AB.\ CD) = -1$, si ha $(AC,\ BD) = 2$, $(AC,\ DB) = \tfrac{1}{2}$.

Ponendo nella 1) $u = i$, si ha immediatamente l'equazione che dà i parametri dei flessi nella forma:

6) $$I_\lambda^3 = I'_\lambda{}^3 = (\alpha i)\, a_\lambda^2\, i_\lambda = 0\,.$$

E di qui seguono le relazioni:

7) $I_\lambda I_\mu I_\nu = 0$ per tre punti in linea retta,

8) $I_\lambda^2 I_\mu = 0$ per un punto $\lambda$ ed il suo punto tangenziale $\mu$,

9) $(\Pi')^2 I_\lambda I'_\lambda = 0$ per i parametri del punto doppio

etc. etc.

Essendo per la 5''')

$$i_\lambda^2 = \tfrac{2}{3}\,\Theta_\lambda^2 - \tfrac{1}{3}\,\Omega_\lambda^2\,,$$

la 6) diviene

$$I_\lambda^3 = \tfrac{2}{3}\,(\alpha\Theta)\,\Theta_\lambda\, a_\lambda^2 - \tfrac{1}{3}\,(\alpha\Omega)\,\Omega_\lambda\, a_\lambda^2\,;$$

e, poichè, come fu trovato (M. I eq.$^{e}$ 24), $(\alpha\Theta)\, a_\lambda\, \Theta_\lambda = (a\Omega)\, a_\lambda\, \Omega_\lambda\, \alpha_\lambda$,

$$I_\lambda^3 = \tfrac{2}{3}\,(a\Omega)\, a_\lambda\, \Omega_\lambda\, \alpha_\lambda - \tfrac{1}{3}\,(\alpha\Omega)\,\Omega_\lambda\, a_\lambda^2\,.$$

Siccome poi

$$a_\lambda^2\, \alpha_\mu = \varphi_\lambda^2\, \varphi_\mu + \tfrac{2}{3}\,(\lambda\mu)\,\sigma_\lambda$$

10)

$$a_\mu\, a_\lambda\, \alpha_\lambda = \varphi_\lambda^2\, \varphi_\mu + \tfrac{1}{3}\,(\mu\lambda)\,\sigma_\lambda\,,$$

ponendovi $\Omega_\mu = 0$, si trova per $I_\lambda^3$ l'espressione

6') $$I_\lambda^3 = \tfrac{1}{3}\,(\varphi\Omega)\,\varphi_\lambda^2\,\Omega_\lambda + \tfrac{4}{9}\,\sigma_\lambda\,\Omega_\lambda^2\,,$$

che si può ridurre a contenere forme del sistema $\varphi$, $\sigma$.

## § 2.

### *Seconda cubica.*

L'equazione della retta del fascio O corrispondente al punto $\eta$ di $\mathbf{C}_2$, ossia al raggio $\varepsilon\eta$ del fascio $\varepsilon$, è

11) $$p_\eta = (ax)^2\, \alpha_\eta = 0\,.$$

Se $x$ è dato, questa equazione rappresenta la condizione che siano armoniche tra loro le due coppie di punti

$$\alpha_\eta\, a_\xi^2 = 0\,, \qquad x_\lambda^2 = 0\,,$$

cioè la coppia $\xi$ corrispondente al punto $\eta$ nella corrispondenza (1, 2), e la coppia $\lambda$ de' punti di contatto con $\mathbf{C}_2$ delle tangenti uscenti da $x$.

Cosicchè il punto $p_\eta = 0$ fornito dalla 1) per $x$ dato, si costruisce cercando il raggio del fascio $(\varepsilon)$ corrispondente al raggio $Ox$, nel modo, cioè, solito.

L' invariante

12) $$(px)^2 = 0$$

esprime la condizione che il punto $p_\eta = 0$ coincida con uno dei punti $x_\lambda^2 = 0$: ed allora il punto $x$ descrive una curva $\boldsymbol{\Gamma}''$ del 3° ordine, la cui equazione è 12). ovvero sviluppandola di più:

12') $$(px)^2 = (ax')^2\,(bx'')^2\,(\alpha x)\,(\beta x) = 0 \quad \text{(dove } x_\lambda^2 = x'_\lambda{}^2 = x''_\lambda{}^2 \ldots\text{)}.$$

Il punto $x$ appartenente a $\boldsymbol{\Gamma}''$ si costruisce, per le ipotesi fatti, in uno dei modi seguenti:

Dato $\eta$ su $C_2$, si trovi nel fascio O la retta $O\xi$ corrispondente ad $\varepsilon\eta$. La tangente in $\eta$ a $C_2$ incontra $O\xi$ nel richiesto punto $x$.

Dato invece $O\xi$, si trovi $\eta$. La tangente in $\eta$ a $C_2$ incontra $O\xi$, come sopra, nel punto $x$.

In altri termini il fascio (di prim'ordine) O essendo proiettivo al fascio $\varepsilon$, sarà pure proiettivo, oltre che alla serie dei punti $\eta$, anche alla serie delle tangenti $\eta$ a $C_2$, che forma un fascio di second' ordine. Perciò, com' è noto [1], i punti comuni ai raggi del fascio di prim' ordine ed a quelli del fascio di second' ordine generano una curva $\Gamma''$ del terz'ordine.

La forma dell'equazione 12)

$$I2'') \qquad (px)^2 = x_1 p_2^2 - 2x_2 p_1 p_2 + x_3 p_1^2$$

dove le $p_1 p_2$ definite dalla 11) sono lineari nelle $x_i$, mostra che il punto O comune alle due rette $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ è il punto doppio di $\Gamma''$: ciò che del resto anche la costruzione precedente dei punti di $\Gamma''$ mostra. Ma le tangenti alla conica in $\omega' \omega''$ non sono tangenti alla curva. Infatti $\omega'$ corrisponde al punto $\theta'$ considerato come punto $\eta$: perciò la tangente $\theta'$ a $C_2$ è incontrata dalla retta corrispondente $O\omega'$ del fascio O in un punto di $\Gamma''$; perciò $O\omega'$ è secante e non tangente in O alla $\Gamma''$.

Invece si consideri $\omega'$ come punto $\eta$, e si trovi nel fascio O la retta corrispondente ad $\omega'$. Questa retta incontra la tangente $\omega'$ a $C_2$ in un punto di $\Gamma''$; ma la retta e la tangente s' incontrano in O, dunque in O, sulla retta trovata, si trovano riuniti due punti della curva; e però quella retta è tangente in esso.

Infine la $\Gamma''$ tocca $C_2$ nei punti $\alpha\beta\gamma$, i cui punti tangenziali sono i punti $\alpha'\beta'\gamma'$; precisamente come per la curva $\Gamma'$.

L'equazione del punto doppio è intanto

$$(\Omega u)^2 = 0 ,$$

e le sue coordinate sono $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$: l'equazione complessiva delle tangenti nel punto doppio è poi

$$\Omega_1 p_2^2 - 2\Omega_2 p_1 p_2 + \Omega_2 p_1^2 \equiv (\Omega p)^2 \equiv (\Omega\alpha)(\Omega\beta)(ax)^2 (bx')^2 = 0 .$$

È facile trovare l'equazione di un punto della curva. Esso è il punto comune alle due rette $(ax)^2 \alpha_\lambda = 0$, $x_\lambda^2$; e la sua equazione è della forma $(xu)^2 = 0$. Onde, pel noto principio, l' equazione stessa si ottiene eguagliando a zero l'invariante simultaneo delle 3 forme quadratiche in $\xi$: $a_\xi^2 \alpha_\lambda = 0$, $(\xi\lambda)^2 = 0$, $u_\xi^2 = 0$. Onde si ha subito

$$13) \qquad (au)\, u_\lambda a_\lambda \alpha_\lambda = 0 ,$$

forma diversa, come si vede, dalla 1).

Troviama anche qui l' equazione della retta su cui giacciono i tre flessi, che chiamerò retta $j$.

Ponendo, come per la prima curva,

$$A_\lambda'^3 = (au)\, u_\lambda a_\lambda \alpha_\lambda , \qquad A_\lambda'^3 = (bv)\, v_\lambda b_\lambda \beta_\lambda ,$$

si ha da principio

$$(jx)^2 = (A' B')^3 .$$

[1] Reye, *Geom. der Lage*, Eilfter Vortrag.

Per calcolare con facilità l'invariante $(A'B')^3$, trasformo prima l'espressione di A' con l'aiuto della relazione

$$(au)\,\alpha_\lambda = (a\alpha)\,u_\lambda + (\alpha u)\,a_\lambda\,;$$

così viene

$$\begin{aligned} A_\lambda'^3 &= (a\alpha)\,a_\lambda\,u_\lambda^2 + (\alpha u)\,a_\lambda^2\,u_\lambda\,, \\ &= \sigma_\lambda\,u_\lambda^2 + A_\lambda^3\,. \qquad \text{(eq.}^{\text{i}}\text{ 3 del § 1).} \end{aligned}$$

Si hanno così le

$$A_\lambda'^3 = \sigma_\lambda\,u_\lambda^2 + A_\lambda^3\,, \qquad B_\lambda'^3 = \sigma_\lambda\,v_\lambda^2 + B_\lambda^3\,;$$

da cui con successive polari

$$\begin{aligned} (jx)^2 &= (\sigma B')\,(uB')^2 + (AB')^3 \\ &= -\tfrac{2}{3}\,(uv)\,(\sigma u)\,(\sigma v) + (Av)^2\,(A\sigma) - (Bu)^2\,(B\sigma) + (AB)^3\,. \end{aligned}$$

La prima e l'ultima parte (ved. eq.$^{\text{e}}$ 4) sono sispettivamente eguali a

$$-\tfrac{2}{3}\,(\sigma x)^2 \qquad \text{ed} \qquad (ix)^2\,.$$

La seconda e terza si ricavano dalle prime polari di $A_\lambda^3$ e $B_\lambda^3$, e si ha

$$\left.\begin{aligned} (Av)^2\,(A\sigma) - (Bu)^2\,(B\sigma) = &-\tfrac{1}{3}\,(av)^2\,(\sigma u)\,(\alpha u) + \tfrac{2}{3}\,(uv)\,(av)\,(\alpha u)\,(\alpha\tau) \\ &+ \tfrac{1}{3}\,(au)^2\,(\sigma v)\,(\alpha v) + \tfrac{2}{3}\,(uv)\,(au)\,(\alpha v)\,(\alpha\sigma). \end{aligned}\right\} = \tfrac{1}{3}\,L + \tfrac{2}{3}\,M$$

Dalla 4) si ricava

$$2x_\lambda\,x_\mu = (uv)\,u_\lambda\,v_\mu + (uv)\,u_\mu\,v_\lambda\,,$$

da cui

$$M = 2\,(ax)\,(\alpha x)\,(a\sigma)\,.$$

Poi si ha, dalla relazione

$$a_\xi^2\,\alpha_\eta = \varphi_\xi^2\,\varphi_\eta + \tfrac{2}{3}\,(\xi\eta)\,\sigma_\xi\,,$$

$$\begin{aligned} L &= (\sigma v)\,(\varphi u)^2\,(\varphi v) + \tfrac{2}{3}\,(uv)\,(\sigma u)\,(\sigma v) - (\sigma u)\,(\varphi v)^2\,(\varphi u) + \tfrac{2}{3}\,(uv)\,(\sigma u)\,(\sigma v) \\ &= (\varphi u)\,(\varphi v)\,\{\,(\varphi u)\,(\sigma v) - (\varphi v)\,(\sigma u)\,\} + \tfrac{4}{3}\,(\sigma x)^2 \\ &= (uv)\,(\varphi u)\,(\varphi v)\,(\varphi\sigma) + \tfrac{4}{3}\,(\sigma x)^2 = (\varphi x)^2\,(\varphi\sigma) + \tfrac{4}{3}\,(\sigma x)^2 = (qx)^2 + \tfrac{4}{3}\,(\sigma x)^2. \end{aligned}$$

Con questi valori di L e di M si ricava subito

$$(jx)^2 = -\tfrac{2}{9}\,(\sigma x)^2 + \tfrac{1}{3}\,(qx)^2 + \tfrac{4}{3}\,(ax)\,(\alpha x)\,(a\tau).$$

Ma

$$(ax)\,(a\tau)\,(\alpha x) = (\varphi x)^2\,(\varphi\tau) + \tfrac{1}{3}\,(\sigma x)^2 = (qx)^2 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma x)^2,$$

dunque si ottiene una prima espressione di $(jx)^2$:

14) $$(jx)^2 = \tfrac{2}{9}\,(\sigma x)^2 + \tfrac{5}{3}\,(qx)^2 + (ix)^2\,.$$

Se in questa espressione sostituiamo ad $(ix)^2$ il valore 5) dove figura la $(\Theta x)^2$, si ha immediatamente

15) $$(jx)^2 \equiv \tfrac{1}{3}\,(\Theta x)^2 + (qx)^2 = 0\,.$$

Questa equazione dice che la retta $j$ passa pel punto comune alle due rette $i \equiv (\Theta x)^2 = 0$, e $(qx)^2 \equiv (\varphi x)^2\,(\varphi\tau) = 0$, delle quali la prima è nota, e l'altra pure perchè essa è quella che congiunge gli armonici di 2° ordine di $\sigma$ rispetto alla terna $\alpha\beta\gamma$.

Per trovare un altro punto della retta $j$, introduciamo la forma 2)

$$\Pi_\lambda^2 = \Theta_\lambda + 2\sigma_\lambda^2\,,$$

i cui punti-radice $\pi'\,\pi''$ furono precedentemente costruiti, o, per meglio dire, fu costruita la retta reale $p$ che li contiene.

Siffatta retta $p$ ha per equazione

$$(\Pi x)^2 \equiv (\Theta x)^2 + 2\,(\sigma x)^2 = 0\,.$$

Eliminando $\Theta$ tra questa equazione e la 15) si ha

$$(jx)^2 = \tfrac{1}{3}\,(\Pi x)^2 - \tfrac{2}{3}\,(\sigma x)^2 + (qx)^2\,.$$

Ma è pure (M. I eq.$^{e}$ 11)

$$q_\lambda{}^2 - \tfrac{2}{3}\,\sigma_\lambda{}^2 = (\alpha\sigma)\,a_\lambda{}^2\,,$$

dunque

$$(jx)^2 \equiv \tfrac{1}{3}\,(\Pi x)^2 + (\alpha\sigma)\,(ax)^2 = 0\,.$$

Questa equazione dice che la retta $j$ passa pel punto comune alla retta $p$ ed a quella che unisce i punti $\xi$ corrispondenti al punto $\sigma$ nella corrispondenza $(1,2)$ $a_\xi{}^2\alpha_\eta = 0$.

Costruita in tal guisa la retta $j$, si trovano i flessi cercando, come per qualunque altra retta del piano, i punti comuni ad $j$ ed a $\Gamma''$, con l'aiuto di una conica [1].

Per formare l'equazione cubica che porge i parametri dei flessi, si hanno le due forme quadratiche in $\xi$

$$j_\xi{}^2 = \tfrac{1}{3}\,\Theta_\xi{}^2 + q_\xi{}^2 = 0$$
$$l_\xi{}^2 \equiv (\xi\lambda)\,a_\xi\,a_\lambda\,\alpha_\lambda = 0\,,$$

delle quali la prima rappresenta i punti dove $j$ taglia $C_2$, la seconda rappresenta i punti di contatto delle tangenti alla stessa $C_2$ uscenti dal punto $\lambda$ della curva $\Gamma''$. Perciò se il punto $\lambda$ giace sulla retta $j$ (M. I § 6), sarà nullo l'invariante $(lj)^2$. Ora

$$(jl)^2 = \tfrac{1}{3}\,(\Theta l)^2 + (ql)^2 = \tfrac{1}{3}\,(a\Theta)\,\Theta_\lambda\,a_\lambda\,\alpha_\lambda + (aq)\,q_\lambda\,a_\lambda\,\alpha_\lambda = \mathrm{J}_\lambda{}^3.$$

Trasformiamo ciascuna di queste espressioni.

Abbiamo successivamente:

$$(a\Theta)\,\Theta_\lambda\,a_\lambda\,\alpha_\lambda = \Theta_\lambda\,a_\lambda\,\{(a\alpha)\,\Theta_\lambda + (\alpha\Theta)\,a_\lambda\} = (\alpha\Theta)\,\Theta_\lambda\,a_\lambda{}^2 + \sigma_\lambda\,\Theta_\lambda{}^2$$
$$= (a\Omega)\,a_\lambda\,\Omega_\lambda\,\alpha_\lambda + \sigma_\lambda\,\Theta_\lambda{}^2\,,$$

perchè (M. I § 3)

$$(\alpha\Theta)\,\Theta_\lambda\,a_\lambda{}^2 = (a\Omega)\,a_\lambda\,\Omega_\lambda\,\alpha_\lambda\,.$$

Tenendo conto della relazione polare 10) si trova

$$(a\Omega)\,a_\lambda\,\Omega_\lambda\,\alpha_\lambda = (\varphi\Omega)\Omega_\lambda\varphi_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,\sigma_\lambda\,\Omega_\lambda{}^2\,,$$

e così pure

$$(aq)\,a_\lambda\,q_\lambda\,\alpha_\lambda = (\varphi q)\,q_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,\sigma_\lambda\,q_\lambda{}^2\,.$$

Facendo le sostituzioni opportune si trova

$$\mathrm{J}_\lambda{}^3 = \tfrac{1}{3}\,(\varphi\Omega)\,\Omega_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,\sigma_\lambda\,\Theta_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{9}\,\sigma_\lambda\,\Omega_\lambda{}^2 + (\varphi q)\,q_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,\sigma_\lambda\,q_\lambda{}^2.$$

Ora

$$(\varphi q)\,q_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 = (\varphi\varphi')\,(\varphi'\sigma)\,\varphi'_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 = \tfrac{1}{2}\,(\varphi\varphi')\,\varphi_\lambda\varphi'_\lambda\,\{(\varphi'\sigma)\,\varphi_\lambda - (\varphi\sigma)\,\varphi'\} = -\tfrac{1}{2}\,(\varphi\varphi')^2\varphi_\lambda\varphi'_\lambda.\sigma_\lambda$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\Delta_\lambda{}^2\,\sigma_\lambda\,:$$

così

$$\mathrm{J}_\lambda{}^3 = \tfrac{1}{3}\,(\varphi\Omega)\,\Omega_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,(\Theta_\lambda{}^2 + \tfrac{1}{3}\,\Omega_\lambda{}^2 - \tfrac{3}{2}\,\Delta_\lambda{}^2 + q_\lambda{}^2)\,\sigma_\lambda\,.$$

Ma da' valori di $\Theta$ e di $\Omega$, eliminandone $\sigma_\lambda{}^2$ si deduce

$$2\Theta_\lambda{}^2 + \Omega_\lambda{}^2 = 3\Delta_\lambda{}^2 - 2q_\lambda{}^2\,;$$

dunque, sostituendo il valore di $\Theta$ dedotto da questa espressione,

16) $$\mathrm{J}_\lambda{}^3 = \tfrac{1}{3}\,(\varphi\Omega)\,\Omega_\lambda\,\varphi_\lambda{}^2 - \tfrac{1}{18}\,\sigma_\lambda\,\Omega_\lambda{}^2 = 0\,,$$

in funzione delle stesse forme $\varphi$, $\Omega$ e $\sigma$ che figurano nella forma $\mathrm{I}_\lambda{}^3$, eq.$^{e}$ 6′).

[1] Reye, loco citato.

## § 3.

*Le cubiche precedenti nel caso:* $\sigma \equiv 0$ .

Ponendo nelle formole precedenti $\sigma \equiv 0$, le curve $\Gamma'$ e $\Gamma''$ coincidono in una sola curva $\Gamma^0$, reciproca della curva di 3ª classe e 4° ordine studiata dal prof. Battaglini (1).

Adunque per questa curva:

$(\varphi u)\,\varphi_\lambda{}^2\, u_\lambda \equiv$ è l'equazione di un punto $\lambda$ della curva, ovvero se $u$ è fissa fornisce i parametri dei punti comuni a $\Gamma$ e ad $u$;

$(\varphi \Delta)\,\varphi_\lambda{}^2 \equiv Q_\lambda{}^3 = 0$ fornisce i parametri dei flessi;

$(\Delta x)^2 = 0$ è la retta che unisce i flessi;

$(\Delta u)^2 = 0$ è l'equazione del punto doppio;

$(QQ')^2\, Q_\lambda\, Q'_\lambda \equiv \frac{R}{2}\, \Delta_\lambda{}^2 = 0$ porge i parametri del punto doppio;

$(\Delta p)^2 = 0$ è l'equazione complessiva delle tangenti nel punto doppio, essendo sempre $p_\lambda = \varphi_\lambda\,(\varphi x)^2$;

$(px)^2 = 0$ è l'equazione della curva;

$Q_\lambda\, Q_\mu\, Q_\nu = 0$ è la condizione che i tre punti $\lambda\,\mu\,\nu$ siano per diritto;

$Q_\lambda{}^2\, Q_\mu = 0$ è la relazione tra il punto $\lambda$ ed il suo tangenziale $\mu$.

È noto che una curva di 3° ordine $\Gamma^0$ con un punto doppio si può riguardare come hessiana di un'altra (e di questa sola) curva del 3° ordine; e perciò i suoi punti si possono in un sol modo distribuire in coppie di *poli coniugati*. Le congiungenti poi questi coppie di poli inviluppano la cayleyana $\Sigma$ di quella curva della quale $\Gamma^0$ è l'hessiana. Siffatta cayleyana ch' è una curva in generale di 3ª classe, qui si spezza nel punto doppio ed in una conica.

« Questa conica è precisamente la conica fondamentale $C_2$ ». Immaginando infatti la curva $\Gamma^0$ descritta nel modo di $\Gamma''$, sulla tangente $\zeta$ a $C_2$ si trovano di $\Gamma^0$ i tre punti

$$\zeta\eta\,,\quad \zeta\xi'\,,\quad \zeta\xi''\,.$$

essendo i parametri ligati dalle relazioni

$$\varphi\zeta^2\,\varphi_\eta = 0\,,\quad \varphi\xi'^2\,\varphi\zeta = 0\,,\quad \varphi^2\xi''\,\varphi\zeta = 0\,.$$

Or, com' è noto, i punti $\xi'\,\xi''$ armonici di 2° ordine e le relative tangenti formano un'involuzione i cui punti ed i cui raggi doppî sono i punti e le tangenti $\delta'\,\delta''$ forniti dall'equazione $\Delta_\lambda{}^2 = 0$. Segando siffatta involuzione di tangenti con una tangente $\zeta$, si ha un'involuzione di punti $X' \equiv \zeta\xi'$, $X'' \equiv \zeta\xi''$. Onde il fascio che proietta da D, polo della corda $\delta'\,\delta''$, le coppie $X'\,X''$ è in involuzione, che ha per elementi doppî le tangenti $\delta'\,\delta''$ a $C_2$. Perciò i punti di $\Gamma^0$ indicati con $X'\,X''$ sono coniugati, e si trovano già sulla tangente $\zeta$ alla curva $C_2$. Così $C_2$ coincide con $\Sigma$.

(1) *Sopra una curva di 3ª classe e 4° ordine*, Nota dell'Accademia di Napoli, 1865. Del resto permutando nelle nostre formole i simboli $x$ ed $u$, si hanno le proprietà di quella curva, chiamata $\Gamma$ dal Battaglini.

Data $\zeta$ e la coppia $\varphi_\xi^2 \varphi_\zeta = 0$ corrispondente, se si cerca il coniugato armonico $\zeta'$ di $\zeta$ rispetto alle coppie $\xi$, si deve avere l'equazione $\varphi_\zeta \varphi_{\zeta'} \varphi_\zeta \equiv \varphi^2_\zeta \varphi_{\zeta'} = 0$; onde, poichè è pure $\varphi_\zeta^2 \varphi_\eta = 0$, e $\zeta$ è dato, $\zeta' \equiv \eta$. In altri termini: una coppia di poli coniugati è divisa armonicamente dal punto di contatto della loro congiungente con la cayleyana, e dalla terza intersezione di questa stessa congiungente con la curva. Ma questa proprietà appartiene alla cayleyana di *qualunque* curva del 3° ordine (di genere 1 o zero) (1).

Come dai punti di $\mathbf{C}_2$ si deducono quelli di $\Gamma^0$ uno per uno adoperando la costruzione della curva $\Gamma''$ del § 2, così bisogna intendere trasportate le forme $Q_\lambda^3$, $\varphi_\lambda^3$ e $\Delta_\lambda^2$ dalla $\mathbf{C}_2$ sulla $\Gamma^0$; e viceversa.

Così per es., l'equazione $Q_\lambda^3 = 0$ fornisce i parametri dei tre flessi. Adunque per trovare questi punti, s'intendano costruiti sulla $\mathbf{C}_2$ i punti $\alpha' \beta' \gamma'$ rappresentati dallo stesso covariante $Q_\lambda^3$ eguagliato a zero, e s'immagini costruita la corrispondenza $\varphi_\xi^2 \varphi_\eta = 0$ mediante i due fasci di raggi (D) ed ($\alpha'$) prospettivi alla punteggiata $\beta\gamma$. Il punto di $\Gamma^0$ situato sulla tangente $\alpha'$ (punto di $Q_\lambda^3 = 0$), si trova segando quella tangente col raggio corrispondente del fascio D; ma queste due rette (corrispondenti, perchè $\alpha'$ si considera nella costruzione come punto $\eta$ ed il raggio $\varepsilon\alpha' \equiv \alpha'\alpha' \equiv$ colla tangente in $\alpha'$) devono segarsi su $\beta\gamma$; dunque il punto $A \equiv \alpha'\alpha'.\beta\gamma$ sarà il richiesto punto di flesso. — Con questa costruzione è riconfermato il fatto che la retta che unisce i flessi è la polare $d$ di D; infatti A è il polo di $\alpha\alpha'$, che passa per D; onde esso giace nella polare di D.

È noto come i punti di contatto delle altre tangenti uscenti dai flessi sono forniti dal covariante

$$(Q\Delta)\, Q_\lambda^2 \Delta_\lambda = 0 \quad (2).$$

Ma quei punti sono i punti $\alpha\beta\gamma$, dunque la forma precedente deve differire per una costante da $\varphi_\lambda^3$: risultato conosciuto dall'Algebra, poichè è noto che

$$(Q\Delta)\, Q_\lambda^2 \Delta_\lambda = -\frac{R}{2} \varphi_\lambda^3 .$$

Così pure la condizione che tre punti $\lambda\mu\nu$ siano in linea retta, cioè la $Q_\lambda Q_\mu Q_\nu = 0$ si può enunciare dicendo che la terna $\lambda\mu\nu$ è *armonica* rispetto alla terna $\alpha'\beta'\gamma'$ (M. § 5). Il modo come si costruisce la terna $\lambda\mu\nu$ sulla $\mathbf{C}_2$ permette di trovare il terzo punto d'incontro $\nu$ con la $\Gamma^0$, quando sian noti gli altri due $\lambda$ e $\mu$. Infatti si determinino i punti $\lambda$ e $\mu$ su $\mathbf{C}_2$ corrispondenti ai punti, indicati con gli stessi parametri come al solito, sulla $\Gamma^0$. Si congiunga D col polo di $\lambda\mu$ rispetto a $\mathbf{C}_2$. La retta che congiunge $\alpha$ col punto $\beta'\gamma'.\lambda\mu$ taglierà su $\mathbf{C}_2$ il punto $\nu$, tale appunto che $Q_\lambda Q_\mu Q_\nu = 0$ (3). Trovato il punto $\nu$ su $\mathbf{C}_2$, lo si riporta poi su $\Gamma^0$ secondo l'usato, ed anche, più

(1) Teorema di Cayley; vedi Cremona, *Einleitung* etc., n. 135 c.

(2) Si veda Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* pag. 902, e Rosenow, *Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpuncte*, Breslau.

(3) Questa è la costruzione delle terne $\lambda\mu\nu$ di cui è fatto cenno nella M. I. § 5; soltanto qui il punto $\nu$ rimpiazza $\eta$, e la terna $\alpha'\beta'\gamma'$ rimpiazza $\alpha\beta\gamma$. Vedi anche Battaglini, Rendiconto dell'Accademia di Napoli, fascicolo 2°, febbraio 1866.

brevemente in questo caso, segando la tangente in $v$ a $C_2$ con la retta data $\lambda\mu$ ($\lambda\mu$ sono punti della curva).

Nello stesso modo si potrebbero trattare le forme $Q_\lambda^2 Q_\mu$, $\varphi_\lambda^2 \varphi_\mu$, etc.

## § 4.

### *Segue il caso* : $\sigma \equiv 0$.
### *Forma canonica. Hessiana. Cayleyana.*

Possiamo ottenere semplici ed eleganti risultati adoperando la forma canonica di $\varphi$, e trasformando le coordinate trilineari e tangenziali $x_i$ ed $u_i$ rispetto al nuovo triangolo fondamentale costituito dalle tangenti nel punto doppio D a $\Gamma^0$, che sono pure tangenti a $C_2$ nei punti $\Delta_\lambda^2 = 0$, e dalla corda di contatto $(\Delta x)^2 = 0$, che contiene i flessi.

Per adoperare, il più ch' è possibile, le formole delle *Theorie der binären Formen*, chiamerò non $\delta'_1 : \delta'_2$, $\delta''_1 : \delta''_2$, ma $\xi_1 : \xi_2$, $\eta_1 : \eta_2$ i parametri dei due punti $\Delta_\lambda^2$; per modo che si può sempre supporre

17) $$\Delta_\lambda^2 = -2\,(\xi\lambda)\,(\eta\lambda)\,,$$

mentre la trasformazione lineare del parametro $\lambda$ si fa coll'aiuto dell'equazioni

18) $$\xi = (\xi\lambda) = \xi_1\,\lambda_2 - \xi_2\,\lambda_1\,, \qquad \eta = (\eta\lambda) = \eta_1\,\lambda_2 - \eta_2\,\lambda_1$$

avvertendo di scrivere $\xi'\,\eta'$, $\xi''\,\eta''$ etc., se in luogo di $\lambda$ nei secondi membri delle 18) si pongono i parametri $\mu$, $\nu$ etc.

Ciò posto, son note dalla *Theorie* le formole

19) $$\begin{cases} (\xi\eta)\,\varphi_\lambda^3 = (\xi\lambda)^3 - (\eta\lambda)^3 = \xi^3 - \eta^3 \\ Q_\lambda^3 = (\xi\lambda)^3 + (\eta\lambda)^3 = \xi^3 + \eta^3 \\ R = (\Delta\Delta')^2 = -2\,(\xi\eta)^2 \quad , \quad (\xi\eta) = \sqrt{-\frac{R}{2}} \text{ in valore assoluto} \end{cases}$$

e sempre *diverso da zero*.

Per le cose dette poco fa, e per il § 6 M. I, le equazioni dei lati del nuovo triangolo fondamentale saranno

20) $$x_\xi^2 = 0\,, \qquad x_\eta^2 = 0\,, \qquad x_\xi\,x_\eta = 0\,.$$

Potremmo ora indicare i primi membri di queste equazioni con tre lettere, indi calcolarci dalle tre nuove equazioni risultanti le espressioni simboliche delle antiche coordinate (1), e sostituirle da ultimo nelle formole del § precedente, per riferirle al nuovo triangolo. Ma in questo modo la facilità di calcolare con forme simboliche è in gran parte perduta. A questo inconveniente si rimedia assai bene facendo uso delle solite identità e del solito procedimento polare, cotanto utile nella teoria delle forme binarie.

Trasformiamo prima il covariante identico $(ux)^2 \equiv (xu)^2$, il cui annullarsi esprime che il punto $x$ e la retta $u$ si appartengono.

(1) Il determinante della sostituzione è

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & 2\xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 \\ \eta_1^2 & 2\eta_1\,\eta_2 & \eta_2^2 \\ \xi_1\,\eta_1 & \xi_1\,\eta_2 + \xi_2\,\eta_1 & \xi_2\,\eta_2 \end{vmatrix} = -(\xi\eta)^3 \gtrless 0\,.$$

Perciò si elevi a quadrato l'identità

$$(\xi\eta)\,(ux) = u_\xi\, x_\eta - u_\eta\, x_\xi\,, \qquad \text{con } (\xi\eta) \text{ sempre } \gtrless 0\,,$$

e si avrà

21) $$(\xi\eta)^2\,(ux)^2 = u_\xi{}^2\, x_\eta{}^2 - 2u_\xi\, u_\eta\, x_\xi\, x_\eta + u_\eta{}^2\, x_\xi{}^2 = 0$$

Di qui, ponendo successivamente $x_\lambda = 0$, $u_\lambda = 0$ ed adoperando le abbreviature 18)

22) $$(\xi\eta)^2\, u_\lambda{}^2 = \eta^2\, u_\xi{}^2 - 2\,\xi\eta\, u_\xi\, u_\eta + \xi^2\, u_\eta{}^2 = 0$$

23) $$(\xi\eta)^2\, x_\lambda{}^2 = \eta^2\, x_\xi{}^2 - 2\,\xi\eta\, x_\xi\, x_\eta + \xi^2\, x_\eta{}^2 = 0\,.$$

La 21) è l'equazione d'una retta o d'un punto qualunque del piano, la 22) è l'equazione di un punto e la 23) è l'equazione di una tangente a $\mathbf{C}_2$; le coordinate del qual punto e le coordinate della qual tangente sono date dalle equazioni, riferite al nuovo triangolo,

24) $$\begin{aligned} &\sigma\, x_\xi{}^2 = \xi^2\,, \quad \sigma\, x_\xi\, x_\eta = \xi\eta\,, \quad \sigma\, x_\eta{}^2 = \eta^2 \\ &\varrho\, u_\xi{}^2 = \xi^2\,, \quad \varrho\, u_\xi\, u_\eta = \xi\eta\,, \quad \varrho\, u_\eta{}^2 = \eta^2\,, \end{aligned}$$

che si ottengono paragonando le 22) e 23) con la 21).

Allo stesso modo si trasforma l'equazione $x_\lambda\, x_\mu = 0$ di una corda $\lambda\mu$, e quella $u_\lambda\, u_\mu = 0$ del suo polo.

Abbiamo infatti, moltiplicando per $(\xi\eta)^2$,

25) $$(\xi\eta)^2\, x_\lambda\, x_\mu = (\xi\eta)\, x_\lambda \,.\, (\xi\eta)\, x_\mu = \{\,(\xi\lambda)\, x_\eta - (\eta\lambda)\, x_\xi\,\}\,\{\,(\xi\mu)\, x_\eta - (\eta\mu)\, x_\xi\,\}\,;$$

donde, scrivendo $\xi'$, $\eta'$ in luogo di $(\xi\eta)$, $(\eta\mu)$, si trae subito

26) $$(\xi\eta)^2\, x_\lambda\, x_\mu = \eta\eta'\, x_\xi{}^2 - (\xi\eta' + \xi'\eta)\, x_\xi\, x_\eta + \xi\xi'\, x_\eta{}^2\,.$$

E parimente

27) $$(\xi\eta)^2\, u_\lambda\, u_\mu = \eta\eta'\, u_\xi{}^2 - (\xi\eta' + \xi'\eta)\, u_\xi\, u_\eta + \xi\xi'\, u_\eta{}^2\,.$$

Infine dalla 21), postovi simbolicamente $(x'u) = 0$ ovvero $(u'x) = 0$ si deducono le equazioni di $\mathbf{C}_2$:

28) $$\begin{aligned} (\xi\eta)^2\,(xx')^2 &= 2\left(x_\xi{}^2.\, x_\eta{}^2 - \overline{x_\xi\, x_\eta}^{\,2}\right) = 0\,, \\ (\xi\eta)^2\,(uu')^2 &= 2\left(u_\xi{}^2.\, u_\eta{}^2 - \overline{u_\xi\, u_\eta}^{\,2}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Non meno facilmente si trova l'equazione di un punto di $\Gamma^0$ riferito al nuovo triangolo, e l'equazione stessa di $\Gamma^0$.

Dalle 19) si ha infatti l'equazione polare

29) $$(\xi\eta)\, \varphi_\lambda{}^2\, \varphi_\mu = (\xi\lambda)^2\,(\xi\mu) - (\xi\lambda)^2\,(\eta\mu)\,;$$

e di qui ponendo $\mu_1 = u_2$, $\mu_2 = -u_1$ e moltiplicando per $(\xi\eta)\, u_\lambda$ si ha

$$\begin{aligned} (\xi\eta)^2\,(\varphi u)\, \varphi_\lambda{}^2\, u_\lambda &= (-\xi^2 u_\xi + \eta^2 u_\eta)\,(\xi\eta)\, u_\lambda \\ &= (-\xi^2 u_\xi + \eta^2 u_\eta)\,(\xi u_\eta - \eta u_\xi). \qquad \text{(cfr. l'eq.}^{\text{e}}\text{ 25).} \end{aligned}$$

Di qui si ha la richiesta equazione del punto

30) $$(\xi\eta)^2\,(\varphi u)\, \varphi_\lambda{}^2\, u_\lambda \quad = \xi^2\,\eta\, u_\xi{}^2 - (\xi^3 + \eta^3)\, u_\xi\, u_\eta + \xi\eta^2\, u_\eta{}^2 = 0\,,$$

la quale poi paragonata con 21) ne dà immediatamente le coordinate

31) $$\sigma\, x_\xi{}^2 = \xi\eta^2\,, \quad \sigma\, x_\xi\, x_\eta = \tfrac{1}{2}\,(\xi^3 + \eta^3)\,, \quad \sigma\, x_\eta{}^2 = \xi^2\,\eta\,.$$

Per l'equazione della curva, che si può ottenere anche eliminando $\sigma\ \xi$ ed $\iota_\eta$ dalle 31), si trova prima

$$(xp)^2 = (\varphi x)^2\,(\varphi' x')^2\,(\varphi x'')\,(\varphi' x'') = 0\,.$$

Siccome poi la 30) dà

$$(\xi\eta)\,(\varphi x)^2\,(\varphi x'') = -\,x_\xi^{\,2}\,x''_\xi + x_\eta^{\,2}\,x''_\eta$$
$$(\xi\iota_\eta)\,(\varphi' x')^2\,(\varphi' x'') = -\,x'^2_\xi\,x''_\xi + x'^2_\eta\,x''_\eta\,,$$

così moltiplicando la precedente espressione di $(px)^2$ per $(\xi\eta)^2$ e sostituendo i prodotti forniti dalle ultime due equazioni si trova per l'equazione di $\Gamma^0$:

32) $$(\xi\eta)^2\,(px)^2 = \overline{x_\xi^{\,2}}^{\,3} + \overline{x_\eta^{\,2}}^{\,3} - 2x_\xi^{\,2}\,.\,x'^2_\eta\,.\,x''_\xi\,x''_\eta = 0$$

ch' è la conosciutissima espressione dell'equazione di una curva con un punto doppio riferita alla forma canonica. E poichè ogni curva del 3° ordine con un punto doppio può esser ridotta alla forma 32) così:

La curva $\Gamma^0$ è la curva generale del 3° ordine con un punto doppio.

L'equazione di una corda che congiunge il punto $\xi:\eta$ al punto $\xi':\eta'$ di $\Gamma^0$ è

33) $$\begin{vmatrix} x_\xi^{\,2} & 2x_\xi\,x_\eta & x_\eta^{\,2} \\ \xi\iota_\eta^{\,2} & \xi^3 + \iota_\eta^{\,3} & \xi^2\iota_\eta \\ \xi'\eta'^2 & \xi'^3 + \eta'^3 & \xi'^2\eta' \end{vmatrix} = 0\,.$$

equazione che sviluppata e divisa pel determinante $\xi\eta' - \xi'\eta$ diviene

33') $$\{\xi^2\xi'^2 - \eta\eta'\,(\xi\eta' + \xi'\eta)\}\,x_\xi^{\,2} + 2\xi\xi'\,\eta\eta'\,x_\xi\,x_\eta + \{\eta^2\eta'^2 - \xi\xi'\,(\xi\eta' + \xi'\eta)\}\,x_\eta^{\,2} = 0\,.$$

Di qui si ricava l'equazione della tangente, ponendovi $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$: e viene

34) $$(\xi^4 - 2\xi\eta^3)\,x_\xi^{\,2} + 2\xi^2\eta^2\,x_\xi\,x_\eta + (\eta^4 - 2\xi^3\eta)\,x_\eta^{\,2} = 0\,.$$

Queste due equazioni possono esser trasformate di nuovo rispetto all'antico triangolo. La 33') infatti si può scrivere

$\alpha$) $$o = (\xi\xi'\,x_\xi - \eta\eta'\,x_\eta)^2 - (\xi\eta' + \xi'\eta)\,(\eta\eta'\,x_\xi^{\,2} - (\xi\eta' + \xi'\eta)\,x_\xi\,x_\eta + \xi\xi'\,x_\eta^{\,2}) - (\xi\iota_\eta' - \xi'\iota_\eta)^2\,x_\xi\,x_\eta\,.$$

Ora dalla forma polare

$$(\xi\eta)\,\varphi_\lambda\,\varphi_\mu\,\varphi_\nu = \xi\xi'\,(\xi\nu) - \eta\eta'\,(\eta\nu)$$

si deduce

$\beta$) $$(\xi\eta)\,(\varphi x)\,\varphi_\lambda\,\varphi_\mu = -\,\xi\xi'\,x_\xi + \eta\eta'\,x_\eta\,;$$

dalla $\Delta_\lambda^{\,2} = -\,2\,(\xi\lambda)\,(\eta\lambda)$ si deduce pure

35) $$\Delta_\lambda\,\Delta_\mu = -\,(\xi\iota_\eta' + \xi'\iota_\eta)\,,$$

$\gamma$) e $$(\Delta x)^2 = -\,2x_\xi\,x_\eta\,;$$

si ha pure

$\delta$) $$\xi\iota_\eta' - \xi'\iota_\eta = (\xi\lambda)\,(\eta\mu) - (\xi\mu)\,(\eta\lambda) = (\xi\eta)\,(\lambda\mu)\,;$$

sostituendo dunque in $\alpha$) i valori $\beta$), $\gamma$), $\delta$), 26) e 35) si ha l'equazione della corda dopo avere diviso per $(\xi\eta)^2$,

$$0 = (\varphi x)\,(\varphi' x)\,\varphi_\lambda\,\varphi_\mu\,\varphi'_\lambda\,\varphi'_\mu + \Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,x_\lambda x_\mu + \tfrac{1}{2}\,(\lambda\mu)^2\,(\Delta x)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(\varphi x)\,(\varphi' x)\,\{\varphi_\lambda^{\,2}\,\varphi'^2_\mu + \varphi'^2_\lambda\,\varphi_\mu^{\,2} - (\varphi\varphi')^2\,(\lambda\mu)^2\} + \Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,x_\lambda\,x_\mu + \tfrac{1}{2}\,(\lambda\mu)^2\,(\Delta x)^2$$
$$= (\varphi x)\,(\varphi' x)\,\varphi_\lambda^{\,2}\,\varphi'^2_\mu + x_\lambda\,x_\mu\,\Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,.$$

Di qui per la tangente si ottiene

$$(\varphi x)\,(\varphi' x)\,\varphi_\lambda{}^2\,\varphi'_\lambda{}^2 + x_\lambda{}^2\,\Delta_\lambda{}^2 = 0\,.$$

Siano, tornando ancora alla costruzione di $\Gamma^0$, $\lambda$ un punto dato su $\mathbf{C}_2$, $\mu$ l'armonico di 1° ordine e $\nu'\,\nu''$ gli armonici di 2° ordine di $\lambda$ rispetto alla terna $\varphi$, per cui si avranno le relazioni

$$36)\quad \begin{cases} \varphi_\lambda{}^2\,\varphi_\mu = (\xi\lambda)^2\,(\xi\mu) - (\eta\lambda)^2\,(\eta\mu) = \xi^2\,\xi_0 - \eta^2\,\eta_0 = 0\,, \\ \varphi^2{}_{\nu'}\,\varphi_\lambda = (\xi\nu')^2\,(\xi\lambda) - (\eta\nu')^2\,(\eta\lambda) = \xi'^2\,\xi - \eta'^2\,\eta = 0\,, \\ \varphi^2{}_{\nu''}\,\varphi_\lambda = (\xi\nu'')^2\,(\xi\lambda) - (\eta\nu'')^2\,(\eta\lambda) = \xi''^2\,\xi - \eta''^2\,\eta = 0\,. \end{cases}$$

Si chiami poi $\lambda_1$ il punto coniugato a $\lambda$ nell'involuzione quadratica $\varphi_\xi{}^2\,\varphi_\eta = 0$; come appunto sono coniugati $\nu'$ e $\nu''$.

Ciò posto nella citata Nota del prof. Battaglini sulla curva $\Gamma$, si trova dimostrata la proprietà seguente, a dritta della quale io pongo la correlativa:

Se per i punti di contatto di $\Gamma$ con le rette [1] $\lambda\nu'$, $\lambda\nu''$, $\mu\lambda_1$ si tirino delle rette, che passino rispettivamente per i punti d'incontro delle rette $\lambda\nu''$, $\lambda\nu'$, $\mu\lambda$ con $d$, queste rette passeranno per un punto mobile sopra una conica, e saranno le tangenti condotte per esso ad una curva analoga ed inversamente omologica a $\Gamma$; $d$ è l'asse, e D è il centro d'omologia.

Se le tangenti di $\Gamma^0$ nei punti [2] $\lambda\nu'$, $\lambda\nu''$, $\mu\lambda_1$ s'intersecano con le rette che congiungono D ai punti $\lambda\nu''$, $\lambda\nu'$, $\mu\lambda$, queste intersezioni giaceranno sopra una tangente mobile ad una conica, e saranno i punti comuni ad essa tangente e ad una curva analoga ed inversamente omologica a $\Gamma^0$; D è il centro, e $d$ è l'asse di omologia.

Questi due teoremi meritano di essere enunciati sotto una forma, che ne lasci intravedere tutta la importanza ch'essi hanno. Lo farò per quello a destra, tenendo a mente che in sostanza i punti $\lambda\nu'$ e $\lambda\nu''$, $\mu\lambda_1$ e $\mu\lambda$ ottenuti coll'intersecare le tangenti $\lambda$ e $\mu$ di $\mathbf{C}_2$ rispettivamente con le coniugate $\nu'\,\nu''$ e $\lambda\lambda_1$, costituiscono due coppie di poli coniugati sulla $\Gamma^0$. Con questa osservazione l'enunciato del teorema è il seguente:

Data una coppia $\nu'\,\nu''$ di poli coniugati di $\Gamma^0$, si taglino le tangenti in $\nu'$ e $\nu''$ di $\Gamma^0$ rispettivamente con le rette $D\nu''$ e $D\nu'$ in due punti $\nu_1$ e $\nu_2$. Le coppie $\nu_1\,\nu_2$ saranno situate sulla hessiana H di $\Gamma^0$, costituendovi coppie di poli coniugati; e perciò le rette $\nu_1\,\nu_2$ inviluppperanno la cayleyana $\mathbf{C}_2{}^0$ di $\Gamma^0$. Le curve H e $\Gamma^0$ $\mathbf{C}_2$ e $\mathbf{C}_2{}^0$ sono omologiche: la costante di omologia è $-\frac{1}{3}$.

Infatti troviamo, come fa il Battaglini, le equazioni di questi punti e di quelle rette.

Per le notazioni precedenti 36), l'equazione della tangente in $\nu'$ per la forma canonica è

$$37)\qquad (\xi'^4 - 2\xi'\,\eta'^3)\,x_\xi{}^2 + 2\xi'^2\,\eta'^2\,x_\xi\,x_\eta + (\eta'^4 - 2\eta'\,\xi'^3)\,x_\eta{}^2 = 0$$

e quella della retta $D\nu''$ è

$$38)\qquad \xi''\,x_\xi{}^2 - \eta''\,x_\eta{}^2 = 0\,.$$

(1) Ossia: con le corde di $\mathbf{C}_2$.

(2) Ossia: nei poli delle congiungenti $\lambda\nu'$ etc.

Intanto essendo $\nu'$ e $\nu''$ coniugati sa à eq.$^{e}$ 35)

$$-\Delta_{\nu'}\Delta_{\nu''} = \xi'\eta'' + \xi''\eta' = 0\,,$$

da cui

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= -\xi'' = -\xi\\ \eta' &= \eta'' = \eta\end{aligned}\right\}\ \text{togliendo gli apici }''.$$

Così le 37) e 38) diventano rispettivamente

$$(\xi^4 + 2\xi\eta^3)\,x_\xi^2 + 2\xi^2\eta^2\,x_\xi x_\eta + (\eta^4 + 2\xi^3\eta)\,x_\eta^2 = 0$$
$$\xi x_\xi^2 - \eta x_\eta^2 = 0\,.$$

Se $x$ è il punto chiamato $\nu_1$ comune a queste due rette la sua equa ione è della forma 21), cioè

$$x_\xi^2\,v_\eta^2 - 2x_\xi x_\eta v_\xi v_\eta + x_\eta^2 v_\xi^2 = 0\,.$$

Eliminando le $x_\xi^2$, $x_\xi x_\eta$, $x_\eta^2$ tra queste tre ultime equazioni si ha quella richiesta del punto $\nu_1$:

39) $$\xi^2\eta\,v_\xi^2 + 3(\xi^3 + \eta^3)\,v_\xi v_\eta + \xi\eta^2 v_\eta^2 = 0\,,$$

mentre il punto $\nu''$ di $\Gamma^0$ ha l'equazione

30) $$\xi^2\eta\,u_\xi^2 - (\xi^3 + \eta^3)\,u_\xi u_\eta + \xi\eta^2 u_\eta^2 = 0\,.$$

Chiamando con $y_\xi^2$, $y_\xi y_\eta$, $y_\eta^2$ le coordinate del punto 39) si ha

40) $$\sigma' y_\xi^2 = \xi\eta^2,\quad \sigma' y_\xi y_\eta = -\tfrac{3}{2}(\xi^3 + \eta^3),\quad \sigma' y_\eta^2 = \xi^2\eta\,,$$

e paragonando le 40) e 31) si deducono le relazioni di trasformazione:

41) $$\sigma x_\xi^2 = \sigma' y_\xi^2\,,\quad \sigma x_\eta^2 = \sigma' y_\eta^2\,,\quad \sigma x_\xi x_\eta = -\tfrac{1}{3}\sigma' y_\xi y_\eta\,.$$

Questa è appunto la trasformazione omologica con la costante $-\frac{1}{3}$.

L'equazione della curva descritta dal punto $\nu_1$ si ha subito sostituendo in 32) i valori 41) delle $x_\xi^2$, $x_\xi x_\eta$, $x_\eta^2$: e viene così

42) $$\overline{y_\xi^2}^3 + \overline{y_\eta^2}^3 + \tfrac{2}{3}\,y_\xi^2 \cdot y'^2_\eta \cdot y''_\xi y''_\eta = 0$$

ch' è precisamente l'hessiana di $\Gamma^0$.

Le curve $\Gamma^0$ ed H essendo trasformabili l'una nell'altra linearmente (1), ed anzi per omologia, ai poli coniugati $\nu'\,\nu''$ di $\Gamma^0$ corrispondono i punti $\nu_1\,\nu_2$ di H che sono anche poli coniugati. Perciò la retta $\nu_1\,\nu_2$ inviluppa, com' è noto, la cayleyana $C_2^0$ di $\Gamma^0$.

L'equazione della $\nu_1\,\nu_2$, osservando che l'equazione del punto $\nu_2$ differisce da quella di $\nu_1$ pel segno del rapporto $\frac{\xi}{\eta}$, è

$$\begin{vmatrix} y_\xi^2 & -2y_\xi y_\eta & y_\eta^2 \\ \xi\eta^2 & -3(\xi^3+\eta^3) & \xi^2\eta \\ -\xi\eta^2 & 3(\xi^3-\eta^3) & \xi^2\eta \end{vmatrix} = 0\,;$$

e sviluppando

43) $$3\xi^4 y_\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 y_\xi y_\eta + 3\eta^4 y_\eta^2 = 0\,.$$

(1) Il teorema, si noti, non è vero per una cubica generale e per la sua hessiana, perchè gl'invarianti assoluti delle due curve non sono eguali.

Di qui si ha per l'equazione della cayleyana di $I^0$

44) $$\mathbf{C}_2{}^0 \ldots\ldots 9 y_\xi{}^2 . y_\eta{}^2 - \overline{y_\xi y_\eta}^2 = 0 :$$

e la $\mathbf{C}_2{}^0$ si trasforma nella $\mathbf{C}_2$ con la stessa omologia 41).

Sostituendo nella 43) al parametro $\xi : \eta$ del punto $v''$ il parametro del suo punto tangenziale $\xi' : \eta'$ legato al primo dalla relazione $\xi^2 \xi' - \eta^2 \eta' = 0$, la si può scrivere togliendo poi gli apici a $\xi'$ ed $\eta'$:

45) $$3 \eta^2 y_\xi{}^2 - 2 \xi \eta y_\xi y_\eta + 3 \xi^2 y_\eta{}^2 = 0 .$$

Le equazioni 39), 42), 45), 44) si possono trasformare nelle antiche coordinate. I calcoli si farebbero come per la 34).

I risultati sono i seguenti:

1° equazione di un punto dell'hessiana: $(\varphi u)^2 \varphi_\lambda \Delta_\lambda{}^2 - 3 (\Delta u)^2 \varphi_\lambda{}^3 = 0$;

2° equazione dell'hessiana H: $3\mathrm{R}(px)^2 - 2 (\Delta x)^2 \{ \mathrm{R} (xx')^2 - \overline{(\Delta x)^2}^2 \} = 0$;

3° equazione d'una tangente di $\mathbf{C}_2{}^0$ : $3\mathrm{R} x_\lambda{}^2 - 2 (\Delta x)^2 \Delta_\lambda{}^2 = 0$;

4° equazione di $\mathbf{C}_2{}^0$ : $$9\mathrm{R} (xx')^2 - 8 \overline{(\Delta x)^2}^2 = 0 .$$

Infine le terne $\alpha \beta \gamma$, $\alpha' \beta' \gamma'$ hanno i 6 lati tangenti ad un'altra conica che ha con $\mathbf{C}_2$ e con $\mathbf{C}_2{}^0$ un doppio contatto sulla retta dei flessi $(\Delta x)^2 = 0$.

Infatti le terne sono fornite dalle equazioni $\xi^3 - \eta^3 = 0$, $\xi^3 + \eta^3 = 0$ le cui radici sono rispettivamente $1, \varepsilon, \varepsilon^2$; $-1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$, dove $\varepsilon$ è una radice immaginaria cubica dell'unità positiva. Applicando a questi punti l'equazione 26), si hanno le equazioni dei lati di quelle terne

$$x_\xi{}^2 + \varepsilon x_\eta{}^2 + \varepsilon^2 x_\xi x_\eta = 0 , \qquad x_\xi{}^2 + \varepsilon x_\eta{}^2 - \varepsilon^2 x_\xi x_\eta = 0 ,$$
$$x_\xi{}^2 + x_\eta{}^2 + x_\xi x_\eta = 0 , \qquad x_\xi{}^2 + x_\eta{}^2 - x_\xi x_\eta = 0 ,$$
$$\varepsilon x_\xi{}^2 + x_\eta{}^2 + \varepsilon^2 x_\xi x_\eta = 0 , \qquad \varepsilon x_\xi{}^2 + x_\eta{}^2 - \varepsilon^2 x_\xi x_\eta = 0 .$$

Queste 6 rette sono tutte tangenti alla conica

$$4 x_\xi{}^2 x_\eta{}^2 - \overline{x_\xi x_\eta}^2 = 0 ,$$

che trasformata rispetto alle coordinate antiche è

$$4\mathrm{R} (xx')^2 - 3 (\Delta x)^2 = 0 .$$

# Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1885.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

*letta nella seduta del 2 maggio 1886.*

(Con una tavola)

---

Ho l'onore di presentare a questa R. Accademia l'effemeride e la statistica idrometrica del fiume Tevere pel decorso anno 1885, che è il quarto del settimo periodo decennale delle quotidiane osservazioni.

In conformità del sistema adottato nelle effemeridi precedenti, anche in questa sono registrate le altezze del pelo d'acqua del Tevere osservate al mezzodì di ciascun giorno di detto anno all'idrometro collocato presso Orte ed a quello di Ripetta; ossia prima e dopo la confluenza dell'Aniene.

E similmente, in conformità di quanto fu praticato per gli anni precedenti, viene in seguito esposta la effemeride e la statistica idrometrica dell'Aniene; ossia il registro dell'altezza del pelo d'acqua di detto fiume osservata quotidianamente durante lo stesso anno 1885, all'ora sopraindicata, all'idrometro collocato all'origine dei cunicoli del Monte Catillo presso Tivoli.

Completano, secondo il consueto, dette effemeridi le corrispondenti rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Confrontando questi registri, ed i risultati delle rispettive statistiche idrometriche cogli analoghi registri e colle consimili statistiche dei settantatre anni precedenti, se ne traggono le seguenti illazioni:

1° Che, considerando il Tevere *in stato di magra* fino che l'altezza del pelo d'acqua misurata all'idrometro di Ripetta non raggiunge i metri 6,00, *in stato ordinario* quando la detta altezza, toccati i metri 6,00, non arriva agli 8 metri; *in stato d'intumescenza* finchè oscilla dagli 8 ai 12 metri, e finalmente *in stato di vera e minacciosa piena* quando l'altezza del pelo d'acqua del Tevere all'idrometro di Ripetta tocca o sorpassa i metri 12,00; nell'anno 1885 il Tevere per 68 giorni corse *in magra;* per 237 giorni si mantenne *in stato ordinario;* per 56 giorni *fu intumescente;* e solo in 4 giorni montò *in piena;* piene però che furono tutte di breve durata e nessuna presentò sintomi veramente allarmanti.

2° Che *l'altezza media generale* del pelo d'acqua del Tevere durante l'anno 1885 misurata all'idrometro di Ripetta fu di m. 7,060.

3° Che coll'anno 1884 ebbe termine quel periodo triennale di cui avevo fatto cenno nelle Memorie precedenti; ossia quel periodo nel quale il Tevere si mantenne

oltremodo mite, a segno tale da non esser mai in detto periodo montato in pie a; ed inoltre avere avuti pochissimi giorni d' intumescenza, e cioè 33 giorni nel 1882; 27 nel 1883; e soli 15 nel 1884. Donde ne derivò che anche le altezze medie generali dei detti tre anni risultarono fra le minori di tutte quelle verificatesi dacchè sono istituite queste quotidiane osservazioni; e cioè metri 5,700 pel 1883; metri 6,352 pel 1884 e metri 6,643 pel 1882.

4° Che se l'anno 1885 non fu fra quelli in cui avvennero numerose e grandi piene, fu però fra quelli in cui il pelo d'acqua del Tevere si mantenne piuttosto elevato, e lungamente. Essendochè nei 74 anni di osservazioni l'altezza media generale dell' intero anno verificatasi nel 1885 in metri 7,060 non fu superata altro che dagli anni 1879, 1860, 1838, 1853, 1855 e 1844: le cui altezze medie generali di tutto il rispettivo anno furono metri 7,377; 7,407; 7,449; 7,601; 7,629 e 7,638.

E similmente il numero dei giorni d' intumescenza non fu superato che dagli anni 1837, 1860, 1838, 1855, 1879 e 1853 che ne ebbero rispettivamente 58, 80, 86, 87, 96 e 103.

Si entrò dunque col 1885 in un nuovo periodo in cui il corso del Tevere accenna a riprendere l'energia che pel triennio 1882, 83, 84 aveva messo da banda.

*Effemeride del Tevere,*
*ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno* 1885.

| GIORNI del mese | **Gennaio** Altezza osservata Met. lin. | **Febbraio** Altezza osservata Met. lin. | **Marzo** Altezza osservata Met. lin. | **Aprile** Altezza osservata Met. lin. | **Maggio** Altezza osservata Met. lin. | **Giugno** Altezza osservata Met. lin. | **Luglio** Altezza osservata Met. lin. | **Agosto** Altezza osservata Met. lin. | **Settembre** Altezza osservata Met. lin. | **Ottobre** Altezza osservata Met. lin. | **Novembre** Altezza osservata Met. lin. | **Dicembre** Altezza osservata Met. lin. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,80 | 1,70 | 1,60 | 1,70 | 3,60 | 1,70 | 1,40 | 1,60 | 1,70 | 1,70 | 1,75 | 1,75 |
| 2 | 2,00 | 1,70 | 1,60 | 1,70 | 3,00 | 1,83 | 1,40 | 1,70 | 1,75 | 1,60 | 4,60 | 1,75 |
| 3 | 1,78 | 1,70 | 1,60 | 1,70 | 2,40 | 1,65 | 1,40 | 1,85 | 1,85 | 1,85 | 3,15 | 2,00 |
| 4 | 1,70 | 2,50 | 1,60 | 2,40 | 2,00 | 1,65 | 1,35 | 1,75 | 1,60 | 1,65 | 2,80 | 1,80 |
| 5 | 1,70 | 2,50 | 1,60 | 2,00 | 2,00 | 1,60 | 1,35 | 1,55 | 1,60 | 1,60 | 2,60 | 1,75 |
| 6 | 1,60 | 1,95 | 1,60 | 1,90 | 1,90 | 1,55 | 1,30 | 1,55 | 1,60 | 1,50 | 2,30 | 1,75 |
| 7 | 1,60 | 1,85 | 1,60 | 1,80 | 2,00 | 1,50 | 1,30 | 1,55 | 1,40 | 1,40 | 4,16 | 1,70 |
| 8 | 1,60 | 1,75 | 1,60 | 4,10 | 1,82 | 1,50 | 1,30 | 1,50 | 1,30 | 1,60 | 3,12 | 1,70 |
| 9 | 1,60 | 1,75 | 1,60 | 6,30 | 1,80 | 1,82 | 1,60 | 1,40 | 1,30 | 1,50 | 2,50 | 1,70 |
| 10 | 1,60 | 1,75 | 1,60 | 3,55 | 1,83 | 1,55 | 1,50 | 1,30 | 1,85 | 2,00 | 2,20 | 1,70 |
| 11 | 1,60 | 1,78 | 1,60 | 3,15 | 1,80 | 1,55 | 1,50 | 1,25 | 1,60 | 2,55 | 2,02 | 1,70 |
| 12 | 3,60 | 1,78 | 1,60 | 3,10 | 1,85 | 1,84 | 1,30 | 1,20 | 1,40 | 2,90 | 1,88 | 1,70 |
| 13 | 5,40 | 1,75 | 1,85 | 3,10 | 1,78 | 1,56 | 1,20 | 1,18 | 1,20 | 2,25 | 1,80 | 1,70 |
| 14 | 2,80 | 1,75 | 1,70 | 2,20 | 1,90 | 1,50 | 1,20 | 1,15 | 1,20 | 2,10 | 1,80 | 1,60 |
| 15 | 2,20 | 1,75 | 1,60 | 2,80 | 3,20 | 1,45 | 1,20 | 1,25 | 1,20 | 2,00 | 1,80 | 1,60 |
| 16 | 3,90 | 1,75 | 1,60 | 2,40 | 3,40 | 1,45 | 1,20 | 1,15 | 1,20 | 4,35 | 2,20 | 1,60 |
| 17 | 4,05 | 1,75 | 1,60 | 2,50 | 2,80 | 1,45 | 1,20 | 1,15 | 1,15 | 2,60 | 2,00 | 1,60 |
| 18 | 3,62 | 1,75 | 1,60 | 2,30 | 2,25 | 1,40 | 1,20 | 1,15 | 1,10 | 2,10 | 1,75 | 1,60 |
| 19 | 3,05 | 1,70 | 1,60 | 2,50 | 2,10 | 1,40 | 1,20 | 1,20 | 1,10 | 1,95 | 1,75 | 1,60 |
| 20 | 2,40 | 1,95 | 1,60 | 2,20 | 3,10 | 1,60 | 1,50 | 1,85 | 1,10 | 2,80 | 3,80 | 1,60 |
| 21 | 2,25 | 1,87 | 1,70 | 2,10 | 2,40 | 1,88 | 1,60 | 1,75 | 1,10 | 3,55 | 2,45 | 1,60 |
| 22 | 2,05 | 1,72 | 1,60 | 1,90 | 2,05 | 1,75 | 1,45 | 1,86 | 1,10 | 2,85 | 2,20 | 1,60 |
| 23 | 1,85 | 1,70 | 1,60 | 1,85 | 2,03 | 1,60 | 1,30 | 1,85 | 1,10 | 2,10 | 2,90 | 1,60 |
| 24 | 1,85 | 1,70 | 1,60 | 1,82 | 1,85 | 1,55 | 1,30 | 1,60 | 1,10 | 2,00 | 4,59 | 1,60 |
| 25 | 1,80 | 1,70 | 3,15 | 1,80 | 1,80 | 1,55 | 1,25 | 1,20 | 1,10 | 2,10 | 2,85 | 1,60 |
| 26 | 1,80 | 1,70 | 2,35 | 1,80 | 1,75 | 1,50 | 1,25 | 1,20 | 2,80 | 3,30 | 2,30 | 1,60 |
| 27 | 1,75 | 1,70 | 1,90 | 1,80 | 1,70 | 1,45 | 1,88 | 1,20 | 3,45 | 2,50 | 2,70 | 1,50 |
| 28 | 1,75 | 1,70 | 1,85 | 1,80 | 1,70 | 1,40 | 1,70 | 1,20 | 2,60 | 2,00 | 2,30 | 1,50 |
| 29 | 1,75 | | 1,98 | 1,80 | 1,70 | 1,40 | 1,60 | 1,20 | 2,20 | 2,30 | 2,00 | 1,50 |
| 30 | 1,70 | | 1,80 | 2,60 | 1,65 | 1,40 | 1,70 | 1,20 | 1,95 | 1,95 | 1,80 | 1,50 |
| 31 | 1,70 | | 1,80 | | 1,60 | | 1,60 | 1,70 | | 1,75 | | 1,60 |
| Sommata | 69,85 | 50,65 | 53,68 | 72,67 | 66,76 | 47,03 | 43,23 | 44,24 | 46,70 | 68,40 | 76,07 | 51,10 |
| Media | 2,25 | 1,81 | 1,73 | 2,42 | 2,15 | 1,57 | 1,39 | 1,43 | 1,56 | 2,21 | 2,54 | 1,65 |
| Massima | 5,40 | 2,50 | 3,15 | 6,30 | 3,60 | 1,88 | 1,88 | 1,86 | 3,45 | 3,55 | 4,60 | 2,00 |
| Minima | 1,60 | 1,70 | 1,60 | 1,70 | 1,60 | 1,40 | 1,20 | 1,15 | 1,10 | 1,40 | 1,75 | 1,50 |
| Differenza | 3,80 | 0,80 | 1,55 | 4,60 | 2,00 | 0,48 | 0,68 | 0,71 | 2,35 | 2,15 | 2,85 | 0,50 |

*Effemeride del Tevere,*
*ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno* 1885.

| GIORNI del mese | **Gennaio** Altezza osservata Met. lin. | **Febbraio** Altezza osservata Met. lin. | **Marzo** Altezza osservata Met. lin. | **Aprile** Altezza osservata Met. lin. | **Maggio** Altezza osservata Met. lin. | **Giugno** Altezza osservata Met. lin. | **Luglio** Altezza osservata Met. lin. | **Agosto** Altezza osservata Met. lin. | **Settembre** Altezza osservata Met. lin. | **Ottobre** Altezza osservata Met. lin. | **Novembre** Altezza osservata Met. lin. | **Dicembre** Altezza osservata Met. lin. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,43 | 6,58 | 6,33 | 6,74 | 9,26 | 6,66 | 6,21 | 6,18 | 6,12 | 6,15 | 7,31 | 7,41 |
| 2 | 7,15 | 6,58 | 6,28 | 6,63 | 10,44 | 6,63 | 6,12 | 6,12 | 6,60 | 6,03 | 9,22 | 7,21 |
| 3 | 7,35 | 6,58 | 6,28 | 6,58 | 8,58 | 6,58 | 6,07 | 6,25 | 6,31 | 5,95 | 11,80 | 7,10 |
| 4 | 6,95 | 7,76 | 6,27 | 6,73 | 7,95 | 6,68 | 6,06 | 6,21 | 6,15 | 6,09 | 10,33 | 6,99 |
| 5 | 6,80 | 8,87 | 6,24 | 7,67 | 7,51 | 6,48 | 6,03 | 6,11 | 6,02 | 5,96 | 8,98 | 6,8. |
| 6 | 6,66 | 8,57 | 6,20 | 7,20 | 7,32 | 6,42 | 5,99 | 6,03 | 6,95 | 5,91 | 8,46 | 6,81 |
| 7 | 6,50 | 7,93 | 6,18 | 6,97 | 7,65 | 6,39 | 5,98 | 5,96 | 5,96 | 5,90 | 8,48 | 6,77 |
| 8 | 6,43 | 7,64 | 6,18 | 10,31 | 7,15 | 6,39 | 5,98 | 6,10 | 5,94 | 5,87 | 11,19 | 6,76 |
| 9 | 6,41 | 7,42 | 6,17 | 12,68 | 6,99 | 6,35 | 6,07 | 5,96 | 5,89 | 6,03 | 9,48 | 6,87 |
| 10 | 6,34 | 8,02 | 6,17 | 10,31 | 6,93 | 6,31 | 6,00 | 5,90 | 5,95 | 5,93 | 8,42 | 6,91 |
| 11 | 6 30 | 7,18 | 6,17 | 13,41 | 6,99 | 6,39 | 5,97 | 5,86 | 5,93 | 6,41 | 7,86 | 6,76 |
| 12 | 8,30 | 7,02 | 6,16 | 9,93 | 6,88 | 6,47 | 5,97 | 5,83 | 5,89 | 7,82 | 7,70 | 6,71 |
| 13 | 13,74 | 6,88 | 6,41 | 9,66 | 6,88 | 6,43 | 5,98 | 5,80 | 5,93 | 7,89 | 7,46 | 6,61 |
| 14 | 13,08 | 6,72 | 6,41 | 9,13 | 6,90 | 6,37 | 5,98 | 5,80 | 5,88 | 7,20 | 7,22 | 6,55 |
| 15 | 10,27 | 6,64 | 6,30 | 10,09 | 7,71 | 6,34 | 5,95 | 5,79 | 5,85 | 7,18 | 7,08 | 6,52 |
| 16 | 10,19 | 6,57 | 6,21 | 9,21 | 9,43 | 6,30 | 5,95 | 5,78 | 5,82 | 7,64 | 7,04 | 6,50 |
| 17 | 11,74 | 6,54 | 6,18 | 8,65 | 9,25 | 6,27 | 5,92 | 5,78 | 5,78 | 10,63 | 7,27 | 6,49 |
| 18 | 11,67 | 6,50 | 6,16 | 8,73 | 8,05 | 6,25 | 5,90 | 5,78 | 5,78 | 7,91 | 6,90 | 6,47 |
| 19 | 10,94 | 6,47 | 6,14 | 8,45 | 7,60 | 6,26 | 5,87 | 5,78 | 5,78 | 7,15 | 6,78 | 6,51 |
| 20 | 10,42 | 6,47 | 6,14 | 8,16 | 9,22 | 6,24 | 6,06 | 5,79 | 5,99 | 6,96 | 10,86 | 6,51 |
| 21 | 8,50 | 6,78 | 6,24 | 7,89 | 7,94 | 6,49 | 6,22 | 5,82 | 5,75 | 9,88 | 9,22 | 6,57 |
| 22 | 7,98 | 6,57 | 6,16 | 7,62 | 7,44 | 6,67 | 6,25 | 6,12 | 5,75 | 10,60 | 8,07 | 6,55 |
| 23 | 6,67 | 6,54 | 6,18 | 7,42 | 7,25 | 6,39 | 6,07 | 6,11 | 5,74 | 8,34 | 7,96 | 6,50 |
| 24 | 6,38 | 6,53 | 6,20 | 7,30 | 7,23 | 6,27 | 6,04 | 5,93 | 5,74 | 7,75 | 11,63 | 6,68 |
| 25 | 7,21 | 6,51 | 6,95 | 7,18 | 7,02 | 6,21 | 6,07 | 5,81 | 5,74 | 7,31 | 10,20 | 6,64 |
| 26 | 7,05 | 6,45 | 8,50 | 7,07 | 6,95 | 6,16 | 6,35 | 5,81 | 5,89 | 11,12 | 8,77 | 6,71 |
| 27 | 6,95 | 6,32 | 6,85 | 6,94 | 6,94 | 6,15 | 6,56 | 5,85 | 8,02 | 9,25 | 8,75 | 6,54 |
| 28 | 6,83 | 6,35 | 6,25 | 6,93 | 6,83 | 6,13 | 6,35 | 5,80 | 8,81 | 8,09 | 8,49 | 6,48 |
| 29 | 6,73 | | 6,18 | 6,88 | 6,74 | 6,14 | 6,09 | 5,79 | 6,68 | 7,93 | 7,79 | 6,42 |
| 30 | 6,65 | | 6,90 | 6,99 | 6,74 | 6,10 | 6,02 | 5,79 | 6,35 | 7,70 | 7,56 | 6,38 |
| 31 | 6,59 | | 6,84 | | 6,68 | | 6,12 | 5,89 | | 7,56 | | 6,38 |
| Sommata | 252,21 | 194,99 | 197,83 | 249,78 | 236,45 | 190,92 | 188,20 | 183,53 | 184,99 | 232,14 | 258,58 | 207,20 |
| Media | 8,14 | 6,96 | 6,83 | 8,33 | 7,63 | 6,36 | 6,07 | 5,92 | 6,17 | 7,49 | 8,62 | 6,68 |
| Massima | 13,74 | 8,87 | 8,50 | 12,68 | 10,44 | 6,68 | 6,56 | 6,25 | 8.81 | 11,12 | 11,80 | 7,41 |
| Minima | 6,30 | 6,32 | 6,14 | 6,58 | 6,68 | 6,10 | 5,87 | 5,78 | 5,74 | 5,87 | 6.78 | 6,38 |
| Differenza | 7,44 | 2.55 | 2,36 | 6,10 | 3,76 | 0,58 | 0,69 | 0,47 | 3,07 | 5,25 | 5,02 | 1,03 |

*Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all'imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli, al mezzodì di ciascun giorno dell'anno* 1885.

| GIORNI del mese | **Gennaio** Altezza osservata Met. lin. | **Febbraio** Altezza osservata Met. lin. | **Marzo** Altezza osservata Met. lin. | **Aprile** Altezza osservata Met. lin. | **Maggio** Altezza osservata Met. lin. | **Giugno** Altezza osservata Met. lin. | **Luglio** Altezza osservata Met. lin. | **Agosto** Altezza osservata Met. lin. | **Settembre** Altezza osservata Met. lin. | **Ottobre** Altezza osservata Met. lin. | **Novembre** Altezza osservata Met. lin. | **Dicembre** Altezza osservata Met. lin. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 2,00 | 1,60 | 1,40 | 1,35 | 1,45 | 1,45 | 1,40 | 1,65 |
| 2 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 2,00 | 1,45 | 1,40 | 1,35 | 1,45 | 1,45 | 1,70 | 1,65 |
| 3 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,80 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,35 | 2,40 | 1,60 |
| 4 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,80 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,35 | 1,90 | 1,60 |
| 5 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 2,05 | 1,35 | 1,45 | 1,40 | 1,40 | 1,35 | 1,45 | 1,60 |
| 6 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,60 | 1,35 | 1,45 | 1,40 | 1,40 | 1,45 | 1,40 | 1,60 |
| 7 | 1,30 | 1,35 | 1,30 | 1,40 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,50 | 1,40 | 1,60 |
| 8 | 1,30 | 1,35 | 1,30 | 1,80 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,30 | 1,40 | 1,50 | 1,40 | 1,60 |
| 9 | 1,35 | 1,35 | 1,30 | 3,00 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,30 | 1,35 | 1,65 | 1,40 | 1,60 |
| 10 | 1,35 | 1,35 | 1,30 | 2,10 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,30 | 1,30 | 1,70 | 1,40 | 1,60 |
| 11 | 1,40 | 1,35 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,30 | 1,30 | 1,70 | 1,40 | 1,50 |
| 12 | 3,30 | 1,35 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,55 | 1,40 | 1,30 | 1,30 | 2,05 | 1,45 | 1,50 |
| 13 | 3,30 | 1,30 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,40 | 1,45 | 1,30 | 1,30 | 2,35 | 1,45 | 1,50 |
| 14 | 2,50 | 1,30 | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,40 | 1,35 | 1,30 | 1,30 | 1,75 | 1,55 | 1,50 |
| 15 | 1,40 | 1,30 | 1,35 | 1,90 | 1,60 | 1,40 | 1,55 | 1,30 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,45 |
| 16 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,70 | 1,85 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,55 | 1,40 | 1,40 | 1,45 |
| 17 | 2,50 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1 45 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,45 | 1,40 | 1,40 | 1,45 |
| 18 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,45 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,45 |
| 19 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,40 | 1,45 |
| 20 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,60 | 1,45 |
| 21 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,65 | 1,35 | 1,55 | 1,20 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,45 | 1,45 |
| 22 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,65 | 1,35 | 1,45 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,45 | 1,45 |
| 23 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,60 | 1,40 | 1,45 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,40 | 1,45 | 1,45 |
| 24 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,60 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,60 | 1,45 | 1,45 |
| 25 | 1,40 | 1,35 | 1,45 | 1,60 | 1,45 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,60 | 1,65 | 1,45 |
| 26 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,60 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,55 | 1,90 | 1,45 |
| 27 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,60 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,60 | 1,40 | 1,80 | 1,45 |
| 28 | 1,35 | 1,35 | 1,40 | 1,60 | 1,40 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 2,00 | 1,40 | 1,70 | 1,45 |
| 29 | 1,35 | | 1,30 | 1,60 | 1,40 | 1,45 | 1,35 | 1,35 | 1,75 | 1,40 | 1,70 | 1,45 |
| 30 | 1,35 | | 1,35 | 2,00 | 1,40 | 1,45 | 1,35 | 1,35 | 1,45 | 1,40 | 1,70 | 1,45 |
| 31 | 1,35 | | 1,35 | | 1,60 | | 1,35 | 1,45 | | 1,40 | | 1,45 |
| Sommata | 48,45 | 37,65 | 42,00 | 48,70 | 47,10 | 42,35 | 42,95 | 41,80 | 43,00 | 47,00 | 46,55 | 46,75 |
| Media | 1,56 | 1,34 | 1,35 | 1,62 | 1,52 | 1,41 | 1,39 | 1,35 | 1,43 | 1,52 | 1,55 | 1,51 |
| Massima | 3,30 | 1,35 | 1,45 | 3,00 | 2,05 | 1,60 | 1,45 | 1,45 | 2,80 | 2,35 | 2,40 | 1,65 |
| Minima | 1,30 | 1,30 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,35 | 1,20 | 1,30 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,45 |
| Differenza | 2,00 | 0,05 | 0,15 | 1,65 | 0,65 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,70 | 1,00 | 1,00 | 0,20 |

## Anno 1885.

### STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

| MESI | ALTEZZA MENSILE Sommata Met. lin. | ALTEZZA MENSILE Media Met. lin. | ALTEZZA Massima Met. lin. | ALTEZZA Minima Met. lin. | DIFFERENZE Met. lin. |
|---|---|---|---|---|---|
| Gennaio | 69,85 | 2,25 | 5,40 | 1,60 | 3,80 |
| Febbraio | 50,65 | 1,81 | 2,50 | 1,70 | 0,80 |
| Marzo | 53,68 | 1,73 | 3,15 | 1,60 | 1,55 |
| Aprile | 72,67 | 2,42 | 6,30 | 1,70 | 4,60 |
| Maggio | 66,76 | 2,15 | 3,60 | 1,60 | 2,00 |
| Giugno | 47,03 | 1,57 | 1,88 | 1,40 | 0,48 |
| Luglio | 43,23 | 1,39 | 1,88 | 1,20 | 0,68 |
| Agosto | 44,24 | 1,43 | 1,86 | 1,15 | 0,71 |
| Settembre | 46,70 | 1,56 | 3,45 | 1,10 | 2,35 |
| Ottobre | 68,40 | 2,21 | 3,55 | 1,40 | 2,15 |
| Novembre | 76,07 | 2,54 | 4,60 | 1,75 | 2,85 |
| Dicembre | 51,10 | 1,65 | 2,00 | 1,50 | 0,50 |
| | 690,38 | | | | |

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{690,38}{365} = 1,891$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 6,30
» minima » » 1,10
differenza massima 5,20.

## Anno 1885.

### STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

| MESI | ALTEZZA MENSILE Sommata Met. lin. | ALTEZZA MENSILE Media Met. lin. | ALTEZZA Massima Met. lin. | ALTEZZA Minima Met. lin. | DIFFERENZE Met. lin. |
|---|---|---|---|---|---|
| Gennaio | 252,21 | 8,14 | 13,74 | 6,30 | 7,44 |
| Febbraio | 194,99 | 6,96 | 8,87 | 6,32 | 2,55 |
| Marzo | 197,83 | 6,38 | 8,50 | 6,14 | 2,36 |
| Aprile | 249,78 | 8,33 | 12,68 | 6,58 | 6,10 |
| Maggio | 236,45 | 7,63 | 10,14 | 6,68 | 3,76 |
| Giugno | 190,92 | 6,36 | 6,68 | 6,10 | 0,58 |
| Luglio | 188,20 | 6,07 | 6,56 | 5,87 | 0,69 |
| Agosto | 183,53 | 5,92 | 6,25 | 5,78 | 0,47 |
| Settembre | 184,99 | 6,17 | 8,81 | 5,74 | 3,07 |
| Ottobre | 232,14 | 7,49 | 11,12 | 5,87 | 5,25 |
| Novembre | 258,58 | 8,62 | 11,80 | 6,78 | 5,02 |
| Dicembre | 207,20 | 6,68 | 7,41 | 6,38 | 1,03 |
| | 2576,82 | | | | |

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2576,82}{365} = 7,060$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 13,74
» minima » » 6,25
differenza massima 7,49.

## Anno 1885.

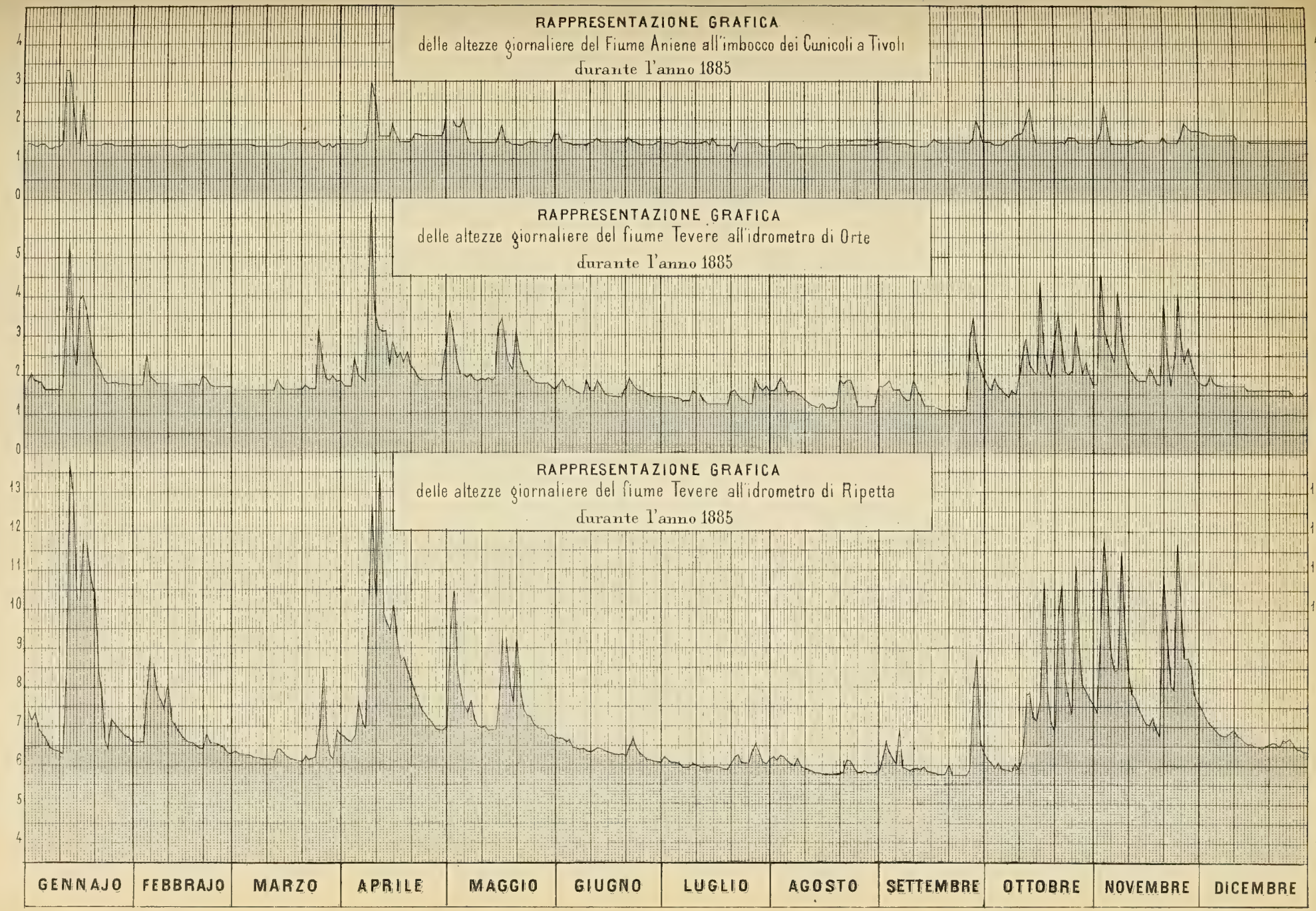
## STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

| MESI | ALTEZZA MENSILE | | ALTEZZA | | DIFFERENZE |
|---|---|---|---|---|---|
| | Sommata Met. lin. | Media Met. lin. | Massima Met. lin. | Minima Met. lin. | Met. lin. |
| Gennaio | 48,45 | 1,56 | 3,30 | 1,30 | 2,00 |
| Febbraio | 37,65 | 1,34 | 1,35 | 1,30 | 0,05 |
| Marzo | 42,00 | 1,35 | 1,45 | 1,30 | 0,15 |
| Aprile | 48,70 | 1,62 | 3,00 | 1,35 | 1,65 |
| Maggio | 47,10 | 1,52 | 2,05 | 1.40 | 0,65 |
| Giugno | 42,35 | 1,41 | 1,60 | 1,35 | 0,25 |
| Luglio | 42,95 | 1,39 | 1,45 | 1,20 | 0,25 |
| Agosto | 41,80 | 1,35 | 1,45 | 1,30 | 0,15 |
| Settembre | 43,00 | 1,43 | 2,00 | 1,30 | 0,70 |
| Ottobre | 47,00 | 1,52 | 2,35 | 1,35 | 1,00 |
| Novembre | 46,55 | 1,55 | 2,40 | 1,40 | 1,00 |
| Dicembre | 46,75 | 1,51 | 1,65 | 1,45 | 0,20 |
| | 534,30 | | | | |

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{534,20}{365} = 1,464$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 3,30
» minima » » 1,20 } differenza massima 2,10.


RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Aniene all'imbocco dei Cunicoli a Tivoli
durante l'anno 1885
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del fiume Tevere all'idrometro di Orte
durante l'anno 1885
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
durante l'anno 1885
GENNAJO
FEBBRAJO
MARZO
APRILE
MAGGIO
GIUGNO
LUGLIO
AGOSTO
SETTEMBRE
OTTOBRE
NOVEMBRE
DICEMBRE

# Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dall'attrazione di Giove.

Memoria del prof. ADOLFO VENTURI

premiata al concorso pel premio Reale di Astronomia dell'anno 1884 (1)

## INTRODUZIONE

Due anni or sono compariva nelle pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano una mia Memoria (2) dove oltre all'esporre originalmente il metodo di Hansen vi si apportavano diverse modificazioni. Il presente calcolo del pianeta Feronia è stato condotto secondo tali modificazioni, eccezion fatta dello sviluppo della funzione perturbatrice, pel quale fu invece adoperato integralmente il metodo di Hansen. In detto sviluppo ho dovuto allontanarmi dal metodo indicato nella detta mia Memoria per due principali ragioni: 1° perchè il detto mio metodo di sviluppo non può per ora adoperarsi, non essendo state calcolate le costanti che vi abbisognano: 2° perchè nel caso di Feronia non si aveva a temere che i coefficienti calcolati col metodo di Hansen fossero insufficienti. — In questo scritto adunque, la prima parte sino alla formazione delle equazioni differenziali è appoggiata alle formule date da Hansen nella prima Memoria del suo Trattato dei piccoli pianeti; e la seconda parte che tratta dello sviluppo e della determinazione delle variabili del moto è basata sulla detta mia Memoria pubblicata dall'Osservatorio di Brera.

L'accordo soddisfacente trovato tra i presenti sviluppi e le osservazioni, attestano che il lavoro è riuscito e nello stesso tempo dimostrano non inutili nè illusorie le modificazioni da me apportate al metodo originale di Hansen.

(1) La relazione della Commissione esaminatrice trovasi nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. II, 1° sem., pag. 369.

(2) *Metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti, intieramente rifuso ed originalmente esposto* da A. Venturi prof. nel R. Liceo di Como — Milano, Ulrico Hoepli editore libraio, 1882.

## Calcolo delle perturbazioni assolute di Feronia prodotte dall'attrazione di Giove.

Epoca dei moti medî e delle osculazioni — 1879, novembre 30,0. (Tempo medio di Berlino) Equinozio medio di riferimento — 1880, gennaio, 0.

| | Elementi di Feronia | Elementi di Giove |
|---|---|---|
| Anomalia media . . . . | $c = 59°,31',21'',4$ | $c' = 336°,04',28'',7$ |
| Longitudine del perielio. | $\varpi = 307, 52, 27, 1$ | $\varpi' = 12, 23, 55, 1$ |
| Longitudine del nodo. . | $\theta = 207, 48, 42, 0$ | $\theta' = 99, 14, 29, 3$ |
| Inclinazione. . . . . | $i = 5, 23, 59, 8$ | $i' = 1, 18, 35, 2$ |
| Angolo eccentrico. . . . | $\varphi = 6, 56, 6, 0$ | $\varphi' = 2, 46, 2, 3$ |
| Moto medio diurno. . . | $n = 1040'',1026$ | $n' = 299'',1284$ |
| Log. semigrand'asse . . | $\log a = 0,3552869$ | $\log a' = 0,7162371$ |
| Massa risp. al sole . . . . . | | $m' = \frac{1}{1053,92}$ . |

Dalle precedenti deduco queste che spesso occorrono:

$\log \cos \varphi = \bar{1},9968109$ $\quad$ $\log \cos \varphi' = \bar{1},9994933$

$\log \operatorname{sen} \varphi = \bar{1},0818628 = \log e$ $\quad$ $\log \operatorname{sen} \varphi' = \bar{2},6837700 = \log e'$

Cerchiamo i termini della grande digressione. Il rapporto dei medî movimenti è:

$$\mu = \frac{2991284}{10401026}.$$

Svolgendolo in frazione, abbiamo:

$$\mu = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \text{ecc.}}}}}$$

le cui ridotte successive sono:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{21}{73}, \frac{44}{153}, \text{ ecc.....}$$

Per le proprietà delle frazioni continue, abbiamo:

$$\frac{1}{3} - \mu < \frac{1}{3.7} \; ; \; \mu - \frac{2}{7} < \frac{1}{7.73} \; ; \; \frac{21}{73} - \mu < \frac{1}{73.153} \; ; \text{ ecc.}$$

e di qui, in valore assoluto:

$$\begin{aligned} 1 - 3\mu &< 0,14 \\ 2 - 7\mu &< 0,01369 \\ 21 - 73\mu &< 0,00008 . \end{aligned}$$

ecc. ecc.

Si vede di qui che il secondo divisore è il solo che può avere importanza; perchè il terzo è piccolissimo, sì, ma appartiene all'argomento $21 - 73\mu$ che ha coefficiente insensibile. — Dunque il termine che produce la grande digressione è quello che ha per argomento:

$$(2 - 7\mu)\varepsilon - 7(c' - c\mu).$$

Per svolgere la funzione perturbatrice col metodo di Hansen, (Hansen, piccoli pianeti, Memoria 1) determino le costanti che seguono, le cui espressioni si trovano a pag. 107 l. c.

$$\begin{aligned} \Phi &= 12^\circ, 4', 12'',10 \\ \Psi &= 120, 34\ 54,\ 03 \\ J &= 5, 56\ 51,\ 74 \\ \Pi &= 87, 59\ 33,\ 00 \\ \Pi' &= 152, 34\ 31,\ 79 . \end{aligned}$$

Ricordando che $\alpha$ è uguale ad $\frac{a'}{a}$, si ricava dai dati:

$$\log \alpha = 0{,}3609502 .$$

Dalle (102) pag. 138, ritrovo:

$$\begin{aligned} K &= 152^\circ,42',06'',26 & \log k &= \bar{1},9995048 \\ K_1 &= 152, 26, 55,\ 93 & \log k_1 &= \bar{1},9981552. \end{aligned}$$

Dalle (104), (106) Hansen l. c. ho ricavati i seguenti valori:

$$\begin{aligned} P &= 151^\circ,18',\ 1'',32 & \log p &= 0{,}6718856 \\ V &= 295, 24,\ 6,\ 78 & \log v &= 0{,}6586950 \\ W &= 144,\ 5, 17,\ 12 & \log w &= 0{,}6587687 \\ W_1 &= 144,\ 8, 42,\ 46 & \log w_1 &= 0{,}6591520 \end{aligned}$$

Finalmente dalle (108), (110) l. c. abbiamo:

$$\log \gamma_2 = \bar{2},0894316 \qquad R = 6{,}2465159 .$$

Così si hanno tutte le costanti fondamentali che subirono un primo controllo col mezzo delle formule, che si deducono dalle stesse (50), (102), (104), (106) l. c.:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Psi + \Phi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Psi - \Phi)} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(i + i') \qquad k^2 \operatorname{sen} 2K = k^2{}_1 \operatorname{sen} 2K_1$$

$$\frac{p \cos \varphi \cos P}{v \cos V} = \operatorname{tg}(\Pi - K_1) \qquad \frac{w_1 \operatorname{sen} W_1}{w \cos W} = \operatorname{tg}(V - P) .$$

Le altre costanti che serviranno al controllo generale sono state dedotte dal n. 60 l. c. Esse sono:

$$\begin{aligned} K' &= 87^\circ,58',53'',91 & \log k' &= \bar{1},9976583 \\ K'_1 &= 88,\ 0, 11,\ 86 & \log k'_1 &= \bar{1},9999971 \\ P' &= 36^\circ\ 27, 59,\ 36 & \log p' &= 0{,}7091705 \\ V' &= 64,\ 37, 10,\ 79 & \log v' &= 0{,}6590390 \\ W' &= 28,\ 5, 15,\ 03 & \log w' &= 0{,}6587729 \\ W'_1 &= 28,\ 8, 43,\ 93 & \log w_1' &= 0\ 6591472 \end{aligned}$$

$$R' = 6{,}2419319$$

Calcolo dei valori numerici della funzione:

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - f \cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2} \gamma_2 \cos 2\varepsilon'.$$

Nella precedente funzione da cui dipende lo sviluppo della funzione perturbatrice, abbiamo:

$$D = \gamma_0 + \tfrac{1}{2} \gamma_2 \qquad \gamma_0 = R - 2e \cos \varepsilon + e^2 \cos^2 \varepsilon + e' f \cos F ,$$

ed:

$$f \operatorname{sen}(F - P) = w \operatorname{sen}(\varepsilon + W) - ep \qquad f \cos(F - P) = w_1 \cos(\varepsilon + W).$$

Stante la lontananza di Feronia da Giove credo sufficientissimi 16 valori numerici della funzione da svilupparsi. — Divido perciò la circonferenza in 16 parti uguali: e per ciascun valore di $\varepsilon$ calcolo colle formule precedenti i valori dei coefficienti della funzione $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$.

I valori che $\varepsilon$ prende sono:

$$0^\circ, 22^\circ.30', 45^\circ, 67^\circ.30', 90^\circ, \text{ ecc.}$$

Questa Tavola riunisce i valori di D, $f$, F calcolati:

*Tavola dei valori di* D, $f$, F.

Tav. I.

| $\varepsilon$ | D | $\log f$ | F |
|---|---|---|---|
| 0, 0 | 6,133503 | 0,6289293 | 301,37,59,52 |
| 22,30 | 6,218607 | 0,6498764 | 325, 0, 2,56 |
| 45, 0 | 6,309772 | 0,6706442 | 347,14,57,59 |
| 67,30 | 6,395353 | 0,6884083 | 8,33,51,73 |
| 90, 0 | 6,464558 | 0,7013657 | 29,11,41,51 |
| 112,30 | 6,507775 | 0,7084772 | 49,24, 5,84 |
| 135, 0 | 6,517499 | 0,7092311 | 69,26,32,29 |
| 157,30 | 6,490018 | 0,7035227 | 89,34,30,63 |
| 180, 0 | 6,427275 | 0,6916664 | 110, 4, 3,63 |
| 202,30 | 6,337901 | 0,6745412 | 131,11,55,86 |
| 225, 0 | 6,236427 | 0,6538460 | 153,14,32,79 |
| 247,30 | 6,140537 | 0,6323646 | 176,24,46,28 |
| 270, 0 | 6,067062 | 0,6139649 | 200,45,42, 0 |
| 292,30 | 6,028115 | 0,6028667 | 226, 3,20,01 |
| 315, 0 | 6,028699 | 0,6020353 | 251,44,39,87 |
| 337,30 | 6,066492 | 0,6116254 | 277, 7,36,33 |

Questi valori numerici sono stati scrupolosamente controllati. — Ed ecco come: La stessa $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ si può scrivere:

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma'_0 - f' \cos(\varepsilon - F') + e^2 \cos^2 \varepsilon \qquad (1)$$

essendo:

$$\gamma'_0 = R' - 2\alpha^2 e' \cos \varepsilon' + \alpha^2 e'^2 \cos^2 \varepsilon' + ef' \cos F'$$

$$f' \operatorname{sen}(F' - P') = w' \operatorname{sen}(\varepsilon' + W') - e' p' ; \quad f' \cos(F' - P') = w'_1 \cos(\varepsilon' + W'_1)$$

e le costanti $P', W'_1 W', p', w', w'_1$ sono state già calcolate avanti.

I coefficienti $\gamma'_0$, $f'$, F′ della precedente furono da me calcolati pel valore $\varepsilon' = 20^\circ$, ed ottenni:

| $\varepsilon'$ | $\gamma'_0$ | $\log f$ | F′ |
|---|---|---|---|
| 20° | 5,844390 | 0,6411391 | 82,24,0,88 |

Per ciascun valore di $\varepsilon$ e per $\varepsilon' = 20$ si calcolarono i valori di $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$ dalla 1ª espressione; e per tutti i valori di $\varepsilon$ si calcolò la precedente (1) ove è già $\varepsilon' = 20$. Ebbesi:

*Tavola pel controllo dei valori* D, $f$, F.

| $\varepsilon =$ | 0° | 22°,30′ | 45° | 67°,30′ | 90° | 112°,30′ | 135° | 157°,30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 =$ | 5,280151 | 3,661926 | 2,374837 | 1,617066 | 1,506212 | 2,060074 | 3,193408 | 4,731441 |
| $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 =$ | 5,280149 | 3,661918 | 2,374834 | 1,617064 | 1,506209 | 2,060072 | 3,193409 | 4,731445 |
| Differenza = | 0,000002 | 0,000008 | 0,000003 | 0,000002 | 0,000003 | 0,000002 | − 0,000001 | − 0,000004 |
| $\varepsilon =$ | 180° | 202°,30′ | 225° | 247°,30′ | 270° | 292°,30′ | 315° | 337°,30′ |
| $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 =$ | 6,437787 | 8,051741 | 9,328521 | 10,075984 | 10,182568 | 9,632976 | 8,509950 | 6,982227 |
| $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 =$ | 6,437788 | 8,051743 | 9,328514 | 10,075985 | 10,182570 | 9,632976 | 8,509947 | 6,982223 |
| Differenza = | − 0,000001 | − 0,000002 | 0,000007 | − 0,000001 | − 0,000002 | 0,000000 | 0,000003 | 0,000004 |

La esattezza dei valori precedenti è quindi manifesta. — Si osservi che le due massime differenze 0,000008 sono relative ai due valori ove l'arco F—P, prende i valori minimi di 1°,54′ e di 6°, è quindi naturale la maggiore incertezza.

## Calcolo delle $\alpha$ e delle $\beta$.

Prendo ora a determinare i coefficienti dello sviluppo della funzione $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$.— Possiamo scriverla:

$$\frac{a}{\Delta} = \left\{ D - f \cos(\varepsilon' - F) \right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \left\{ D - f \cos(\varepsilon' - F) \right\}^{-\frac{3}{2}} \gamma_2 \cos 2\varepsilon' + \text{ecc.}$$

e i termini seguenti sono qui trascurabili. — Si tratta quindi di svolgere in serie le diverse potenze della funzione:

$$\Theta = D - f \cos(\varepsilon' - F).$$

Siccome vogliamo adoperare le quadrature meccaniche, converrà tenendo ferma la variabile $\varepsilon'$, calcolare lo sviluppo per ciascuno dei 16 valori precedenti di $\varepsilon$. Le formule relative sono nel testo. — Cominciamo sempre dallo sviluppo di $\alpha_0^{(3)}$, data dalla serie:

$$\alpha_0^{(3)} = \omega \{ 1 + A_1 z - A_2 z^2 + A_3 z^3 - \ldots \}$$

ove $\omega = (D \cos \chi)^{-\frac{3}{2}}$, $\operatorname{sen} \chi = \frac{f}{D}$, $z = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \chi}{2 \cos \chi}$

e

| | |
|---|---|
| $\log A_1 = 0{,}1760913$ | $\log A_6 = 0{,}5853547$ |
| $\log A_2 = \bar{1}{,}9719713$ | $\log A_7 = 0{,}8116125$ |
| $\log A_3 = 0{,}0389181$ | $\log A_8 = 1{,}0487948$ |
| $\log A_4 = 0{,}1869806$ | $\log A_9 = 1{,}2941247$ |
| $\log A_5 = 0{,}3745013$ | |

questi coefficienti bastano nella massima parte dei casi. — Per avere le altre $\alpha$, si deve calcolare pel massimo valore di $i$ la quantità $\gamma_i$, il cui valore più che bastevolmente approssimato vien esibito dalla ridotta 3ª cioè:

$$\gamma_i = \sec^2 \tfrac{1}{2} \chi \left( \frac{1 - q_i}{1 - q_i - p_i} \right)$$

ove

$$p_i = -\frac{3.1}{4i(i+1)} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \chi \qquad q_i = \frac{(2i+3)(2i-1)}{4(i+1)(i+2)} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \chi .$$

Essendomi convinto che 14 termini dello sviluppo in serie sono più che sufficienti, ho posta nelle precedenti $i = 14$, ed ho ricavato:

$$\log \left( \frac{3}{4i(i+1)} \right) = \bar{3}{,}5528420n \qquad \log \frac{(2i+3)(2i-1)}{4(i+1)(i+2)} = \bar{1}{,}9404542.$$

Nel calcolo delle altre $\alpha$ occorrono le quantità $F_i$ $\lambda_i$ date dalle espressioni:

$$F_i = \theta_i \left( \frac{f}{D} \right) \qquad \lambda_i = \mu_i \left( \frac{f}{D} \right)^2 ; \quad \text{ove} \quad \theta_i = \frac{2i+1}{4i} ; \quad \mu_i = \frac{(2i+1)(2i-3)}{16i(i-1)}$$

e da $i = 14$ in giù, ricalcolai i valori delle $\theta_i$, $\mu_i$, che risultarono:

Tav. II.

| $i$ | $\log \theta_i$ | $\log \mu_i$ | $i$ | $\log \theta_i$ | $\log \mu_i$ | $i$ | $\log \theta_i$ | $\log \mu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | $\bar{1}{,}7142100$ | $\bar{1}{,}3961466$ | 9 | $\bar{1}{,}7224511$ | $\bar{1}{,}3933924$ | 4 | $\bar{1}{,}7501225$ | $\bar{1}{,}3699113$ |
| 13 | $\bar{1}{,}7153604$ | $\bar{1}{,}3958470$ | 8 | $\bar{1}{,}7252989$ | $\bar{1}{,}3920843$ | 3 | $\bar{1}{,}7659168$ | $\bar{1}{,}3399481$ |
| 12 | $\bar{1}{,}7166988$ | $\bar{1}{,}3954654$ | 7 | $\bar{1}{,}7289332$ | $\bar{1}{,}3901147$ | 2 | $\bar{1}{,}7958800$ | $\bar{1}{,}1938200$ |
| 11 | $\bar{1}{,}7182752$ | $\bar{1}{,}3949688$ | 6 | $\bar{1}{,}7337321$ | $\bar{1}{,}3869446$ | 1 | $\bar{1}{,}8750613$ | |
| 10 | $\bar{1}{,}7201593$ | $\bar{1}{,}3943057$ | 5 | $\bar{1}{,}7403627$ | $1{,}3813407$ | | | |

Tutti gli sviluppi vengono in fine moltiplicati per la quantità:

$$\tfrac{1}{8} \alpha^2 m' . 206265'' = \tfrac{1}{8} \alpha^2 m' \frac{1}{\operatorname{sen} 1''} \quad \text{e} \quad \log \alpha^2 \frac{m'}{\operatorname{sen} 1''} = 3{,}016015 ,$$

a fine di ridurre tutto in secondi e di moltiplicare pel fattore costante della funzione perturbatrice. — Dai dati precedenti si ottiene:

$$\log \{ \tfrac{1}{8} \alpha^2 m' . 206265'' \} = 2{,}1129248.$$

Per questo fattore costante sono state moltiplicate tutte le $\beta^{(3)}$ una volta per tutti: nella tavola che segue si sono dati i valori delle $\beta$ le quali non sono che le $\alpha$ moltiplicate pel detto fattore generale. Le $\beta$ quindi sono espresse in secondi.

*Tavola dei valori delle* $\beta^{(3)}$.

Tav. III.

| $\varepsilon$ | $\log \beta^{(3)}$ | $\log \beta_1^{(3)}$ | $\log \beta_2^{(3)}$ | $\log \beta_3^{(3)}$ | $\log \beta_4^{(3)}$ | $\log \beta_5^{(3)}$ | $\log \beta_6^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | | | | | |
| 0, 0 | 1,2012337 | 0,9563635 | 0,6495059 | 0,3172608 | Ī,9711083 | Ī,6161574 | Ī,2551327 |
| 22,30 | 1,2206898 | 0,9942121 | 0,7074487 | 0,3957839 | 0,0704191 | Ī,7363639 | Ī,3962982 |
| 45, 0 | 1,2428415 | 1,0344912 | 0,7677202 | 0,4765881 | 0,1719882 | Ī,8588194 | Ī,5397118 |
| 67,30 | 1,2639599 | 1,0708728 | 0,8210995 | 0,5474750 | 0,2606035 | Ī,9652792 | Ī,6640847 |
| 90, 0 | 1,2801912 | 1,0979089 | 0,8602684 | 0,5991724 | 0,3250019 | 0,0424696 | Ī,7541210 |
| 112,30 | 1,2885804 | 1,1118648 | 0,8805128 | 0,6259218 | 0,3583510 | 0,0824685 | Ī,8007995 |
| 135, 0 | 1,2879352 | 1,1113595 | 0,8801658 | 0,6257387 | 0,3583333 | 0,0826183 | Ī,8011177 |
| 157,30 | 1,2789582 | 1,0972664 | 0,8602930 | 0,5998868 | 0,3264159 | 0,0445882 | Ī,7569475 |
| 180, 0 | 1,2636664 | 1,0719990 | 0,8238150 | 0,5518301 | 0,2666200 | Ī,9729686 | Ī,6734538 |
| 202,30 | 1,2446168 | 1,0387635 | 0,7747624 | 0,4864899 | 0,1847642 | Ī,8744978 | Ī,5583030 |
| 225, 0 | 1,2244544 | 1,0013689 | 0,7183317 | 0,4104891 | 0,0889881 | Ī,7588180 | Ī,4226502 |
| 247,30 | 1,2057639 | 0,9644766 | 0,6615193 | 0,3332648 | Ī,9911415 | Ī,6402399 | Ī,2832760 |
| 270, 0 | 1,1909863 | 0,9337319 | 0,6134402 | 0,2674647 | Ī,9074560 | Ī,5385836 | Ī,1635995 |
| 292,30 | 1,1821986 | 0,9150042 | 0,5839813 | 0,2270527 | Ī,8559971 | Ī,4760291 | Ī,0899205 |
| 315, 0 | 1,1808213 | 0,9125859 | 0,5804419 | 0,2223696 | Ī,8501608 | Ī,4690346 | Ī,0817650 |
| 337,30 | 1,1873602 | 0,9273442 | 0,6040667 | 0,2550428 | Ī,8919587 | Ī,5199970 | Ī,1419149 |

| $\varepsilon$ | $\log \beta_7^{(3)}$ | $\log \beta_8^{(3)}$ | $\log \beta_9^{(3)}$ | $\log \beta_{10}^{(3)}$ | $\log \beta_{11}^{(3)}$ | $\log \beta_{12}^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | | | | |
| 0, 0 | $\bar{2}$,8896604 | $\bar{2}$,5207898 | $\bar{2}$,1492377 | $\bar{3}$,7755153 | $\bar{3}$,4000003 | $\bar{3}$,0229762 |
| 22,30 | Ī,0518255 | $\bar{2}$,7039820 | $\bar{2}$,3534764 | $\bar{2}$,0008148 | $\bar{3}$,6463713 | $\bar{3}$,2904305 |
| 45, 0 | Ī,2162429 | $\bar{2}$,8894343 | $\bar{2}$,5599857 | $\bar{2}$,2283973 | $\bar{3}$,8950394 | $\bar{3}$ 5601940 |
| 67,30 | Ī,3585729 | Ī,0497512 | $\bar{2}$,7383107 | $\bar{2}$,4247461 | $\bar{2}$,1094239 | $\bar{3}$,7926233 |
| 90, 0 | Ī,4614899 | Ī,1655726 | $\bar{2}$,8670534 | $\bar{2}$,5664225 | $\bar{2}$,2640434 | $\bar{3}$,9601930 |
| 112,30 | Ī,5148674 | Ī,2256619 | $\bar{2}$,9338638 | $\bar{2}$,6399609 | $\bar{2}$,3443151 | $\bar{2}$,0472020 |
| 135, 0 | Ī,5153544 | Ī,2263186 | $\bar{2}$,9346899 | $\bar{2}$,6409566 | $\bar{2}$,3454805 | $\bar{2}$,0485373 |
| 157,30 | Ī,4650261 | Ī,1698198 | $\bar{2}$,8720127 | $\bar{2}$,5720946 | $\bar{2}$,2704289 | $\bar{3}$,9672924 |
| 180, 0 | Ī,3696261 | Ī,0624915 | $\bar{2}$,7527402 | $\bar{2}$,4408665 | $\bar{2}$,1272363 | $\bar{3}$,8121285 |
| 202,30 | Ī,2377540 | $\bar{2}$,9138695 | $\bar{2}$,5873485 | $\bar{2}$,2586902 | $\bar{3}$,9282642 | $\bar{3}$,5963517 |
| 225, 0 | Ī,0820835 | $\bar{2}$,7381514 | $\bar{2}$,3915610 | $\bar{2}$,0428174 | $\bar{3}$,6922942 | $\bar{3}$,3402752 |
| 247,30 | $\bar{2}$,9218721 | $\bar{2}$,5570748 | $\bar{2}$,1895995 | $\bar{3}$,8199568 | $\bar{3}$,4485230 | $\bar{3}$.0755852 |
| 270, 0 | $\bar{2}$,7841432 | $\bar{2}$,4012719 | $\bar{2}$,0157077 | $\bar{3}$,6279647 | $\bar{3}$,2384226 | $\bar{4}$,8473697 |
| 292,30 | $\bar{2}$,6993219 | $\bar{2}$,3052964 | $\bar{3}$,9085691 | $\bar{3}$,5096563 | $\bar{3}$,1089398 | $\bar{4}$,7067086 |
| 315, 0 | $\bar{2}$,6900038 | $\bar{2}$,2948146 | $\bar{3}$,8969224 | $\bar{3}$,4968441 | $\bar{3}$,0949617 | $\bar{4}$,6915644 |
| 337,30 | $\bar{2}$,7593562 | $\bar{2}$,3733791 | $\bar{3}$,9847063 | $\bar{3}$,5938525 | $\bar{3}$,2011984 | $\bar{4}$,8070323 |

Il controllo delle $\beta$ si ottiene dallo sviluppo:

$$\left[\mathrm{D} - f\cos(\mathrm{E}' - \mathrm{F})\right]^{-\frac{3}{2}} = \alpha_0^{(3)} + 2\alpha_1^{(3)}\cos(\varepsilon' - \mathrm{F}) + 2\alpha_2^{(3)}\cos 2(\varepsilon' - \mathrm{F}) + \text{ecc.}$$

ove si faccia $\varepsilon' = \mathrm{F}$, e si moltiplichi pel fattore costante: il controllo consisterà allora nella uguaglianza:

$$\tfrac{1}{8}\alpha^2 m\ 206265''\left[\mathrm{D} - f\right]^{-\frac{3}{2}} = \beta_0^{(3)} + 2(\beta_1^{(3)} + \beta_2^{(3)} + \beta_3^{(3)} + \cdots).$$

*Tavola pel controllo dei valori precedenti delle $\beta^{(3)}$.*

| $\varepsilon =$ | $0^\circ$ | $22^\circ 30'$ | $45^\circ$ | $67^\circ 30'$ | $90^\circ$ | $112^\circ 30'$ | $135^\circ$ | $157^\circ 30'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}\alpha^2 m'(206265)[\mathrm{D} - f]^{-\frac{3}{2}} =$ | $''$ 50,3857 | $''$ 55,8774 | $''$ 62,5829 | $''$ 69,5189 | $''$ 75,2984 | $''$ 78,5376 | $''$ 78,4665 | $''$ 75,2647 |
| $\beta_0^{(3)} + 2(\beta_1^{(3)} + \beta_2^{(3)} + \beta_3^{(3)} + \ldots) =$ | 50,3854 | 55,8768 | 62,5813 | 69,5156 | 75,2941 | 78,5320 | 78,4611 | 75,2605 |
| Differenza = | 0,0003 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0026 | 0,0043 | 0,0056 | 0,0054 | 0,0042 |
| $\varepsilon =$ | $180^\circ$ | $202^\circ 30'$ | $225^\circ$ | $247^\circ 30'$ | $270^\circ$ | $292^\circ 30'$ | $315^\circ$ | $337^\circ 30'$ |
| $\frac{1}{8}\alpha^2 m'(206265)[\mathrm{D} - f]^{-\frac{3}{2}} =$ | $''$ 69,8515 | $''$ 63,4053 | $''$ 57,0045 | $''$ 51,4820 | $''$ 47,41377 | $''$ 45,15224 | $''$ 44,8771 | $''$ 46,6422 |
| $\beta_0^{(3)} + 2(\beta_1^{(3)} + \beta_2^{(3)} + \beta_3^{(3)} + \ldots) =$ | 69,8487 | 63,4040 | 57,0038 | 51,4817 | 47,41375 | 45,15224 | 44,8770 | 46,6422 |
| Differenza = | 0,0028 | 0,0013 | 0,0007 | 0,0003 | 0,00002 | 0,00000 | 0,0001 | 0,0002 |

Il controllo precedente interessa in ispecial modo le $\beta$ d'indice piccolo: ma i logaritmi delle $\beta$ d'indice alto possono essere errati anche nella quarta o terza decimale, senza che il controllo precedente lo avverta. Ciò dipende dal fatto che occorrendo in esso controllo i valori reali delle $\beta$, e le ultime avendo piccola parte significativa, le ultime cifre del rispettivo logaritmo non vi influiscono, e quindi possono anche essere errate. — Occorre dunque un altro controllo che riguardi in ispecial modo le ultime $\beta$, e questo si ottiene calcolando l'ultima $\beta$ colla serie:

$$\alpha_{14}^{(3)} = \omega\psi \,.\, \mathrm{tg}^{14}\tfrac{1}{2}\chi\left[1 + \mathrm{B}_1 z - \mathrm{B}_2 z^2 + \mathrm{B}_3 z^3 - \mathrm{B}_4 z^4 + \text{ecc.}\right]$$

ove $\omega, z$ hanno i valori precedenti, e le costanti $\psi, \mathrm{B}$ sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\log \mathrm{B}_1 &= \bar{1},00000000\\
\log \mathrm{B}_2 &= \bar{3},8927900\\
\log \mathrm{B}_3 &= \bar{3},2064091\\
\log \mathrm{B}_4 &= \bar{4},7012591\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\log \psi &= 0,6368823
\end{aligned}$$

Si noti che questo controllo non vale solo per $\beta_{14}$ ma anche per le precedenti, giacchè da queste appunto viene nel calcolo generale dedotta la $\beta_{14}$.

*Tavola pel controllo delle* $\beta_{14}^{(3)}$.

| $\varepsilon =$ | 0° | 22°30′ | 45° | 67°30′ | 90° | 112°30′ | 135° | 157°30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (per fraz. continua) | | | | | | | | |
| $\log \beta_{14}^{(3)} =$ | $\bar{4}$,26526 | $\bar{4}$,57489 | $\bar{4}$,88687 | $\bar{3}$,15541 | $\bar{3}$,348897 | $\bar{3}$,449390 | $\bar{3}$,451065 | $\bar{3}$,357425 |
| (per serie) | | | | | | | | |
| $\log \beta_{14}^{(3)} =$ | $\bar{4}$,26526 | $\bar{4}$,57489 | $\bar{4}$,88687 | $\bar{3}$,15541 | $\bar{3}$,348893 | $\bar{3}$,449389 | $\bar{3}$,451067 | $\bar{3}$,357426 |
| Differenza = | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,000004 | 0,000001 | $\bar{0}$,000002 | $\bar{0}$,000001 |
| $\varepsilon =$ | 180° | 202°30′ | 225° | 247°30′ | 270° | 292°30′ | 315° | 337°30′ |
| (per fraz. continua) | | | | | | | | |
| $\log \beta_{14}^{(3)} =$ | $\bar{3}$,178304 | $\bar{3}$,9288974 | $\bar{4}$,632588 | $\bar{4}$,3260423 | 4,0615812 | $\bar{5}$,8985556 | $\bar{5}$,8810782 | $\bar{4}$,0150157 |
| (per serie) | | | | | | | | |
| $\log \beta_{14}^{(3)} =$ | $\bar{3}$,178302 | $\bar{3}$,9288974 | $\bar{4}$,632587 | $\bar{4}$,3260422 | $\bar{4}$,0615814 | $\bar{5}$,8985559 | $\bar{5}$,8810787 | $\bar{4}$,0150166 |
| Differenza = | 0,000002 | 0,0000000 | 0,000001 | 0,0000001 | $\bar{0}$,0000002 | $\bar{0}$,0000003 | $\bar{0}$,0000005 | $\bar{0}$,0000009 |

Occorre ora passare allo sviluppo di

$$\left[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\right]^{-\frac{1}{2}}$$

che, secondo il testo, si deduce dal quadro precedente, mercè le formule:

$$\beta_0^{(1)} = \alpha^{-2}\left(\mathrm{D}\beta_0^{(3)} - f\beta_1^{(3)}\right) \; ; \; \beta_i^{(1)} = \frac{f}{4\alpha^2 i}\left(\beta_{i-1}^{(3)} - \beta_{i+1}^{(3)}\right).$$

I valori reali delle $\beta^{(3)}$ son già pronti, avendoli dovuti adoperare nei controlli precedenti; quindi il calcolo delle $\beta^{(1)}$ è molto più semplice che quello delle $\beta^{(3)}$.

Preparati su una striscia di carta i valori logaritmici di $4\alpha^2 i$, che sono costanti, si costruì la seguente tavola.

*Tavola dei valori delle* $\beta^{(1)}$.

Tav. IV.

| $\varepsilon$ | $\log \beta_0^{(1)}$ | $\log \beta_1^{(1)}$ | $\log \beta_2^{(1)}$ | $\log \beta_3^{(1)}$ | $\log \beta_4^{(1)}$ | $\log \beta_5^{(1)}$ | $\log \beta_6^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | 1,0489582 | 0,3631011 | $\bar{1}$,8470499 | $\bar{1}$,3751444 | $\bar{2}$,9237912 | $\bar{2}$,4843466 | $\bar{2}$,0526822 |
| 22,30 | 1,0511746 | 0,3875068 | $\bar{1}$,8929421 | $\bar{1}$,4423623 | $\bar{1}$,0122528 | $\bar{2}$,5940140 | $\bar{2}$,1835348 |
| 45, 0 | 1,0537551 | 0,4124306 | $\bar{1}$,9394300 | $\bar{1}$,5102141 | $\bar{1}$,1013856 | $\bar{2}$,7043854 | $\bar{2}$,3151200 |
| 67,30 | 1,0562036 | 0,4341162 | $\bar{1}$,9796110 | $\bar{1}$,5686991 | $\bar{1}$,1780956 | $\bar{2}$,7992795 | $\bar{2}$,4281752 |
| 90, 0 | 1,0580092 | 0,4498082 | 0,0086100 | $\bar{1}$,6108533 | $\bar{1}$,2333424 | $\bar{2}$,8675872 | $\bar{2}$,5095245 |
| 112,30 | 1,0588199 | 0,4578713 | 0,0236050 | $\bar{1}$,6326987 | $\bar{1}$,2620043 | $\bar{2}$,9030478 | $\bar{2}$,5517731 |
| 135, 0 | 1,0585541 | 0,4577886 | 0,0236972 | $\bar{1}$,6329641 | $\bar{1}$,2624420 | $\bar{2}$,9036554 | $\bar{2}$,5525510 |
| 157,30 | 1,0573927 | 0,4499587 | 0,0094980 | $\bar{1}$,6124617 | $\bar{1}$,2356732 | $\bar{2}$,8706384 | $\bar{2}$,5132943 |
| 180, 0 | 1,0556499 | 0,4353739 | $\bar{1}$,9826065 | $\bar{1}$,5734133 | $\bar{1}$,1845208 | $\bar{2}$,8074119 | $\bar{2}$,4380111 |
| 202,30 | 1,0536323 | 0,4154268 | $\bar{1}$,9454257 | $\bar{1}$,5191870 | $\bar{1}$,1133329 | $\bar{2}$,7192744 | $\bar{2}$,3329598 |
| 225, 0 | 1,0515787 | 0,3920541 | $\bar{1}$,9014941 | $\bar{1}$,4548838 | $\bar{1}$,0287287 | $\bar{2}$,6144372 | $\bar{2}$,2079015 |
| 247,30 | 1,0496795 | 0,3681106 | $\bar{1}$,8562102 | $\bar{1}$,3884400 | $\bar{2}$,9411997 | $\bar{2}$,5058612 | $\bar{2}$,0782994 |
| 270, 0 | 1,0481237 | 0,3475664 | $\bar{1}$,8172209 | $\bar{1}$,3311494 | $\bar{2}$,8656656 | $\bar{2}$,4121028 | $\bar{3}$,9663550 |
| 292,30 | 1,0471157 | 0,3348777 | $\bar{1}$,7931750 | $\bar{1}$,2958166 | $\bar{2}$,8190827 | $\bar{2}$,3542963 | $\bar{3}$,8973152 |
| 315, 0 | 1,0468505 | 0,3333957 | $\bar{1}$,7905045 | $\bar{1}$,2919727 | $\bar{2}$,8140648 | $\bar{2}$,3481069 | $\bar{3}$,8899538 |
| 337,30 | 1,0474617 | 0,3436463 | $\bar{1}$,8101380 | $\bar{1}$,3209237 | $\bar{2}$,8523071 | 2,3956262 | $\bar{3}$,9467409 |

| $\varepsilon$ | $\log \beta_7^{(1)}$ | $\log \beta_8^{(1)}$ | $\log \beta_9^{(1)}$ | $\log \beta_{10}^{(1)}$ | $\log \beta_{11}^{(1)}$ | $\log \beta_{12}^{(1)}$ | $\log \beta_{13}^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | $\bar{3}$,626505 | $\bar{3}$,204399 | $\bar{4}$,785439 | $\bar{4}$,369015 | $\bar{5}$,954658 | $\bar{5}$,541968 | $\bar{5}$,130545 |
| 22,30 | $\bar{3}$,778528 | $\bar{3}$,377584 | $\bar{4}$,979782 | $\bar{4}$,584481 | $\bar{4}$,191235 | $\bar{5}$,799768 | $\bar{5}$,4095288 |
| 45, 0 | $\bar{3}$,931312 | $\bar{3}$,551556 | $\bar{3}$,174935 | $\bar{4}$,800827 | $\bar{4}$,428751 | $\bar{4}$,058350 | $\bar{5}$,689258 |
| 67,30 | $\bar{2}$,062511 | $\bar{3}$,700883 | $\bar{3}$,342405 | $\bar{4}$,986413 | $\bar{4}$,632451 | $\bar{4}$,280155 | $\bar{5}$,929296 |
| 90, 0 | $\bar{2}$,156892 | $\bar{3}$,808294 | $\bar{3}$,462819 | $\bar{3}$,119832 | $\bar{4}$,778884 | $\bar{4}$,439611 | $\bar{4}$,101744 |
| 112,30 | $\bar{2}$,205921 | $\bar{3}$,864105 | $\bar{3}$,525402 | $\bar{3}$,189181 | $\bar{4}$,855007 | $\bar{4}$,522530 | $\bar{4}$,191427 |
| 135, 0 | $\bar{2}$,206870 | $\bar{3}$,865224 | $\bar{3}$,526696 | $\bar{3}$,190656 | $\bar{4}$,856642 | $\bar{4}$,524283 | $\bar{4}$,193378 |
| 157,30 | $\bar{2}$,161379 | $\bar{3}$,813502 | $\bar{3}$,468745 | $\bar{3}$,126477 | $\bar{4}$,786242 | $\bar{4}$,447717 | $\bar{4}$,110531 |
| 180, 0 | $\bar{2}$,074049 | $\bar{3}$,714135 | $\bar{3}$,357348 | $\bar{3}$,003049 | $\bar{4}$,650781 | $\bar{4}$,300222 | $\bar{5}$,951079 |
| 202,30 | $\bar{3}$,952101 | $\bar{3}$,575295 | $\bar{3}$,201622 | $\bar{4}$,830458 | $\bar{4}$,461293 | $\bar{4}$,093829 | $\bar{5}$,727859 |
| 225, 0 | $\bar{3}$,806833 | $\bar{3}$,409831 | $\bar{3}$,015975 | $\bar{4}$,624594 | $\bar{4}$,235289 | $\bar{5}$,847741 | $\bar{5}$,458980 |
| 247,30 | $\bar{3}$,6562219 | $\bar{3}$,238219 | $\bar{4}$,823365 | $\bar{4}$,411009 | $\bar{4}$,000690 | $\bar{5}$,592082 | $\bar{5}$,185243 |
| 270, 0 | $\bar{3}$,526092 | $\bar{3}$,089205 | $\bar{4}$,656863 | $\bar{4}$,226367 | $\bar{5}$,797983 | $\bar{5}$,370992 | $\bar{6}$,945438 |
| 292,30 | $\bar{3}$,445831 | $\bar{4}$,998424 | $\bar{4}$,554192 | $\bar{4}$,112500 | $\bar{5}$,672721 | $\bar{5}$,235155 | $\bar{6}$,798431 |
| 315, 0 | $\bar{3}$,437298 | $\bar{4}$,988732 | $\bar{4}$,543338 | $\bar{4}$,100439 | $\bar{5}$,659600 | $\bar{5}$,220083 | $\bar{6}$,782180 |
| 337,30 | $\bar{3}$,503352 | $\bar{3}$,064048 | $\bar{4}$,627889 | $\bar{4}$,194269 | $\bar{5}$,762675 | $\bar{5}$,332662 | $\bar{6}$,904504 |

Il controllo di queste $\beta^{(1)}$ si fa dallo sviluppo:

$$\left[D - f\cos(\varepsilon' - F)\right]^{-\frac{1}{2}} = \alpha_0^{(1)} + 2\alpha_1^{(1)}\cos(\varepsilon' - F) + 2\alpha_2^{(1)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \cdots$$

ove si faccia $\varepsilon' = \mathrm{F}$. Siccome qui si prende $\beta^{(1)} = \frac{m'}{8} 206265'' \alpha^{(1)}$ il controllo consisterà nella seguente uguaglianza:

$$\tfrac{1}{8} m' 206265'' \left[\mathrm{D} - f\right]^{-\frac{1}{2}} = \beta_0^{(1)} + 2\,(\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} + \beta_3^{(1)} + \beta_4^{(1)} + \cdots \text{ ecc.}).$$

*Tavola pel controllo dei valori precedenti delle* $\beta^{(1)}$.

| $\varepsilon =$ | 0° | 22°30′ | 45° | 67°30′ | 90° | 112°30′ | 135° | 157°30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8} m' 206265'' (\mathrm{D} - f)^{-\frac{1}{2}} =$ | 17,95362 | 18,58353 | 19,29893 | 19,98706 | 20,52633 | 20,81654 | 20,81026 | 20,52328 |
| $\beta_0^{(1)} + 2\left(\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} + \beta_3^{(1)} \text{ ecc. } \ldots\right) =$ | 17,95360 | 18,58350 | 19,29889 | 19,98692 | 20,52611 | 20,81627 | 20,81000 | 20,52308 |
| Differenza = | 0,00002 | 0,00003 | 0,00004 | 0,00014 | 0,00022 | 0,00027 | 0,00026 | 0,00020 |
| $\varepsilon =$ | 180° | 202°30′ | 225° | 247°30′ | 270° | 292°30′ | 315° | 337°30′ |
| $\frac{1}{8} m' 206265'' (\mathrm{D} - f)^{-\frac{1}{2}} =$ | 20,01895 | 19,38317 | 18,70765 | 18,08290 | 17,59344 | 17,30915 | 17,27393 | 17,49749 |
| $\beta_1^{(1)} + 2\left(\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} + \beta_3^{(1)} \text{ ecc. } \ldots\right) =$ | 20,01880 | 19,38307 | 18,70760 | 18,08288 | 17.59348 | 17,30915 | 17,27392 | 17,49747 |
| Differenza = | 0,00015 | 0,00010 | 0,00005 | 0,00002 | - 0,00004 | 0,00000 | 0,00001 | 0,00002 |

Passiamo adesso allo sviluppo della funzione:

$$\frac{\alpha^2}{8} m' 206265''. \left(\frac{3}{4}\gamma_2\right)\left[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\right]^{-\frac{5}{2}} = \beta_0^{(5)} + 2\beta_1^{(5)}\cos(\varepsilon' - \mathrm{F}) \text{ ecc.} - \cdots$$

ove avremo, secondo la teoria:

$$\beta_i^{(5)} = \beta_{i-2}^{(5)} - \frac{i-1}{f}\gamma_2\beta_{i-1}^{(3)}$$

con eccezione di $\beta_0^{(5)}$, $\beta_1^{(5)}$ dati dalle equazioni:

$$\begin{cases} \beta_0^{(5)} + \beta_1^{(5)} = \frac{3}{4}\gamma_2 \dfrac{\beta_0^{(3)} + \frac{1}{3}\beta_1^{(3)}}{\mathrm{D} - f} \\ \beta_0^{(5)} - \beta_1^{(5)} = \frac{3}{4}\gamma_2 \dfrac{\beta_0^{(3)} - \frac{1}{3}\beta_1^{(3)}}{\mathrm{D} + f}. \end{cases}$$

Con queste formole si calcolarono i valori delle $\beta$, che si trovano consegnati nella tavola seguente:

*Tavola dei valori delle* $\beta_i^{(5)}$.

Tav. V.

| $\varepsilon$ | $\log \beta_0^{(5)}$ | $\log \beta_1^{(5)}$ | $\log \beta_2^{(5)}$ | $\log \beta_3^{(5)}$ | $\log \beta_4^{(5)}$ | $\log \beta_5^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | | | | |
| 0, 0 | $\bar{2}$,716813 | $\bar{2}$,609306 | $\bar{2}$,414706 | $\bar{2}$,173419 | $\bar{3}$,90309 | $\bar{3}$,61299 |
| 22,30 | $\bar{2}$,764042 | $\bar{2}$,668227 | $\bar{2}$,490408 | $\bar{2}$,267782 | $\bar{2}$,01703 | $\bar{3}$,74687 |
| 45, 0 | $\bar{2}$,817096 | $\bar{2}$,732337 | $\bar{2}$,570916 | $\bar{2}$,366703 | $\bar{2}$,13529 | $\bar{3}$,88508 |
| 67,30 | $\bar{2}$,867243 | $\bar{2}$,791417 | $\bar{2}$,643660 | $\bar{2}$,454951 | $\bar{2}$,23995 | $\bar{2}$,00668 |
| 90, 0 | $\bar{2}$,905720 | $\bar{2}$,836001 | $\bar{2}$,697822 | $\bar{2}$,520090 | $\bar{2}$,31675 | $\bar{2}$,09552 |
| 112,30 | $\bar{2}$,925889 | $\bar{2}$,859246 | $\bar{2}$,725977 | $\bar{2}$,553895 | $\bar{2}$,35658 | $\bar{2}$,14157 |
| 135, 0 | $\bar{2}$,924971 | $\bar{2}$,858405 | $\bar{2}$,725258 | $\bar{2}$,553312 | $\bar{2}$,35616 | $\bar{2}$,14129 |
| 157,30 | $\bar{2}$,904310 | $\bar{2}$,834923 | $\bar{2}$,697264 | $\bar{2}$,520129 | $\bar{2}$,31742 | $\bar{2}$,09684 |
| 180, 0 | $\bar{2}$,868209 | $\bar{2}$,793196 | $\bar{2}$,646698 | $\bar{2}$,459423 | $\bar{2}$,24593 | $\bar{2}$,01423 |
| 202,30 | $\bar{2}$,822410 | $\bar{2}$,739137 | $\bar{2}$,579955 | $\bar{2}$,378252 | $\bar{2}$,14950 | $\bar{3}$,90200 |
| 225, 0 | $\bar{2}$,773216 | $\bar{2}$,679491 | $\bar{2}$,504770 | $\bar{2}$,285557 | $\bar{2}$,03838 | $\bar{3}$,77195 |
| 247,30 | $\bar{2}$,727134 | $\bar{2}$,621944 | 2,430623 | $\bar{2}$,192985 | $\bar{3}$,92644 | $\bar{3}$,64028 |
| 270, 0 | $\bar{2}$,690550 | $\bar{2}$,574922 | $\bar{2}$,368900 | 2,115044 | $\bar{3}$,83155 | $\bar{3}$,52802 |
| 292,30 | $\bar{2}$,668963 | $\bar{2}$,546666 | $\bar{2}$,331468 | $\bar{2}$,067517 | $\bar{3}$,77364 | $\bar{3}$,45924 |
| 315, 0 | $\bar{2}$,665965 | $\bar{2}$,542962 | 2,326807 | $\bar{2}$,061829 | $\bar{3}$,76678 | $\bar{3}$,45148 |
| 337,30 | 2,682551 | $\bar{2}$,565080 | 2,356542 | $\bar{2}$,099888 | $\bar{3}$,81358 | $\bar{3}$,50704 |

| $\varepsilon$ | $\log \beta_6^{(5)}$ | $\log \beta_7^{(5)}$ | $\log \beta_8^{(5)}$ | $\log \beta_9^{(5)}$ | $\log \beta_{10}^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | | | |
| 0, 0 | $\bar{3}$,30856 | $\bar{4}$,99344 | $\bar{4}$,66932 | $\bar{4}$,34044 | $\bar{4}$,00432 |
| 22,30 | $\bar{3}$,46270 | $\bar{3}$,16791 | $\bar{4}$,86451 | $\bar{4}$,55509 | $\bar{4}$,23805 |
| 45, 0 | $\bar{3}$,62118 | $\bar{3}$,34674 | $\bar{3}$,06408 | $\bar{4}$,77452 | $\bar{4}$,48001 |
| 67,30 | $\bar{3}$,75997 | $\bar{3}$,50311 | $\bar{3}$,23805 | $\bar{4}$,96661 | $\bar{4}$,68931 |
| 90, 0 | $\bar{3}$,86112 | $\bar{3}$,61658 | $\bar{3}$,36417 | $\bar{3}$,10517 | $\bar{4}$,84136 |
| 112,30 | $\bar{3}$,91355 | $\bar{3}$,67541 | $\bar{3}$,42943 | $\bar{3}$,17696 | $\bar{4}$,91908 |
| 135, 0 | $\bar{3}$,91344 | $\bar{3}$,67541 | $\bar{3}$,42959 | $\bar{3}$,17696 | $\bar{4}$,91960 |
| 157,30 | $\bar{3}$,86308 | $\bar{3}$,61920 | $\bar{3}$,36735 | $\bar{3}$,10890 | 4,84510 |
| 180, 0 | $\bar{3}$,76908 | $\bar{3}$,51375 | $\bar{3}$,25018 | $\bar{4}$,98000 | $\bar{4}$,70415 |
| 202,30 | $\bar{3}$,64088 | $\bar{3}$,36903 | $\bar{3}$,08920 | $\bar{4}$,80209 | $\bar{4}$,50920 |
| 225, 0 | $\bar{3}$,49150 | $\bar{3}$,20030 | $\bar{4}$,90091 | $\bar{4}$,59439 | $\bar{4}$,28330 |
| 247,30 | $\bar{3}$,33965 | $\bar{3}$,02857 | $\bar{4}$,70842 | $\bar{4}$,38381 | $\bar{4}$,04922 |
| 270, 0 | $\bar{3}$,20978 | $\bar{4}$,88081 | $\bar{4}$,54158 | $\bar{4}$,19866 | $\bar{5}$,83885 |
| 292,30 | $\bar{3}$,13065 | $\bar{4}$,78958 | $\bar{4}$,44248 | $\bar{4}$,08278 | $\bar{5}$,73239 |
| 315, 0 | $\bar{3}$,12123 | $\bar{4}$,78032 | $\bar{4}$,42975 | $\bar{4}$,07555 | $\bar{5}$,70757 |
| 337,30 | $\bar{3}$,18611 | $\bar{4}$,85431 | $\bar{4}$,51455 | $\bar{4}$,16732 | $\bar{5}$,81954 |

Il controllo di queste $\beta$ si ha dallo sviluppo:

$$\tfrac{1}{s}\, m'\, \alpha^2 206265''\left(\tfrac{3}{4}\gamma_2\right)\Big[\mathrm{D}-\cos(\varepsilon'-\mathrm{F})\Big]^{-\frac{5}{2}}=\beta_0^{(5)}+2\beta_1^{(5)}\cos(\varepsilon'-\mathrm{F})+2\beta_2^{(5)}\cos 2(\varepsilon'-\mathrm{F})\ \text{ecc.}$$

ove si faccia $\varepsilon' = \mathrm{F}$ allora la formula di controllo sarà:

$$\tfrac{1}{8}\, m'\, \alpha^2\, 206265''\, (\tfrac{3}{4}\gamma_2)\Big[\mathrm{D} - f\Big]^{-\frac{5}{2}} = \beta_0^{(5)} + 2\left(\beta_1^{(5)} + \beta_2^{(5)} + \text{ecc...}\right).$$

*Tavola pel controllo dei valori precedenti delle* $\beta^{(5)}$.

| $\varepsilon =$ | $0^\circ$ | $22^\circ 30'$ | $45^\circ$ | $67^\circ 30'$ | $90^\circ$ | $112^\circ 30'$ | $135^\circ$ | $157^\circ 30$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}\alpha^2 m' 206265.\frac{3}{4}\gamma_2 [\mathrm{D}-f]^{-\frac{5}{2}} =$ | $''$ 0,24720 | $''$ 0,29372 | $''$ 0,35478 | $''$ 0,42270 | $''$ 0,48289 | $''$ 0,51801 | $''$ 0,51723 | $''$ 0,48253 |
| $\beta_0^{(5)} + 2\left(\beta_1^{(5)} + \beta_2^{(5)} + \beta_3^{(5)} + \ldots..\right) =$ | 0,24704 | 0,29340 | 0,35418 | 0,42167 | 0,48131 | 0,51604 | 0,51524 | 0,48091 |
| Differenza = | 0,00016 | 0,00032 | 0,00060 | 0,00103 | 0,00158 | 0,00197 | 0,00199 | 0,00162 |

| $\varepsilon =$ | $180^\circ$ | $202^\circ 30'$ | $225^\circ$ | $247^\circ 30'$ | $270^\circ$ | $292^\circ 30'$ | $315^\circ$ | $337^\circ 30'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}\alpha^2 m' 206265.\frac{3}{4}\gamma_2 [\mathrm{D}-f]^{-\frac{5}{2}} =$ | $''$ 0,42609 | $''$ 0,36259 | $''$ 0,30367 | $''$ 0,25625 | $''$ 0,22338 | $''$ 0,20591 | $''$ 0,20382 | $''$ 0,21736 |
| $\beta_0^{(5)} + 2\left(\beta_1^{(5)} + {}_2^{(5)} + \beta_3^{(5)} + \ldots..\right) =$ | 0,42498 | 0,36191 | 0,30329 | 0,25605 | 0,22325 | 0,20582 | 0,20374 | 0,21727 |
| Differenza = | 0,00111 | 0,00068 | 0,00038 | 0,00018 | 0,00013 | 0,00009 | 0,00008 | 0,00009 |

## Quadrature meccaniche.

Calcolati i valori precedenti relativi alle tre funzioni $\Big[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\Big]$ alle potenze $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, resta a sviluppare i coefficienti della loro espressione in serie. — Teniamo la $\varepsilon$ costante; allora svolgendo colla serie di Fourier la funzione generica $\Big[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\Big]^{-\frac{n}{2}}$, avremo, rispetto ad $\varepsilon'$:

$$\Big[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\Big]^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\alpha_1^{(n)}\cos(\varepsilon' - \mathrm{F}) + 2\alpha_2^{(n)}\cos 2(\varepsilon' - \mathrm{F}) +$$

$$+ 2\alpha_3^{(n)}\cos 3(\varepsilon' - \mathrm{F}) + \cdots$$

ove le $\alpha$ son proporzionali alle già calcolate $\beta$. Si potrà anche scrivere:

$$8\varphi\Big[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \varepsilon)\Big]^{-\frac{n}{2}} = \mathrm{Y}_{0,c}^{(n)} + 2\mathrm{Y}_{1,c}^{(n)}\cos(\varepsilon' - \varepsilon) + 2\mathrm{Y}_{2,c}^{(n)}\cos 2(\varepsilon' - \varepsilon) + 2\mathrm{Y}_{3,c}^{(n)}\cos 3(\varepsilon' - \varepsilon) + \cdots$$

$$+ 2\mathrm{Y}_{1,s}^{(n)}\,\mathrm{sen}(\varepsilon' - \varepsilon) + 2\mathrm{Y}_{2,s}^{(n)}\,\mathrm{sen}\,2(\varepsilon' - \varepsilon) + 2\mathrm{Y}_{3,s}^{(n)}\,\mathrm{sen}\,3(\varepsilon' - \varepsilon) + \cdots$$

ove $\quad \mathrm{Y}_{0,c}^{(n)} = \beta_0^{(n)} : \mathrm{Y}_{1,c}^{(n)} = \beta_1^{(n)}\cos(\mathrm{F} - \varepsilon) : \mathrm{Y}_{2,c}^{(n)} = \beta_2^{(n)}\cos 2(\mathrm{F} - \varepsilon)$ ecc...

$$\mathrm{Y}_{1,s}^{(n)} = \beta_1^{(n)}\,\mathrm{sen}(\mathrm{F} - \varepsilon) : \mathrm{Y}_{2,s}^{(n)} = \beta_2^{(n)}\,\mathrm{sen}\,2(\mathrm{F} - \varepsilon)\ \text{ecc...}$$

essendo $\varphi$ la costante per cui si son moltiplicate le $\alpha$ priva del fattore $\frac{1}{8}$. — Per aver le Y, ci serviremo del metodo delle quadrature meccaniche giacchè le $\beta$ sono state calcolate per 16 valori di $\varepsilon$ e per gli stessi valori si calcoleranno le funzioni $\cos i\,(\mathrm{F}-\varepsilon)$, $\operatorname{sen} i\,(\mathrm{F}-\varepsilon)$. Le formule per le quadrature meccaniche, quando si è divisa la circonferenza in 16 parti, dànno le Y sviluppate in questa forma:

$$\mathrm{Y} = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + \cdots + s_1 \operatorname{sen}\varepsilon + s_2 \operatorname{sen} 2\varepsilon + \cdots$$

e detti coefficienti son dati dalle seguenti, ove si son soppressi i divisori $\frac{1}{8}$ perchè già considerati:

$$c_0 + 2c_8 = (0,2);\ c_0 - 2c_8 = (1,3);\ c_2 + c_6 = ((0,4));\ c_2 - c_7 = \Big[((1,5)) - ((3,7))\Big]\cos\frac{\pi}{4};$$

$$s_2 + s_6 = \Big[((1,5)) + ((3,7))\Big]\cos\frac{\pi}{4}$$

$$c_4 = ((0,2));\ s_4 = ((1,3));\ c_1 + c_7 = \binom{0}{8} + \left(\binom{2}{6}\right)\cos 45;\ c_1 - c_7 = \left(\binom{1}{7}\right)\cos 22\,1/2 + \left(\binom{3}{5}\right)\cos 67\,1/2$$

$$c_3 + c_5 = \binom{0}{8} - \left(\binom{2}{6}\right)\cos 45;\ c_3 - c_5 = \left(\binom{1}{7}\right)\operatorname{sen} 22\,1/2 - \left(\binom{3}{5}\right)\operatorname{sen} 67\,1/2;\ s_1 + s_7 = \left(\binom{1}{7}\right)\operatorname{sen} 22\,1/2 + \binom{3}{5}\operatorname{sen} 67\,1/2;\ s_1 - s_7 = \binom{2}{6}\cos 45 + \binom{4}{12}$$

$s_3 + s_5 = \binom{1}{7}\cos 22\,1/2 - \binom{3}{5}\cos 67\,1/2$; $s_3 - s_5 = \binom{2}{6}\cos 45 - \binom{4}{12}$. Ed in queste abbiamo, indicando con $\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1 \ldots \mathrm{Y}_{15}$ i 16 valori delle funzioni Y:

$(0,8) = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_8$; $(1.9) = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_9$, $(2,10) = \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_{10}$ ecc.: $\binom{0}{8} = \mathrm{Y}_0 - \mathrm{Y}_8$; $\binom{1}{9} = \mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y}_9$ ecc.

$(0,4) = (0,8) + (4,12)$ ecc.: $((0,4)) = (0,8) - (4,12)$ ecc.: $(0.2) = (0,4) + (2,6)$ ecc.
$((0,2)) = (0,4) - (2,6)$ ecc.

$\binom{1}{7} = \binom{1}{9} + \binom{7}{15}$ ecc.: $\left(\binom{1}{7}\right) = \binom{1}{9} - \binom{7}{15}$ ecc.

*Sviluppi relativi alla funzione* $8\varphi\left[\mathrm{D} - f\cos(\varepsilon' - \mathrm{F})\right]^{-\frac{1}{2}}$.

$\mathrm{Y}^{(1)}_{0,c}$ $\qquad$ $\mathrm{Y}^{(1)}_{1,c}$ $\qquad$ $\mathrm{Y}^{(1)}_{1,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 180″,64479 | | 0 | 17″,23345 | | 0 | −36″,25979 | |
| 1 | −0,69787 | +1″,02475 | 1 | +1,10110 | 2″,33651 | 1 | +2,38428 | −1″,50713 |
| 2 | −0,08089 | −0,00763 | 2 | −0,03628 | −0,01121 | 2 | +0,03368 | +0,01600 |
| 3 | +0,00268 | −0,00415 | 3 | −0,00077 | −0,00350 | 3 | −0,00377 | +0,00337 |
| 4 | +0,00010 | +0,00015 | 4 | +0,00020 | +0,00005 | 4 | −0,00007 | −0,00024 |
| 5 | 0. | −0,00001 | 5 | −0,00001 | 0. | 5 | +0,00001 | +0,00001 |
| 6 | +0,00001 | +0,00001 | 6 | 0. | 0. | 6 | +0,00002 | 0. |

$Y^{(1)}_{2,c}$ $Y^{(1)}_{2,s}$ $Y^{(1)}_{3,c}$ $Y^{(1)}_{3,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | −8,30805 | | 0 | −10,20394 | | 0 | −4,63515 | | 0 | +1,13144 | |
| 1 | +1,67579 | −0,17226 | 1 | −0,03387 | −1 73050 | 1 | +0,36051 | −0,87057 | 1 | −0,82653 | −0,32427 |
| 2 | −0,04936 | +0,09282 | 2 | +0,11323 | +0,06557 | 2 | +0,07256 | +0,10053 | 2 | +0,09785 | −0,05981 |
| 3 | −0,00296 | +0,00029 | 3 | −0,00091 | +0,00341 | 3 | −0,00608 | +0,00161 | 3 | +0,00116 | +0,00567 |
| 4 | +0,00014 | −0,00031 | 4 | −0,00033 | −0,00019 | 4 | −0,00022 | −0,00031 | 4 | −0,00030 | +0,00018 |
| 5 | +0,00002 | +0,00001 | 5 | +0,00001 | −0,00001 | 5 | +0,00002 | −0,00001 | 5 | 0. | −0,00003 |
| 6 | 0. | +0,00002 | 6 | −0,00001 | +0,00001 | 6 | 0. | +0,00001 | 6 | +0,00001 | +0,00001 |

$Y^{(1)}_{4,c}$ $Y^{(1)}_{4,s}$ $Y^{(1)}_{5,c}$ $Y^{(1)}_{5,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | −0,36856 | | 0 | +1,77548 | | 0 | +0,56423 | | 0 | +0,42803 | |
| 1 | −0,30016 | −0,33670 | 1 | −0,34058 | +0,32247 | 1 | −0,21182 | +0,07023 | 1 | +0,06156 | +0,21504 |
| 2 | +0,08825 | −0,00882 | 2 | −0,01495 | −0,08670 | 2 | +0,01629 | −0,05292 | 2 | −0,05487 | −0,01860 |
| 3 | −0,00304 | +0,00723 | 3 | +0,00732 | +0,00275 | 3 | +0,00466 | +0,00550 | 3 | +0,00565 | −0,00470 |
| 4 | −0,00038 | −0,00016 | 4 | −0,00016 | +0,00038 | 4 | −0,00050 | +0,00017 | 4 | +0,00017 | +0,00050 |
| 5 | 0. | −0,00003 | 5 | −0,00002 | −0,00001 | 5 | −0,00004 | −0,00004 | 5 | −0,00005 | +0,00002 |
| 6 | +0,00001 | 0. | 6 | +0,00001 | 0. | 6 | +0,00001 | −0,00002 | 6 | +0,00001 | 0. |

$Y^{(1)}_{6,c}$ $Y^{(1)}_{6,s}$ $Y^{(1)}_{7,c}$ $Y^{(1)}_{7,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | +0,25010 | | 0 | −0,12934 | | 0 | −0,00370 | | 0 | −0,11330 | |
| 1 | −0,01652 | +0,10656 | 1 | +0,10355 | +0,01405 | 1 | +0,04053 | +0,02746 | 1 | +0,02772 | −0,04219 |
| 2 | −0,02492 | −0,02333 | 2 | −0,02276 | +0,02363 | 2 | −0,01751 | +0,00638 | 2 | +0,00702 | +0,01749 |
| 3 | +0,00553 | −0,00130 | 3 | −0,00127 | −0,00550 | 3 | +0,00092 | −0,00384 | 3 | −0,00385 | −0,00089 |
| 4 | −0,00012 | +0,00054 | 4 | +0,00055 | +0,00013 | 4 | +0,000369 | +0,000347 | 4 | +0,000346 | −0,000369 |
| 5 | −0,00005 | +0,00002 | 5 | −0,00003 | +0,00004 | 5 | −0,000038 | +0,000020 | 5 | +0,000019 | +0,000041 |
| 6 | 0. | −0,00001 | 6 | 0. | +0,00001 | 6 | −0,000002 | −0,000003 | 6 | −0,000003 | +0,000003 |

$Y^{(1)}_{8,c}$ $Y^{(1)}_{8,s}$ $Y^{(1)}_{9,c}$ $Y^{(1)}_{9,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-0''{,}04219$ | | 0 | $-0''{,}01848$ | | 0 | $-0''{,}01425$ | | 0 | $+0''{,}01235$ | |
| 1 | +0,01964 | $-0''{,}01214$ | 1 | −0,01144 | $-0''{,}01989$ | 1 | −0,00088 | $-0''{,}01066$ | 1 | −0,01042 | $+0''{,}00109$ |
| 2 | −0,00067 | +0,01000 | 2 | +0,01014 | +0,00093 | 2 | +0,00465 | +0,00268 | 2 | +0,00262 | −0,00453 |
| 3 | −0,00197 | −0,00159 | 3 | −0,00160 | +0,00196 | 3 | −0,00141 | +0,00067 | 3 | +0,00068 | +0,00140 |
| 4 | +0,00038 | −0,00011 | 4 | −0,00015 | −0,00039 | 4 | +0,00004 | −0,00029 | 4 | −0,00028 | −0,00003 |
| 5 | −0,00001 | +0,00003 | 5 | +0,00004 | 0. | 5 | +0,00001 | +0,00001 | 5 | +0,00002 | −0,00002 |
| 6 | −0,00001 | 0. | 6 | 0. | +0,00001 | 6 | −0,00001 | 0. | 6 | 0. | +0,00001 |

$Y^{(1)}_{10,c}$ $Y^{(1)}_{10,s}$ $Y^{(1)}_{11,c}$ $Y^{(1)}_{11,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+0''{,}00205$ | | 0 | $+0''{,}00747$ | | 0 | $+0''{,}00317$ | | 0 | $+0''{,}00058$ | |
| 1 | −0,00445 | $-0''{,}00163$ | 1 | −0,00167 | $+0''{,}00460$ | 1 | −0,00154 | $+0''{,}00157$ | 1 | +0,00151 | $+0''{,}00158$ |
| 2 | +0,00223 | −0,00151 | 2 | −0,00158 | −0,00225 | 2 | −0,00022 | −0,00133 | 2 | −0,00136 | +0,00020 |
| 3 | −0,00001 | +0,00090 | 3 | +0,00093 | +0,00001 | 3 | +0,00046 | +0,00022 | 3 | +0,00019 | −0,00047 |
| 4 | −0,00017 | −0,00010 | 4 | −0,00011 | +0,00018 | 4 | −0,00011 | +0,00006 | 4 | +0,00006 | +0,00010 |
| 5 | +0,00003 | −0,00002 | 5 | −0,00001 | −0,00003 | 5 | 0. | −0,00002 | 5 | +0,00003 | −0,00001 |
| 6 | −0,00001 | +0,00001 | 6 | 0. | −0,00001 | 6 | 0. | +0,00001 | 6 | 0. | 0. |

*Sviluppi relativi alla funzione* $[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$.

$Y^{(3)}_{0,c}$ $Y^{(3)}_{1,c}$ $Y^{(3)}_{1,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+275''{,}3218$ | | 0 | $+71''{,}7841$ | | 0 | $-151''{,}0040$ | |
| 1 | −9,8877 | $+14''{,}1033$ | 1 | +2,7576 | $+12''{,}2237$ | 1 | +13,6083 | $-11''{,}6060$ |
| 2 | −0,6822 | −0,6224 | 2 | −0,7221 | −0,2189 | 2 | +0,3552 | +0,7660 |
| 3 | +0,0590 | −0,0550 | 3 | +0,0163 | −0,0486 | 3 | −0,0634 | +0,0333 |
| 4 | +0,0024 | +0,0056 | 4 | +0,0037 | +0,0022 | 4 | −0,0009 | −0,0057 |
| 5 | −0,0004 | +0,0001 | 5 | −0,0001 | +0,0002 | 5 | +0,0002 | −0,0001 |
| 6 | 0. | −0,0001 | 6 | −0,0001 | −0,0001 | 6 | +0,0002 | 0. |

$Y^{(3)}_{2,c}$ $Y^{(3)}_{2,s}$ $Y^{(3)}_{3,c}$ $Y^{(3)}_{3,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | −55,9124 | | 0 | −68,6963 | | 0 | −43,0739 | | 0 | +10,5014 | |
| 1 | +12,4099 | −2,9270 | 1 | +1,3020 | −13,7426 | 1 | +4,2069 | −9,2962 | 1 | −7,8089 | −2,6729 |
| 2 | −0,4582 | +1,0585 | 2 | +1,2286 | +0,7611 | 2 | +0,8965 | +1,2292 | 2 | +1,1297 | −0,7222 |
| 3 | −0,0557 | −0,0263 | 3 | −0,0563 | +0,0622 | 3 | −0,1139 | +0,0282 | 3 | +0,0172 | +0,1003 |
| 4 | +0,0030 | −0,0052 | 4 | −0,0052 | −0,0053 | 4 | −0,0019 | −0,0082 | 4 | −0,0071 | +0,0015 |
| 5 | +0,0003 | +0,0003 | 5 | +0,0005 | −0,0002 | 5 | +0,0007 | 0. | 5 | 0. | −0,0007 |
| 6 | 0. | −0,0001 | 6 | 0. | +0,0001 | 6 | +0,0001 | 0. | 6 | −0,0001 | 0. |

$Y^{(3)}_{4,c}$ $Y^{(3)}_{4,s}$ $Y^{(3)}_{5,c}$ $Y^{(3)}_{5,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | −4,3800 | | 0 | +21,0572 | | 0 | +8,1458 | | 0 | +6,1858 | |
| 1 | −3,4252 | −4,0747 | 1 | −4,4051 | +4,3827 | 1 | −3,1707 | +1,2262 | 1 | +0,7562 | +3,2371 |
| 2 | +1,2193 | −0,1206 | 2 | −0,2321 | −1,2202 | 2 | +0,2507 | −0,8605 | 2 | −0,8886 | −0,3042 |
| 3 | −0,0520 | +0,1248 | 3 | +0,1285 | +0,0434 | 3 | +0,0881 | +0,0998 | 3 | +0,1044 | −0,0884 |
| 4 | −0,0084 | −0,0056 | 4 | −0,0050 | +0,0086 | 4 | −0,0115 | +0,0041 | 4 | +0,0041 | +0,0119 |
| 5 | +0,0004 | −0,0006 | 5 | −0,0007 | −0,0004 | 5 | −0,0003 | −0,0010 | 5 | −0,0010 | +0,0002 |
| 6 | −0,0001 | −0,0002 | 6 | +0,0001 | −0,0002 | 6 | +0,0003 | −0,0001 | 6 | 0. | −0,0002 |

$Y^{(3)}_{6,c}$ $Y^{(3)}_{6,s}$ $Y^{(3)}_{7,c}$ $Y^{(3)}_{7,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | +4,2629 | | 0 | −2,2010 | | 0 | −0,0707 | | 0 | −2,2268 | |
| 1 | −0,3571 | +1,9043 | 1 | +1,7763 | +0,1770 | 1 | +0,7829 | +0,5293 | 1 | +0,5763 | −0,8741 |
| 2 | −0,4648 | −0,4344 | 2 | −0,4163 | +0,4388 | 2 | −0,3651 | +0,1335 | 2 | +0,1497 | +0,3672 |
| 3 | −0,1129 | −0,0281 | 3 | −0,0269 | −0,1107 | 3 | +0,0196 | −0,0859 | 3 | −0,0865 | −0,0185 |
| 4 | −0,0029 | +0,0132 | 4 | +0,0129 | +0,0031 | 4 | +0,00935 | +0,00857 | 4 | +0,00849 | −0,00939 |
| 5 | −0,0011 | −0,0003 | 5 | −0,0005 | +0,0011 | 5 | −0,00113 | +0,00058 | 5 | +0,00060 | +0,00113 |
| 6 | −0,0002 | 0. | 6 | −0,0001 | −0,0002 | 6 | −0,00004 | −0,00011 | 6 | −0,00011 | 0,00003 |

$Y^{(3)}_{8,c}$ $Y^{(3)}_{8,s}$ $Y^{(3)}_{9,c}$ $Y^{(3)}_{9,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | −0,9400 | | 0 | −0,4124 | | 0 | −0,3560 | | 0 | +0,3071 | |
| 1 | +0,4459 | −0,2902 | 1 | −0,2427 | −0,4463 | 1 | −0,0152 | −0,2697 | 1 | −0,2592 | +0,0344 |
| 2 | −0,0142 | +0,2343 | 2 | +0,2370 | +0,0219 | 2 | +0,1202 | +0,0696 | 2 | +0,0668 | −0,1172 |
| 3 | −0,0491 | −0,0386 | 3 | −0,0394 | +0,0496 | 3 | −0,0378 | +0,0183 | 3 | +0,0180 | +0,0374 |
| 4 | +0,0099 | −0,0037 | 4 | −0,0036 | −0,0102 | 4 | +0,0012 | −0,0084 | 4 | −0,0083 | −0,0008 |
| 5 | −0,0001 | +0,0012 | 5 | +0,0012 | +0,0004 | 5 | +0,0010 | +0,0009 | 5 | +0,0006 | −0,0010 |
| 6 | −0,0002 | +0,0001 | 6 | 0. | +0,0001 | 6 | −0,0002 | 0. | 6 | 0. | +0,0002 |
| | | | | | | 7 | −0,00010 | +0,00006 | 7 | −0,0001 | +0,00010 |

$Y^{(3)}_{10,c}$ $Y^{(3)}_{10,s}$ $Y^{(3)}_{11,c}$ $Y^{(3)}_{11,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | | | ″ | | | ″ | |
| 0 | +0,0562 | | 0 | +0,2067 | | 0 | +0,0955 | | 0 | +0,0176 | |
| 1 | −0,1212 | −0,0431 | 1 | −0,0488 | +0,1297 | 1 | −0,0475 | +0,0487 | 1 | +0,0440 | +0,0469 |
| 2 | +0,0631 | −0,0427 | 2 | −0,0448 | −0,0637 | 2 | −0,0072 | −0,0417 | 2 | −0,0417 | +0,0061 |
| 3 | −0,0001 | +0,0266 | 3 | +0,0265 | 0. | 3 | +0,0147 | +0,0071 | 3 | +0,0070 | −0,0147 |
| 4 | −0,0051 | −0,0035 | 4 | −0,0034 | +0,0051 | 4 | −0,0036 | +0,0023 | 4 | +0,0023 | +0,0037 |
| 5 | +0,0009 | −0,0006 | 5 | −0,0001 | −0,0010 | 5 | −0,0001 | −0,0007 | 5 | −0,0006 | −0,0001 |
| 6 | −0,0001 | +0,0001 | 6 | 0. | −0,0001 | 6 | 0. | −0,0001 | 6 | +0,0001 | −0,0001 |

$Y^{(3)}_{12,c}$ $Y^{(3)}_{12,s}$

| | $c$ | $s$ | | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | ″ | | | ″ | |
| 0 | +0,0258 | | 0 | −0,0356 | |
| 1 | +0,0094 | +0,0311 | 1 | +0,0303 | −0,0115 |
| 2 | −0,0220 | −0,0066 | 2 | −0,0060 | +0,0215 |
| 3 | +0,0077 | −0,0060 | 3 | −0,0060 | −0,0075 |
| 4 | +0,0003 | +0,0029 | 4 | +0,0029 | −0,0003 |
| 5 | −0,0005 | −0,0002 | 5 | −0,0004 | +0,0005 |
| 6 | 0. | 0. | 6 | 0. | −0,0001 |

*Sviluppi relativi alla funzione* $[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$.

$Y^{(5)}_{0,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +1″,0215 | |
| 1 | −0,0879 | +0″,1254 |
| 2 | −0,0073 | −0,0110 |
| 3 | +0,0010 | −0,0004 |
| 4 | +0,0001 | +0,0002 |

$Y^{(5)}_{1,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,3575 | |
| 1 | −0,0004 | +0″,0797 |
| 2 | −0,0082 | −0,0037 |
| 3 | +0,0006 | −0,0006 |
| 4 | −0,0001 | 0. |

$Y^{(5)}_{1,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,7517 | |
| 1 | +0,0958 | −0″,0986 |
| 2 | +0,0041 | +0,0117 |
| 3 | −0,0010 | 0. |
| 4 | +0,0002 | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{2,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,3569 | |
| 1 | +0,0896 | −0″,0351 |
| 2 | −0,0039 | +0,0116 |
| 3 | −0,0008 | −0,0006 |
| 4 | 0. | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{2,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,4388 | |
| 1 | +0,0226 | −0″,1070 |
| 2 | +0,0124 | +0,0090 |
| 3 | −0,0010 | +0,0009 |
| 4 | −0,0001 | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{3,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,3377 | |
| 1 | +0,0421 | −0″,0860 |
| 2 | +0,0096 | +0,0136 |
| 3 | −0,0015 | +0,0004 |
| 4 | 0. | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{3,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,0821 | |
| 1 | −0,0625 | −0″,0171 |
| 2 | +0,0110 | −0,0076 |
| 3 | +0,0002 | +0,0016 |
| 4 | −0,0001 | +0,0002 |

$Y^{(5)}_{4,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,0410 | |
| 1 | −0,0303 | −0″,0390 |
| 2 | +0,0134 | −0,0012 |
| 3 | −0,0008 | +0,0016 |
| 4 | −0,0001 | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{4,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,1964 | |
| 1 | −0,0456 | +0″,0478 |
| 2 | −0,0029 | −0,0141 |
| 3 | +0,0018 | +0,0007 |
| 4 | −0,0001 | +0,0001 |

$Y^{(5)}_{5,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,0882 | |
| 1 | −0,0360 | +0″,0163 |
| 2 | +0,0029 | −0,0106 |
| 3 | +0,0015 | +0,0015 |
| 4 | −0,0001 | −0,0001 |

$Y^{(5)}_{5,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,0668 | |
| 1 | +0,0063 | +0″,0369 |
| 2 | −0,0108 | −0,0038 |
| 3 | +0,0014 | −0,0012 |
| 4 | +0,0001 | +0,0003 |

$Y^{(5)}_{6,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | +0″,0525 | |
| 1 | −0,0055 | +0″,0248 |
| 2 | −0,0064 | −0,0059 |
| 3 | +0,0018 | −0,0004 |
| 4 | 0. | +0,0003 |

$Y^{(5)}_{6,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,0272 | |
| 1 | +0,0219 | +0″,0010 |
| 2 | −0,0057 | +0,0059 |
| 3 | −0,0005 | −0,0018 |
| 4 | +0,0002 | +0,0002 |

$Y^{(5)}_{7,c}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,0010 | |
| 1 | +0,0105 | +0″,0071 |
| 2 | −0,0055 | +0,0020 |
| 3 | +0,0004 | −0,0014 |
| 4 | 0. | +0,0002 |

$Y^{(5)}_{7,s}$

| | c | s |
|---|---|---|
| 0 | −0″,0307 | |
| 1 | +0,0085 | −0″,0128 |
| 2 | +0,0024 | +0,0056 |
| 3 | −0,0014 | −0,0001 |
| 4 | +0,0002 | −0,0003 |

| | $Y^{(5)}_{8,c}$ | | $Y^{(5)}_{8,s}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $c$ | $s$ | $c$ | $s$ |
| 0 | $-0''{,}0143$ | | $-0''{,}0061$ | |
| 1 | $+0{,}0069$ | $-0''{,}0047$ | $-0{,}0033$ | $-0''{,}0068$ |
| 2 | $-0{,}0002$ | $+0{,}0038$ | $+0{,}0038$ | $+0{,}0002$ |
| 3 | $-0{,}0010$ | $-0{,}0007$ | $-0{,}0007$ | $+0{,}0010$ |
| 4 | $+0{,}0002$ | 0. | $-0{,}0001$ | 0. |

Ciascuno di questi sviluppi è stato controllato scrupolosamente, come segue. La forma di tali sviluppi è:

$$Y^{(n)}_{\substack{i,c\\s}} = \tfrac{1}{2}c_0 + c_1\cos\varepsilon + c_2\cos 2\varepsilon + c_3\cos 3\varepsilon + \cdots \qquad (1)$$
$$+ s_1\operatorname{sen}\varepsilon + s_2\operatorname{sen}2\varepsilon + s_3\operatorname{sen}3\varepsilon + \cdots$$

Per $\varepsilon = 0$, abbiamo:

$$\left(Y^{(n)}_{\substack{i,c\\s}}\right) = \tfrac{1}{2}c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

e con questo si son controllate le $c$. Inoltre, per $\varepsilon = 45°$, abbiamo:

$$\left(Y^{(n)}_{\substack{i,c\\s}}\right)_{45°} = \tfrac{1}{2}c_0 - c_4 + s_2 - s_6 \cdots + \cos 45°\,[\,c_1 - c_3 - c_5 + s_1 + s_3 - s_5\,]$$

la quale controlla le $s$ tranne la $s_4$. I primi membri di queste equazioni son già noti, giacchè sono due valori della funzione da svilupparsi, valori che si sono dovuti adoperare nelle quadrature.

---

Veniamo ora a comporre gli sviluppi delle 3 funzioni precedenti.

Introducendo gli sviluppi delle Y la cui forma è data da (1) nelle serie precedenti e adoperando la *moltiplicazione meccanica* le cui regole saran date in seguito, si ottennero gli sviluppi seguenti:

Tav. VI.

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\operatorname{sen}1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}}$ | | $\frac{a^2 m'}{\operatorname{sen}1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$ | | $\frac{3}{4}\gamma_2\frac{m' a^2}{\operatorname{sen}1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $+\frac{1}{2}180''{,}64479$ | | $+\frac{1}{2}275''{,}3218$ | | $+\frac{1}{2}1''{,}021$ | |
| 1, 0 | $-0{,}69787$ | $+1''{,}02475$ | $-9{,}8877$ | $+14''{,}1033$ | $-0{,}0879$ | $+0''{,}125$ |
| 2, 0 | $-0{,}08089$ | $-0{,}00763$ | $-0{,}6822$ | $-0{,}6224$ | $-0{,}007$ | $-0{,}011$ |
| 3, 0 | $+0{,}00268$ | $-0{,}00415$ | $+0{,}059$ | $-0{,}055$ | $+0{,}001$ | |
| 4, 0 | $+0{,}00010$ | $+0{,}00015$ | $+0{,}002$ | $+0{,}006$ | | |
| 5, 0 | 0. | $-0{,}00001$ | 0. | 0. | | |
| −3, −1 | $+0{,}0005$ | 0. | $+0{,}009$ | $-0{,}001$ | | |
| −2, −1 | $-0{,}0041$ | $+0{,}0073$ | $-0{,}017$ | $+0{,}112$ | $+0{,}001$ | $+0{,}002$ |
| −1, −1 | $-0{,}0523$ | $-0{,}0225$ | $-1{,}488$ | $-0{,}136$ | $-0{,}020$ | 0. |
| 0, −1 | $+2{,}6082$ | $-4{,}7208$ | $+14{,}364$ | $-25{,}832$ | $+0{,}098$ | $-0{,}175$ |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen}\,1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}}$ | | $\frac{a^2 m'}{\text{sen}\,1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$ | | $\frac{3}{4}\gamma_2 \frac{m' a^2}{\text{sen}\,1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 1, — 1 | +17″,2334 | +36″,2598 | +71″,784 | +151″,004 | + 0″,357 | + 0″,752 |
| 2, — 1 | — 0,4060 | — 0,0478 | — 8,848 | — 1,385 | — 0,099 | — 0,016 |
| 3, — 1 | — 0,0203 | — 0,0449 | + 0,044 | — 0,574 | + 0,003 | — 0,008 |
| 4, — 1 | + 0,0026 | + 0,0003 | + 0,050 | + 0,015 | | |
| 5, — 1 | 0. | + 0,0001 | — 0,002 | + 0,003 | | |
| — 2, — 2 | + 0,0003 | + 0,0006 | + 0,008 | + 0,010 | | |
| — 1, — 2 | — 0,0064 | + 0,0006 | — 0,118 | + 0,083 | — 0,002 | + 0,002 |
| 0, — 2 | — 0,1149 | — 0,2060 | — 1,219 | — 2,287 | — 0,0129 | — 0,0240 |
| 1, — 2 | + 3,4063 | + 0,2061 | +26,152 | + 1,625 | + 0,1966 | + 0,0125 |
| 2, — 2 | — 8,3080 | +10,2039 | —55,912 | +68,696 | — 0,3570 | + 0,4388 |
| 3, — 2 | — 0,0547 | — 0,1384 | — 1,333 | — 4,229 | — 0,017 | — 0,058 |
| 4, — 2 | + 0,0162 | — 0,0204 | + 0,303 | — 0,170 | + 0,005 | — 0,001 |
| 5, — 2 | + 0,0004 | + 0,0012 | + 0,006 | + 0,030 | | |
| 6, — 2 | 0. | 0. | — 0,002 | 0. | | |
| — 1, — 3 | — 0,0004 | + 0,0006 | — 0,003 | + 0,015 | | |
| 0, — 3 | — 0,0117 | — 0,0028 | — 0,214 | — 0,045 | — 0,003 | — 0,001 |
| 1, — 3 | + 0,1324 | — 0,1984 | + 1,619 | — 2,359 | + 0,017 | — 0,025 |
| 2, — 3 | + 0,6848 | + 1,6971 | + 6,880 | +17,105 | + 0,059 | + 0,148 |
| 3, — 3 | — 4,6351 | — 1,1314 | —43,074 | —10,501 | — 0,338 | — 0,082 |
| 4, — 3 | + 0,0362 | — 0,0440 | + 1,534 | — 1,487 | + 0,025 | — 0,023 |
| 5, — 3 | + 0,0127 | + 0,0027 | + 0,174 | + 0,099 | + 0,002 | + 0,003 |
| 6, — 3 | — 0,0004 | + 0,0004 | — 0,014 | + 0,011 | | |
| 7, — 3 | 0. | 0. | 0. | — 0,001 | | |
| — 1, — 4 | 0. | 0. | + 0,001 | + 0,001 | | |
| 0, — 4 | — 0,0008 | + 0,0003 | — 0,017 | + 0,016 | | |
| 1, — 4 | — 0,0058 | — 0,0145 | — 0,095 | — 0,253 | — 0,001 | — 0,003 |
| 2, — 4 | + 0,1749 | + 0,0238 | + 2,439 | + 0,353 | + 0,027 | + 0,004 |
| 3, — 4 | — 0,6226 | + 0,6773 | — 7,808 | + 8,480 | — 0,078 | + 0,085 |
| 4, — 4 | — 0,3686 | — 1,7755 | — 4,380 | —21,057 | — 0,041 | — 0,196 |
| 5, — 4 | + 0,0223 | + 0,0039 | + 0,957 | + 0,330 | + 0,017 | + 0,007 |
| 6, — 4 | + 0,0015 | + 0,0061 | — 0,001 | + 0,111 | — 0,001 | + 0,002 |
| 7, — 4 | — 0,0003 | — 0,0001 | — 0,009 | — 0,004 | | |
| 0, — 5 | 0. | 0. | 0. | + 0,002 | | |
| 1, — 5 | — 0,0010 | — 0,0003 | — 0,023 | — 0,008 | — 0,0004 | 0. |
| 2, — 5 | + 0,0094 | — 0,0111 | + 0,176 | — 0,204 | + 0,0027 | — 0,0029 |
| 3, — 5 | + 0,0349 | + 0,1078 | + 0,555 | + 1,749 | + 0,0067 | + 0,0214 |
| 4, — 5 | — 0,4269 | — 0,1318 | — 6,408 | — 1,982 | — 0,073 | — 0,023 |
| 5, — 5 | + 0,5642 | — 0,4280 | + 8,146 | — 6,186 | + 0,088 | — 0,067 |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}}$ | | $\frac{a^2 m'}{\text{sen } 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$ | | $\frac{3}{4}\gamma_2 \frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 6, — 5 | + 0,0032 | + 0,0087 | + 0,066 | + 0,470 | + 0,001 | + 0,010 |
| 7, — 5 | — 0,0023 | + 0,0019 | — 0,053 | + 0,028 | — 0,001 | 0. |
| 8, — 5 | 0. | — 0,0001 | 0. | — 0,005 | | |
| 1, — 6 | — 0,0001 | 0. | — 0,002 | + 0,001 | | |
| 2, — 6 | — 0,0002 | — 0,0011 | — 0,006 | — 0,026 | | |
| 3, — 6 | + 0,0110 | + 0,0026 | + 0,224 | + 0,055 | + 0,004 | + 0,001 |
| 4, — 6 | — 0,0485 | + 0,0461 | — 0,904 | + 0,851 | — 0,012 | + 0,012 |
| 5, — 6 | — 0,0306 | — 0,2101 | — 0,534 | — 3,681 | — 0,006 | — 0,047 |
| 6, — 6 | + 0,2501 | + 0,1293 | + 4,263 | + 2,201 | + 0,052 | + 0,027 |
| 7, — 6 | — 0,0025 | + 0,0030 | — 0,180 | + 0,128 | — 0,004 | + 0,003 |
| 8, — 6 | — 0,0013 | — 0,0006 | — 0,026 | — 0,018 | | |
| 9, — 6 | 0. | 0. | + 0,002 | + 0,001 | | |
| 1, — 7 | — 0,000005 | + 0,000006 | — 0,00007 | + 0,00022 | | |
| 2, — 7 | — 0,000079 | — 0,000039 | — 0,00226 | — 0,00118 | | |
| 3, — 7 | + 0,000738 | — 0,000693 | + 0,01874 | — 0,01706 | | |
| 4, — 7 | + 0,0018 | + 0,0077 | + 0,038 | + 0,172 | 0. | + 0,003 |
| 5, — 7 | — 0,0350 | — 0,0134 | — 0,732 | — 0,283 | — 0,011 | — 0,004 |
| 6, — 7 | + 0,0827 | — 0,0552 | + 1,657 | — 1,106 | + 0,023 | — 0,016 |
| 7, — 7 | — 0,0037 | + 0,1133 | — 0,071 | + 2,227 | — 0,001 | + 0,031 |
| 8, — 7 | — 0,0017 | — 0,0003 | — 0,091 | — 0,047 | — 0,002 | — 0,001 |
| 9, — 7 | 0. | — 0,0006 | + 0,002 | — 0,016 | | |
| 10, — 7 | 0. | 0. | + 0,001 | + 0,001 | | |
| 3, — 8 | 0. | — 0,0001 | 0. | — 0,002 | | |
| 4, — 8 | + 0,0008 | + 0,0003 | + 0,020 | + 0,007 | | |
| 5, — 8 | — 0,0039 | + 0,0032 | — 0,099 | + 0,078 | — 0,002 | + 0,001 |
| 6, — 8 | — 0,0016 | — 0,0201 | — 0,036 | — 0,471 | 0. | — 0,008 |
| 7, — 8 | + 0,0395 | + 0,0236 | + 0,892 | + 0,533 | + 0,014 | + 0,008 |
| 8, — 8 | — 0,0422 | + 0,0185 | — 0,940 | + 0,412 | — 0,014 | + 0,006 |
| 9, — 8 | — 0,0002 | — 0,0007 | 0. | — 0,047 | 0. | — 0,001 |
| 10, — 8 | + 0,0003 | — 0,0001 | + 0,008 | — 0,003 | | |
| 11, — 8 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 | | |
| 2, — 9 | | | — 0,0002 | 0. | | |
| 3, — 9 | | | — 0,0004 | 0. | | |
| 4, — 9 | 0. | 0. | + 0,002 | — 0,001 | | |
| 5, — 9 | + 0,0001 | + 0,0006 | + 0,002 | + 0,017 | | |
| 6, — 9 | — 0,0028 | — 0,0013 | — 0,075 | — 0,036 | | |
| 7, — 9 | + 0,0092 | — 0,0053 | + 0,237 | — 0,136 | | |
| 8, — 9 | — 0,0020 | + 0,0211 | — 0,050 | + 0,529 | | |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}}$ | | $\frac{a^2 m'}{\text{sen } 1''}[D - f'\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$ | | $\frac{3}{4}\gamma_2 \frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}[D - f'\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 9, — 9 | — 0,0142 | — 0,0123 | — 0,356 | — 0,307 | | |
| 10, — 9 | + 0,0002 | — 0,0002 | + 0,019 | — 0,010 | | |
| 11, — 9 | + 0,0001 | 0. | + 0,003 | + 0,003 | | |
| 5, —10 | 0. | 0. | + 0,002 | + 0,001 | | |
| 6, —10 | — 0,0003 | + 0,0002 | — 0,010 | + 0,007 | | |
| 7, —10 | 0. | — 0,0018 | 0. | — 0,053 | | |
| 8, —10 | + 0,0045 | + 0,0031 | + 0,127 | + 0,087 | | |
| 9, —10 | — 0,0090 | + 0,0033 | — 0,251 | + 0,092 | | |
| 10, —10 | + 0,0020 | — 0,0075 | + 0,056 | — 0,207 | | |
| 11, —10 | + 0,0001 | 0. | + 0,008 | + 0,006 | | |
| 12, —10 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | + 0,002 | | |
| 6, —11 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 | | |
| 7, —11 | — 0,0002 | — 0,0001 | — 0,007 | — 0,005 | | |
| 8, —11 | + 0,0009 | — 0,0004 | + 0,029 | — 0,014 | | |
| 9, —11 | — 0,0004 | + 0,0027 | — 0,013 | + 0,083 | | |
| 10, —11 | — 0,0031 | — 0,0031 | — 0,094 | — 0,093 | | |
| 11, —11 | + 0,0032 | — 0,0006 | + 0,095 | — 0,018 | | |
| 12, —11 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | + 0,005 | | |
| 13, —11 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. | | |
| 7, —12 | | | + 0,001 | + 0,001 | | |
| 8, —12 | | | + 0,001 | — 0,006 | | |
| 9, —12 | | | + 0,015 | + 0,012 | | |
| 10 | | | — 0,043 | + 0,013 | | |
| 11 | | | + 0,021 | — 0,061 | | |
| 12 | | | + 0,026 | + 0,035 | | |
| 13 | | | — 0,002 | + 0,001 | | |
| 14 | | | 0. | — 0,001 | | |

Anche questi sviluppi sono stati controllati. Si sono presi i valori:

$$\varepsilon = 0 \ , \ \varepsilon' = 8^\circ$$

il che abbraccia tutti i coefficienti, tranne quelli dei seni dell' argomento $\mu\varepsilon$; ma questi son già controllati perchè non sono che i coefficienti dei seni degli sviluppi di $Y^{(2)}_{0,c}$. — Con ciò si ebbe:

| $\varepsilon=0\ ,\ \varepsilon'=8°$ | $\frac{m}{\operatorname{sen} 1''}[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{4}{2}}$ | $\frac{m'\alpha^2}{\operatorname{sen} 1''}[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{3}{2}}$ | $\frac{m'\alpha^2}{\operatorname{sen} 1''}\cdot\frac{3}{4}\gamma_2[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{5}{2}}$ |
|---|---|---|---|
| Calcolato direttamente . . . | 93,547 | 111,367 | 0,2318 |
| Mediante lo sviluppo. . . . . | 93,546 | 111,363 | 0,2297 |
| Differenza . . . | + 0,001 | + 0,004 | + 0,0021 |

Ora si hanno da sviluppare le funzioni $\left(\frac{a}{\Delta}\right), \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$. Ricordandone l'espressione e svolgendo in serie binomiale, otteniamo:

$$\frac{a}{\Delta}=[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}\gamma_2[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{3}{2}}\cos 2\varepsilon'$$

ed

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3=[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{3}{2}}-\tfrac{3}{4}\gamma_2[D-f\cos(\varepsilon'-F)]^{-\frac{5}{2}}\cos 2\varepsilon'$$

nelle quali si sono trascurate le potenze di $\gamma_2$ superiori alla prima perchè insensibili. — Coerentemente a questi sviluppi abbiamo ottenuti gli svolgimenti seguenti per $\left(\frac{a}{\Delta}\right)\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}$, $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\frac{\alpha^2 m'}{\operatorname{sen} 1''}$.

Tav. VII.

| $\varepsilon\ ,\ \varepsilon'$ | $\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | | $\frac{m'\alpha^2}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| 0, 1 | $\frac{1}{2}$180″,64550 | | $\frac{1}{2}$.275″,3348 | |
| 1, 0 | — 0,70549 | + 1″,02428 | — 9,9860 | +14″,0971 |
| 2, 0 | — 0,06460 | — 0,02765 | — 0,5037 | — 0,8418 |
| 3, 0 | + 0,0031 | — 0,0029 | + 0,067 | — 0,026 |
| 4, 0 | + 0,0001 | + 0,0001 | 0. | + 0,006 |
| — 3, — 1 | + 0,0005 | — 0,0002 | + 0,008 | — 0,005 |
| — 2, — 1 | — 0,0015 | + 0,0069 | + 0,032 | + 0,104 |
| — 1, — 1 | — 0,0732 | + 0,0215 | — 1,666 | + 0,240 |
| 0, — 1 | + 2,6040 | — 4,7283 | +14,315 | —25,919 |
| 1, — 1 | +17,2329 | +36,2605 | +71,786 | +151,016 |
| 2, — 1 | — 0,4080 | — 0,0528 | — 8,877 | — 1,459 |
| 3, — 1 | — 0,0078 | — 0,0418 | + 0,213 | — 0,533 |
| 4, — 1 | + 0,0022 | + 0,0007 | + 0,038 | + 0,027 |
| 5, — 1 | 0. | + 0,0001 | — 0,003 | + 0,002 |
| — 2, — 2 | + 0,0005 | + 0,0004 | + 0,011 | + 0,005 |
| — 1, — 2 | — 0,0035 | + 0,0047 | — 0,074 | + 0,145 |
| 0, — 2 | — 0,1951 | — 0,2060 | — 1,729 | — 2,287 |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| | $''$ | $''$ | $''$ | $''$ |
| 1, — 2 | + 3,4092 | + 0,2020 | +26,196 | + 1,563 |
| 2, — 2 | — 8,3085 | +10,2040 | —55,922 | +68,699 |
| 3, — 2 | — 0,0524 | — 0,1409 | — 1,294 | — 4,271 |
| 4, — 2 | + 0,0175 | — 0,0143 | + 0,323 | — 0,072 |
| 5, — 2 | + 0,0001 | + 0,0011 | — 0,002 | + 0,027 |
| 6, — 2 | 0. | 0. | — 0,002 | — 0,001 |
| — 1, — 3 | 0. | + 0,0006 | + 0,007 | + 0,015 |
| 0, — 3 | — 0,0159 | + 0,0047 | — 0,263 | + 0,042 |
| 1, — 3 | + 0,0115 | — 0,2424 | + 1,441 | — 2,735 |
| 2, — 3 | + 0,6874 | + 1,6975 | + 6,928 | +17,114 |
| 3, — 3 | — 4,6353 | — 1,1317 | —43,078 | —10,507 |
| 4, — 3 | + 0,0381 | — 0,0434 | + 1,570 | — 1,475 |
| 5, — 3 | + 0,0103 | + 0,0045 | + 0,130 | + 0,132 |
| 6, — 3 | — 0,0004 | + 0,0003 | — 0,014 | + 0,003 |
| 7, — 3 | 0. | 0. | 0. | — 0,001 |
| — 1, — 4 | 0. | 0. | + 0,001 | + 0,001 |
| 0, — 4 | — 0,0004 | + 0,0010 | — 0,011 | + 0,028 |
| 1, — 4 | — 0,0134 | — 0,0150 | — 0,193 | — 0,259 |
| 2, — 4 | + 0,1912 | + 0,0038 | + 2,617 | + 0,134 |
| 3, — 4 | — 0,6222 | + 0,6785 | — 7,802 | + 8,509 |
| 4, — 4 | — 0,3683 | — 1,7757 | — 4,376 | —21,063 |
| 5, — 4 | + 0,0225 | + 0,0050 | + 0,960 | + 0,353 |
| 6, — 4 | + 0,0003 | + 0,0055 | — 0,027 | + 0,098 |
| 7, — 4 | — 0,0003 | — 0,0001 | — 0,007 | — 0,005 |
| 0, — 5 | 0. | 0. | 0. | + 0,002 |
| 1, — 5 | — 0,0015 | + 0,0004 | — 0,031 | + 0,004 |
| 2, — 5 | + 0,0074 | — 0,0161 | + 0,147 | — 0,278 |
| 3, — 5 | + 0,0474 | + 0,1109 | + 0,724 | + 1,790 |
| 4, — 5 | — 0,4273 | — 0,1314 | — 6,420 | — 1,970 |
| 5, — 5 | + 0,5644 | — 0,4279 | + 8,150 | — 6,185 |
| 6, — 5 | + 0,0027 | + 0,0090 | + 0,054 | + 0,478 |
| 7, — 5 | — 0,0023 | + 0,0019 | — 0,053 | + 0,013 |
| 8, — 5 | 0. | — 0,0001 | + 0,001 | — 0,005 |
| 1, — 6 | — 0,0001 | 0. | — 0,002 | + 0,001 |
| 2, — 6 | — 0,0009 | — 0,0012 | — 0,019 | — 0,028 |
| 3, — 6 | + 0,0133 | + 0,0001 | + 0,263 | + 0,013 |
| 4, — 6 | — 0,0472 | + 0,0522 | — 0,884 | + 0,949 |
| 5, — 6 | — 0,0309 | — 0,2102 | — 0,542 | — 3,684 |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{J}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{J}\right)^3$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| 6, — 6 | + 0″,2501 | + 0″,1293 | + 4″,263 | + 2″,203 |
| 7, — 6 | — 0,0025 | + 0,0030 | — 0,187 | + 0,124 |
| 8, — 6 | — 0,0013 | — 0,0006 | — 0,019 | — 0,021 |
| 9, — 6 | 0. | 0. | + 0,002 | + 0,001 |
| 1, — 7 | — 0,00001 | + 0,00001 | + 0,0001 | + 0,0002 |
| 2, — 7 | — 0,00013 | + 0,00002 | — 0,0041 | + 0,0003 |
| 3, — 7 | + 0,00058 | — 0,000120 | + 0,0154 | — 0,0278 |
| 4, — 7 | + 0,0037 | + 0,0083 | + 0,074 | + 0,184 |
| 5, — 7 | — 0,0374 | — 0,0116 | — 0,776 | — 0,250 |
| 6, — 7 | + 0,0827 | — 0,0553 | + 1,657 | — 1,114 |
| 7, — 7 | — 0,0037 | + 0,1133 | — 0,071 | + 2,227 |
| 8, — 7 | — 0,0017 | — 0,0003 | — 0,091 | — 0,047 |
| 9, — 7 | 0. | — 0,0006 | + 0,002 | — 0,016 |
| 10, — 7 | 0. | 0. | + 0,001 | + 0,001 |
| 3, — 8 | 0. | — 0,0001 | — 0,002 | — 0,002 |
| 4, — 8 | + 0,0011 | + 0,0001 | + 0,026 | + 0,001 |
| 5, — 8 | — 0,0037 | + 0,0043 | — 0,096 | + 0,101 |
| 6, — 8 | — 0,0028 | — 0,0207 | — 0,062 | — 0,484 |
| 7, — 8 | + 0,0395 | + 0,0236 | + 0,894 | + 0,532 |
| 8, — 8 | — 0,0422 | + 0,0185 | — 0,940 | + 0,412 |
| 9, — 8 | — 0,0002 | — 0,0007 | 0. | — 0,047 |
| 10, — 8 | + 0,0003 | — 0,0001 | + 0,008 | — 0,003 |
| 11, — 8 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 |
| 4, — 9 | 0. | 0. | + 0,002 | — 0,002 |
| 5, — 9 | + 0,0003 | + 0,0007 | + 0,007 | + 0,019 |
| 6, — 9 | — 0,0033 | — 0,0010 | — 0,087 | — 0,028 |
| 7, — 9 | + 0,0092 | — 0,0053 | + 0,237 | — 0,151 |
| 8, — 9 | — 0,0020 | + 0,0211 | — 0,049 | + 0,529 |
| 9, — 9 | — 0,0142 | — 0,0123 | — 0,356 | — 0,307 |
| 10, — 9 | + 0,0002 | — 0,0002 | + 0,019 | — 0,010 |
| 11, — 9 | + 0,0001 | 0. | + 0,003 | + 0,003 |
| 5, —10 | 0. | 0. | + 0,003 | + 0,001 |
| 6, —10 | — 0,0003 | + 0,0002 | — 0,010 | + 0,011 |
| 7, —10 | 0. | — 0,0018 | — 0,007 | — 0,057 |
| 8, —10 | + 0,0045 | + 0,0031 | + 0,134 | + 0,084 |
| 9, —10 | — 0,0090 | + 0,0033 | — 0,251 | + 0,092 |
| 10, — 10 | + 0,0020 | — 0,0075 | + 0,056 | — 0,207 |
| 11, —10 | + 0,0001 | 0. | + 0,008 | + 0,006 |

| $\varepsilon$ , $\varepsilon'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| 12, —10 | $0.''$ | $+ 0.''0001$ | $- 0.''001$ | $+ 0.''002$ |
| 6, —11 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 |
| 7, —11 | — 0,0002 | — 0,0001 | — 0,007 | — 0,005 |
| 8, —11 | + 0,0009 | — 0,0004 | + 0,029 | — 0,014 |
| 9, —11 | — 0,0004 | + 0,0027 | — 0,013 | + 0,083 |
| 10, —11 | — 0,0031 | — 0,0031 | — 0,094 | — 0,093 |
| 11, —11 | + 0,0032 | — 0,0006 | + 0,095 | — 0,018 |
| 12, —11 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | + 0,005 |
| 13, —11 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. |
| 7, —12 | | | + 0,001 | + 0,001 |
| 8, —12 | | | + 0,001 | — 0,006 |
| 9, —12 | | | + 0,015 | + 0,012 |
| 10, —12 | | | — 0,043 | + 0,013 |
| 11, —12 | | | + 0,021 | — 0,061 |
| 12, —12 | | | + 0,026 | + 0,035 |
| 13, —12 | | | — 0,002 | + 0,001 |
| 14, —12 | | | 0. | — 0,001 |

Queste funzioni sono state controllate in due modi, cioè prima per $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 8°$, poi per $\varepsilon = 45°$, $\varepsilon' = 0$, i quali controlli si completano l'un l'altro. I valori trovati sono stati i seguenti:

| | | $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 8°$ | $\varepsilon = 45°$ , $\varepsilon' = 0$ |
|---|---|---|---|
| Valore di $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | Calcolato direttamente: | $93.''4845$ | $148.''9196$ |
| | Mediante lo sviluppo: | 93,4828 | 148,9186 |
| | Differenza: | + 0,0017 | + 0,0010 |
| Valore di $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ | Calcolato direttamente: | 111,145 | 449,291 |
| | Mediante lo sviluppo: | 111,140 | 449,314 |
| | Differenza: | + 0,005 | — 0,023 |

La funzione $\frac{a}{\Delta}$ è più esatta perchè deve crescere, mentre $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ dev'essere diminuita.

## Trasformazione dell'anomalia eccentrica in media.

Le serie precedenti si riconducono alla forma:

$$F = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{i'=-\infty}^{i'=+\infty} \Big[ (i, i', c) \cos (i\varepsilon - i'\varepsilon') + (i, i', s) \operatorname{sen} (i\varepsilon - i'\varepsilon') \Big].$$

Se poniamo: $\qquad y = e^{i\varepsilon}\,,\ y' = e^{i\varepsilon'}\,,\ z' = e^{ig'}$

si può scrivere:

$$F = \sum\sum \left[ (i, i', c) \left( \frac{1}{2} y^i y_{,}^{-i'} + \frac{1}{2} y^{-i} y_{,}^{i'} \right) + (i, i's) \left( \frac{1}{2i} y^i y_{,}^{-i'} - \frac{1}{2i} y^{-i} y_{,}^{+i'} \right) \right].$$

Si ha poi

$$y_{,}^{i'} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}_k^{(i')} z_{,}^k$$

e allora la precedente diviene:

$$F = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_i \sum_{0}^{\infty} {}_{i'} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_k \left[ y^i \left\{ \frac{1}{2}(i, i', c) + \frac{1}{2i}(i, i', s) \right\} \mathrm{P}_k^{(-i')} + y^{-i} \left\{ \frac{1}{2}(i, i', c) - \frac{1}{2i}(i, i', s) \right\} \mathrm{P}_k^{(i)} \right] z_{,}^k.$$

Ora si ha:

$$\mathrm{P}_k^{(i')} = \frac{i'}{k} \mathrm{I}_{k\lambda'}^{(k-i')} \ ; \quad \mathrm{P}_k^{(0)} = 0 \ ; \quad \mathrm{P}_0^{(0)} = 1 \ ; \quad \mathrm{P}_0^{(i')} = 0 \ ; \quad \mathrm{P}_0^{(1)} = \mathrm{P}_0^{(-1)} = -\lambda'$$

e si sa che:

$$\mathrm{I}_l^{(-m)} = (-1)^m \mathrm{I}_l^{(m)} \ ; \quad \mathrm{I}_{-l}^{(m)} = (-1)^m \mathrm{I}_l^{(m)} \ ; \quad \mathrm{I}_{-l}^{(-m)} = \mathrm{I}_l^{(m)}.$$

Da queste si deduce che in tutti i casi:

$$\mathrm{P}_{-k}^{(i')} = \mathrm{P}_k^{(-i')} \qquad \mathrm{P}_{-k}^{(-i')} = \mathrm{P}_k^{(i')}$$

e allora la precedente si riduce a:

$$F = \sum_{0}^{\infty} {}_i \sum_{-\infty}^{\infty} {}_{i'} \Big[ ((i, i', c)) \cos (i\varepsilon - i'g') + ((i, i', s)) \operatorname{sen} (i\varepsilon - i'g') \Big]$$

ove abbiamo, tanto per $i'$ positivo quanto negativo o nullo e tenendo $i$ positivo:

$$\left.\begin{aligned} ((i, i', c)) = (i, i', c)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i')} + (i, i'+1, c)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'-1)} + (i, i'+2, c)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'-2)} + \ldots. \\ + (i, i'-1, c)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'+1)} + (i, i'-2, c)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'+2)} + \ldots. \end{aligned}\right\} (a)$$

$$\begin{aligned} ((i, i', s)) = (i, i', s)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i')} + (i, i'+1, s)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'-1)} + (i, i'+2, s)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'-2)} + \ldots. \\ + (i, i'-1, s)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'+1)} + (i, i'-2, s)\, \mathrm{P}_{-i'}^{(-i'+2)} + \ldots. \end{aligned}$$

e questa formula vale sempre (non escluso il caso di $i = 0$), convenendo che quando nel secondo membro si presenti qualche quantità della forma $(i, -i', c)$ si adoperino le relazioni:

$$(i, -i', c) = (-i, i', c) \qquad (i, -i', s) = -(-i, i', s)$$

e pel 1° membro, le altre:

$$((i, -i', c)) = ((-i, i', c)) \qquad ((i, -i', s)) = -((-i, i', s)) .$$

Si è prima di tutto, calcolata la tavola seguente:

$$\log \lambda' = \bar{2},38274$$

Tav. VIII.

| $i$ | $I^{(0)}_{i\lambda'}$ | $\frac{1}{i} I^{(1)}_{i\lambda'}$ | $\frac{1}{i} I^{(2)}_{i\lambda'}$ | $\frac{1}{i} I^{(3)}_{i\lambda'}$ | $\frac{1}{i} I^{(4)}_{i\lambda'}$ | $\frac{1}{i} I^{(5)}_{i\lambda'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\bar{1},999747$ | $\bar{2},382610$ | $\bar{4},46435$ | $\bar{6},37001$ | | |
| 2 | $\bar{1},99899$ | $\bar{2},38224$ | $\bar{4},76515$ | $\bar{6},97188$ | $\bar{7},05359$ | |
| 3 | $\bar{1},99771$ | $\bar{2},38159$ | $\bar{4},94079$ | $\bar{5},32372$ | $\bar{7},58152$ | |
| 4 | $\bar{1},99593$ | $\bar{2},38070$ | $\bar{3},06515$ | $\bar{5},57316$ | $\bar{7},95610$ | |
| 5 | $\bar{1},99365$ | $\bar{2},37954$ | $\bar{3},16127$ | $\bar{5},76638$ | $\bar{6},24603$ | $\bar{8},62877$ |
| 6 | $\bar{1},99084$ | $\bar{2},37818$ | $\bar{3},23956$ | $\bar{5},92409$ | $\bar{6},48337$ | $\bar{8},94529$ |
| 7 | $\bar{1},98751$ | $\bar{2},37653$ | $\bar{3},30539$ | $\bar{4},05715$ | $\bar{6},68356$ | $\bar{7},21243$ |
| 8 | $\bar{1},98365$ | $\bar{2},37462$ | $\bar{3},36212$ | $\bar{4},17218$ | $\bar{6},85678$ | $\bar{7},44364$ |
| 9 | $\bar{1},97926$ | $\bar{2},37246$ | $\bar{3},41185$ | $\bar{4},27342$ | $\bar{5},00936$ | $\bar{7},64737$ |
| 10 | $\bar{1},97432$ | $\bar{2},37003$ | $\bar{3},45599$ | $\bar{4},36373$ | $\bar{5},14567$ | $\bar{7},82944$ |
| 11 | $\bar{1},96882$ | $\bar{2},36734$ | $\bar{3},49560$ | $\bar{4},44518$ | $\bar{5},26877$ | $\bar{7},99493$ |
| 12 | $\bar{1},96277$ | $\bar{2},36429$ | $\bar{3},53134$ | $\bar{4},51922$ | $\bar{5},38092$ | $\bar{6},1439$ |

Questi valori sono stati calcolati in catena come le $\beta^{(3)}$: per dar loro un primo controllo, ho calcolato direttamente la $I^{(5)}$ per serie e l'ho paragonata con quella della tavola precedente.

La serie adoperata è:

$$I^{(5)}_{i\lambda'} = (i\lambda')^5 \omega \left[1 - A_1 (i\lambda')^2 + A_2 (i\lambda')^4 - \dots .\right]$$

ove:

$$\log \omega = \bar{3},92082 \; ; \quad \log A_1 = \bar{1},22185 \; ; \quad \log A_2 = \bar{2},07572$$

e col mezzo di questa si è trovato che i valori logaritmici della $I^{(5)}$ differivano al più di una o due unità della 4ª decimale, il che è qui da ritenersi più che soddisfacente.

Coi valori precedenti si compose la tavola seguente delle $P^{(i)}_k$.

*Tavola dei valori della* $P_k^{(i)}$.

Tav. IX.

| $i$ | $\log P_{+2}^{(i)}$ | $\log P_{+1}^{(i)}$ | $\log P_0^{(i)}$ | $\log P_{-1}^{(i)}$ | $\log P_{-2}^{(i)}$ | $\log P_{-3}^{(i)}$ | $\log P_{-4}^{(i)}$ | $\log P_{-5}^{(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 1 | $\bar{6}$,9719n | $\bar{4}$,4643n | $\bar{2}$,38274n | $\bar{1}$,99974 | $\bar{2}$,38224 | $\bar{4}$,94079 | $\bar{5}$,57416 | $\bar{6}$,2460 |
| — 2 | | $\bar{6}$,6710n | $-\infty$ | $\bar{2}$,68363n | $\bar{1}$,99899 | $\bar{2}$,68262 | $\bar{3}$,36718 | $\bar{4}$,06741 |
| — 3 | | | | $\bar{4}$,94147 | $\bar{2}$,85936n | $\bar{1}$,99771 | $\bar{2}$,85782 | $\bar{3}$,63839 |
| — 4 | | | | $\bar{6}$,9721n | $\bar{3}$,36721 | $\bar{2}$,98365n | $\bar{1}$,99593 | $\bar{2}$,98160 |
| — 5 | | | | | $\bar{5}$,6708n | $\bar{3}$,63976 | $\bar{1}$,07967n | $\bar{1}$,99365 |
| — 6 | | | | | | $\bar{4}$,10187n | $\bar{3}$,84330 | $\bar{1}$,15769n |
| — 7 | | | | | | | $\bar{4}$,41826n | $\bar{2}$,00637 |
| — 8 | | | | | | | | $\bar{4}$,66947n |
| — 9 | | | | | | | | $\bar{5}$,20027 |

| $i$ | $\log P_{-6}^{(i)}$ | $\log P_{-7}^{(i)}$ | $\log P_{-8}^{(i)}$ | $\log P_{-9}^{(i)}$ | $\log P_{-10}^{(i)}$ | $\log P_{-11}^{(i)}$ | $\log P_{-12}^{(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 2 | $\bar{6}$,7844 | | | | | | |
| — 3 | $\bar{4}$,40121 | $\bar{5}$,16068 | | | | | |
| — 4 | $\bar{3}$,84162 | $\bar{4}$ 65921 | $\bar{5}$,45884 | | | | |
| — 5 | $\bar{1}$,07715 | $\bar{2}$,00436 | $\bar{4}$,87115 | $\bar{5}$,70833 | $\bar{6}$,52841 | | |
| — 6 | $\bar{1}$,99084 | $\bar{1}$,15468 | $\bar{2}$,14027 | $\bar{3}$,05157 | $\bar{5}$,92382 | $\bar{6}$,77208 | |
| — 7 | $\bar{1}$,22328n | $\bar{1}$,98751 | $\bar{1}$,21972 | $\bar{2}$,25695 | $\bar{3}$,20883 | $\bar{4}$,11387 | $\bar{6}$,989 |
| — 8 | $\bar{2}$,14265 | $\bar{1}$,27962n | $\bar{1}$,98363 | $\bar{1}$,27555 | $\bar{2}$,35908 | $\bar{3}$,34827 | $\bar{4}$,2840 |
| — 9 | $\bar{4}$,87833n | $\bar{2}$,25945 | $\bar{1}$,32886n | $\bar{1}$,97926 | $\bar{1}$,32427 | $\bar{2}$,44984 | $\bar{3}$,47346 |
| —10 | $\bar{5}$,48337 | $\bar{3}$,05697n | $\bar{2}$,36212 | $\bar{1}$,37246n | $\bar{1}$,97432 | $\bar{1}$,36734 | $\bar{2}$,53134 |
| —11 | | $\bar{5}$,72477 | $\bar{3}$,21357n | $\bar{2}$,45324 | $\bar{1}$,41142n | $\bar{1}$,96882 | $\bar{1}$,40569 |
| —12 | | | $\bar{5}$,936 | $\bar{3}$,3526n | $\bar{2}$,53518 | $\bar{1}$,44652n | $\bar{1}$,96277 |

I valori delle P furono controllati col mezzo dello sviluppo:

$$\cos i\varepsilon' = P_0^{(i)} + \left[P_1^{(i)} + P_{-1}^{(i)}\right]\cos ig' + \left[P_2^{(i)} + P_{-2}^{(i)}\right]\cos 2ig' + \ldots.$$

la quale per $\varepsilon' = g' = 0$, si riduce a:

$$1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k^{(i)}.$$

Questo controllo è ritornato esatto sino ad *una* o *due* unità della quinta decimale sino alla linea ottava del quadro precedente, poichè per le altre tre linee non si considerano dei termini anche considerevoli perchè non si adoperano in seguito; ed affinchè il controllo tornasse, tali termini sarebbero necessarî.

Adoperando le formule precedenti, si ottiene la tavola:

Tav. X.

| $\varepsilon$ , $\eta'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $\frac{1}{2}$ 180″,51978 | | $\frac{1}{2}$ 274″,6437 | |
| 1, 0 | — 1,11972 | + 0″,14947 | —11,6787 | +10″,4574 |
| 2, 0 | — 0,05471 | — 0,02621 | — 0,2902 | — 0,8041 |
| 3, 0 | + 0,0033 | — 0,0019 | + 0,062 | — 0,013 |
| 4, 0 | + 0,0001 | + 0,0001 | 0. | + 0,006 |
| — 3, — 1 | + 0,0005 | — 0,0002 | + 0,008 | — 0,005 |
| — 2, — 1 | — 0,0016 | + 0,0069 | + 0,035 | + 0,104 |
| — 1, — 1 | — 0,0780 | + 0,0319 | — 1,683 | + 0,277 |
| 0, — 1 | + 2,6111 | — 4,7169 | +14,385 | —25,801 |
| 1, — 1 | +17,0584 | +36,2286 | +70,479 | +150,847 |
| 2, — 1 | — 0,0062 | — 0,5438 | — 6,167 | — 4,759 |
| 3, — 1 | — 0,0093 | — 0,0359 | + 0,238 | — 0,336 |
| 4, — 1 | + 0,0014 | + 0,0014 | + 0,024 | + 0,029 |
| 5, — 1 | 0. | + 0,0001 | — 0,003 | + 0,001 |
| — 2, — 2 | + 0,0005 | + 0,0005 | + 0,012 | + 0,007 |
| — 1, — 2 | — 0,0055 | + 0,0055 | — 0,114 | + 0,151 |
| 0, — 2 | — 0,1307 | — 0,3198 | — 1,361 | — 2,910 |
| 1, — 2 | + 3,8087 | + 1,0933 | +27,762 | + 5,398 |
| 2, — 2 | — 8,3483 | +10,0562 | —56,500 | + 67,267 |
| 3, — 2 | + 0,2814 | — 0,0581 | + 1,812 | — 3,494 |
| 4, — 2 | + 0,0139 | — 0,0153 | + 0,199 | — 0,014 |
| 5, — 2 | — 0,0006 | + 0,0008 | — 0,009 | + 0,019 |
| 6, — 2 | | | — 0,003 | — 0,001 |
| — 1, — 3 | + 0,0002 | + 0,0008 | + 0,003 | + 0,022 |
| 0, — 3 | — 0,0229 | — 0,0094 | — 0,333 | — 0,091 |
| 1, — 3 | + 0,2914 | — 0,1984 | + 2,775 | — 2,489 |
| 2, — 3 | + 0,2650 | + 2,1794 | + 3,941 | +20,317 |
| 3, — 3 | — 4,5533 | — 1,1973 | —42,159 | —11,469 |
| 4, — 3 | + 0,0723 | + 0,1265 | + 1,971 | + 0,549 |
| 5, — 3 | + 0,0104 | + 0,0021 | + 0,072 | + 0,070 |
| 6, — 3 | — 0,0004 | — 0,0002 | — 0,011 | — 0,004 |
| 7, — 3 | 0. | 0. | + 0,001 | — 0,001 |
| — 1, — 4 | | | + 0,001 | + 0,002 |
| 0, — 4 | — 0,0018 | + 0,0005 | — 0,033 | + 0,025 |
| 1, — 4 | + 0,0034 | — 0,0305 | — 0,019 | — 0,445 |
| 2, — 4 | + 0,2187 | + 0,1517 | + 2,945 | + 1,559 |

| $\varepsilon$ , $g'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{J}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{J}\right)^2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| | $''$ | $''$ | $''$ | $''$ |
| 3, — 4 | — 0,9562 | + 0,5770 | —10,922 | + 7,449 |
| 4, — 4 | — 0,3112 | — 1,7461 | — 3,456 | —20,729 |
| 5, — 4 | — 0,0446 | + 0,0551 | — 0,023 | + 1,076 |
| 6, — 4 | + 0,0017 | + 0,0052 | — 0,004 | + 0,055 |
| 7, — 4 | 0. | — 0,0003 | — 0,002 | — 0,005 |
| 0, — 5 | | | — 0,002 | + 0,004 |
| 1, — 5 | — 0,0019 | — 0,0020 | — 0,039 | — 0,033 |
| 2, — 5 | + 0,0278 | — 0,0067 | + 0,423 | — 0,175 |
| 3, — 5 | — 0,0350 | + 0,1694 | — 0,260 | + 2,532 |
| 4, — 5 | — 0,4494 | — 0,3073 | — 6,611 | — 4,100 |
| 5, — 5 | + 0,5623 | — 0,3911 | + 8,194 | — 5,536 |
| 6, — 5 | — 0,0325 | — 0,0097 | — 0,546 | + 0,152 |
| 7, — 5 | — 0,0019 | + 0,0026 | — 0,026 | + 0,018 |
| 8, — 5 | + 0,0002 | 0. | + 0,003 | — 0,002 |
| 1, — 6 | 0. | 0. | — 0,007 | — 0,002 |
| 2, — 6 | + 0,0015 | — 0,0027 | + 0,018 | — 0,055 |
| 3, — 6 | + 0,0131 | + 0,0179 | + 0,275 | + 0,287 |
| 4, — 6 | — 0,1004 | + 0,0217 | — 1,674 | + 0,517 |
| 5, — 6 | + 0,0435 | — 0,2549 | + 0,578 | — 4,301 |
| 6, — 6 | + 0,2314 | + 0,1366 | + 3,902 | + 2,394 |
| 7, — 6 | — 0,0016 | — 0,0155 | — 0,165 | — 0,243 |
| 8, — 6 | — 0,0016 | — 0,0004 | — 0,017 | — 0,007 |
| 9, — 6 | 0. | 0. | + 0,002 | + 0,003 |
| 1, — 7 | — 0,00003 | + 0,00001 | — 0,0006 | + 0,0002 |
| 2, — 7 | — 0,00010 | — 0,00031 | — 0,0040 | — 0,0062 |
| 3, — 7 | + 0,00259 | + 0,00025 | + 0,0556 | — 0,0033 |
| 4, — 7 | — 0,0077 | + 0,0134 | — 0,126 | + 0,285 |
| 5, — 7 | — 0,0343 | — 0,0464 | — 0,731 | — 0,850 |
| 6, — 7 | + 0,1165 | — 0,0312 | + 2,230 | — 0,671 |
| 7, — 7 | — 0,0112 | + 0,1059 | — 0,262 | + 2,078 |
| 8, — 7 | + 0,0062 | — 0,0035 | + 0,087 | — 0,118 |
| 9, — 7 | — 0,0003 | — 0,0007 | — 0,004 | — 0,011 |
| 10, — 7 | | | + 0,002 | + 0,001 |
| 3, — 8 | + 0,0003 | — 0,0003 | + 0,004 | — 0,005 |
| 4, — 8 | + 0,0008 | + 0,0021 | + 0,020 | + 0,043 |
| 5, — 8 | — 0,0099 | — 0,0011 | — 0,222 | — 0,003 |
| 6, — 8 | + 0,0151 | — 0,0271 | + 0,293 | — 0,615 |
| 7, — 8 | + 0,0354 | + 0,0426 | + 0,794 | + 0,914 |

| $i \cdot i'$ | $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{A}\right)$ | | $\frac{m' a^2}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{A}\right)^3$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | - sen |
| | $''$ | $''$ | $''$ | $''$ |
| 8, — 8 | — 0,0404 | + 0,0133 | — 0,907 | + 0,278 |
| 9, — 8 | + 0,0026 | + 0,0019 | + 0,070 | + 0,019 |
| 10, — 8 | + 0,0003 | — 0,0002 | + 0,005 | — 0,006 |
| 11, — 8 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. |
| 4, — 9 | + 0,0002 | 0. | + 0,007 | + 0,002 |
| 5, — 9 | — 0,0011 | + 0,0011 | — 0,026 | + 0,029 |
| 6, — 9 | — 0,0018 | — 0,0057 | — 0,058 | — 0,138 |
| 7, — 9 | + 0,0158 | + 0,0018 | + 0,395 | + 0,009 |
| 8, — 9 | — 0,0108 | + 0,0229 | — 0,256 | + 0,561 |
| 9, — 9 | — 0,0114 | — 0,0126 | — 0,280 | — 0,321 |
| 10, — 9 | — 0,0003 | + 0,0015 | + 0,003 | + 0,037 |
| 11, — 9 | + 0,0001 | 0. | + 0,004 | + 0,001 |
| 5, —10 | 0. | + 0,0002 | + 0,001 | + 0,007 |
| 6, —10 | — 0,0010 | — 0,0005 | — 0,025 | — 0,009 |
| 7, —10 | + 0,0028 | — 0,0023 | + 0,066 | — 0,069 |
| 8, —10 | + 0,0029 | + 0,0078 | + 0,088 | + 0,203 |
| 9, —10 | — 0,0115 | + 0,0005 | — 0,309 | 0. |
| 10, —10 | + 0,0019 | — 0,0071 | + 0,081 | — 0,173 |
| 11, —10 | + 0,0001 | 0. | — 0,018 | + 0,010 |
| 12, —10 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | + 0,001 |
| 6, —11 | — 0,0001 | 0. | — 0,004 | + 0,001 |
| 7, —11 | + 0,0002 | — 0,0006 | + 0,002 | — 0,021 |
| 8, —11 | + 0,0018 | + 0,0009 | + 0,055 | + 0,022 |
| 9, —11 | — 0,0029 | + 0,0030 | — 0,080 | + 0,089 |
| 10, —11 | — 0,0024 | — 0,0046 | — 0,074 | — 0,134 |
| 11, —11 | + 0,0030 | — 0,0006 | + 0,090 | — 0,016 |
| 12, —11 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | + 0,005 |
| 13, —11 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. |
| 7, —12 | | | — 0,001 | — 0,002 |
| 8 | | | + 0,013 | — 0,005 |
| 9 | | | + 0,002 | + 0,034 |
| 10 | | | — 0,061 | — 0,019 |
| 11 | | | + 0,043 | — 0,060 |
| 12 | | | + 0,024 | + 0,033 |
| 13 | | | — 0,002 | + 0,001 |

Queste funzioni sono state controllate in questo modo. Nella formula di trasformazione ($a$) si dia ad $i'$ un valore fisso, e ad $i$ tutti i valori che questa prende realmente in relazione al valore scelto di $i'$.

Si sommino poi tutte le equazioni risultanti: si avrà:

$$\Sigma_i((i,i',{}^c_s)) = P_{-i'}^{(-i')}\,\Sigma_i(i,i',{}^c_s) + P_{-i'}^{(-i'-1)}\,\Sigma_i(i,i'+1,{}^c_s) + P_{-i'}^{(-i'-2)}\,\Sigma_i(i,i'+2,{}^c_s) + \ldots.$$

$$+ P_{-i'}^{(-i'+1)}\,\Sigma_i(i,i'-1,{}^c_s) + P_{-i'}^{(-i'+2)}\,\Sigma_i(i,i'-2,{}^c_s) + \ldots.$$

Questa serve di formula di controllo: le $\Sigma$ del 2$^{do}$ membro son già calcolate avanti pel controllo di $\frac{a}{\Delta}$, ed $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$: il 1$^{mo}$ membro si ottiene sommando ogni sezione delle funzioni precedenti. Il controllo si ottiene rapidamente e con sicurezza: il 1$^{mo}$ membro della precedente si dirà *calcolo diretto* del valore di $\Sigma_i((i,i'\,{}^c_s))$: il 2$^{do}$ si dirà *sviluppo* della detta quantità.

*Controllo della funzione* $\frac{m'}{\text{sen } 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$.

| | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | +89″,0890 | + 0″,1215 | +19″,5763 | +30″,9721 | — 4″,3806 | +10″,7631 |
| Mediante lo sviluppo: | +89,0889 | + 0,1214 | +19,5764 | +30,9720 | — 4,3805 | +10,7630 |
| Differenza | + 0,0001 | + 0,0001 | — 0,0001 | + 0,0001 | — 0,0001 | + 0,0001 |

| | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 3″,9377 | + 0″,9035 | — 1″,0900 | — 0″,9874 | + 0″,0696 | — 0″,5448 |
| Mediante lo sviluppo: | — 3,9376 | + 0,9036 | — 1,0903 | — 0,9870 | + 0,0695 | + 0,5449 |
| Differenza | — 0,0001 | — 0,0001 | + 0,0003 | — 0,0004 | + 0,0001 | + 0,0001 |

| | $i'=6$ | | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,1859 | — 0″,0973 | + 0″,0717 | + 0″,0374 | + 0″,0042 | + 0″,0312 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,1857 | — 0,0970 | + 0,0714 | + 0,0374 | + 0,0042 | + 0,0314 |
| Differenza | + 0,0002 | — 0,0003 | + 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | — 0,0002 |

| | $i'=9$ | | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0″,0093 | 0″,0090 | — 0″,0048 | — 0″,0014 | — 0″,0005 | — 0″,0020 |
| Mediante lo svilnppo: | — 0,0091 | 0,0090 | — 0,0047 | — 0,0019 | — 0,0004 | — 0,0018 |
| Differenza | — 0,0002 | 0,0000 | — 0,0001 | + 0,0005 | — 0,0001 | — 0,0002 |

*Controllo della funzione* $\frac{m'a^2}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$

| | $i=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 9″,647 | 125″,415 | +77″,316 | +120″,357 | −28″,202 | +66″,423 |
| Mediante lo sviluppo: | + 9,646 | 125,415 | +77,317 | +120,359 | −28,203 | +66,421 |
| Differenza | + 0,001 | 0,000 | − 0,001 | − 0,002 | + 0,001 | + 0,002 |

| | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | −33″,740 | + 6″,904 | −11″,513 | −11″,013 | + 1″,136 | − 7″,140 |
| Mediante lo sviluppo: | −33,740 | + 6,902 | −11,516 | −11,015 | + 1,135 | − 7,142 |
| Differenza | 0,000 | + 0,002 | + 0,003 | + 0,002 | + 0,001 | + 0,002 |

| | $i'=6$ | | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 2″,912 | − 1″,407 | + 1″,248 | + 0″,705 | + 0″,056 | + 0″,625 |
| Mediante lo sviluppo: | + 2,916 | − 1,404 | + 1,247 | + 0,705 | + 0,058 | + 0,628 |
| Differenza | − 0,004 | − 0,003 | + 0,001 | 0,000 | − 0,002 | − 0,003 |

| | $i'=9$ | | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | − 0″,211 | + 0″,180 | − 0″,117 | − 0″,030 | − 0″,013 | − 0″,054 |
| Mediante lo sviluppo: | − 0,211 | + 0,178 | − 0,116 | − 0,030 | − 0,014 | − 0,052 |
| Differenza | 0,000 | + 0,002 | − 0,001 | 0,000 | + 0,001 | − 0,002 |

| | $i'=12$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,017 | − 0″,018 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,018 | − 0,018 |
| Differenza | − 0,001 | 0,000 |

## Formazione dei fattori che moltiplicano le funzioni $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$, $\left(\frac{a}{\Delta}\right)'$ nelle espressioni di $\Omega$ e derivate.

Calcolammo prima di tutto secondo le formule date nel Möller la quantità $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ ed $\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$. Si trovò:

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (\bar{1},281254) + 2\,(\bar{2},359962\text{n})\cos\varepsilon + 2\,(\bar{4},8388)\cos 2\varepsilon$$

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = 1 + (\bar{3},5436) + 2\,(\bar{2},683640\text{n})\cos g' + 2\,(\bar{4},7651\text{n})\cos 2g' + 2\,(\bar{5},148\text{n})\cos 3g'.$$

Queste quantità furono controllate per $\varepsilon = g' = 180°$. Inoltre avendosi

$$\log c_1 = \bar{2},602215\text{n} \quad ; \quad \log c_2 = \bar{2},31780$$

si calcolarono i coefficienti della seguente:

$$-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen} J\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen}(f' + \Pi') = (\bar{3},17766) + 2\,(\bar{2},016390\text{n})\cos(-g') +$$
$$+ 2\,(\bar{4},3988\text{n})\cos(-2g') + 2\,(\bar{6},96\text{n})\cos(-3g') + 2\,(\bar{2},301058\text{n})\operatorname{sen}(-g') +$$
$$+ 2\,(\bar{4},6836\text{n})\operatorname{sen}(-2g') + 2\,(\bar{5},242\text{n})\operatorname{sen}(-3g').$$

Anche questi sono stati controllati. — Di qui si dedusse come fattore di $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ in $\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)$:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] = (\bar{1},6087388) + 2(\bar{2},382610\text{n})\cos(-g') + 2(\bar{4},4641\text{n})\cos(-2g') +$$
$$+ 2\,(\bar{6},85\text{n})\cos(-3g') + 2\,(\bar{2},058932)\cos\varepsilon + 2\,(\bar{4},5378\text{n})\cos 2\varepsilon$$

e col mezzo dei valori di $I_{i\lambda}^{(p)}$ si ebbe anche:

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' = (\bar{1},9996203)\cos(-g') + (\bar{2},984113)\cos(-2g') +$$
$$+ (\bar{3},8950)\cos(-3g') + (\bar{4}.777)\cos(-4g') + (\bar{5},644)\cos(-5g')$$
$$\left(\frac{a'}{r'}\right)\frac{\operatorname{sen} f'}{\cos\varphi'} = (\bar{1},9998731\text{n})\operatorname{sen}(-g') + (\bar{2},984437\text{n})\operatorname{sen}(-2g') +$$
$$+ (\bar{3},8950\text{n})\operatorname{sen}(-3g') + (\bar{4},777\text{n})\operatorname{sen}(-4g') + (\bar{5},644\text{n})\operatorname{sen}(-5g').$$

Le costanti di (H) sono le seguenti: (Hansen l. c. pag. 177).

$\log h = 1,2023621$ ; $\log l = 1,5247709\text{n}$ ; $\log b = 0,5353801\text{n}$ ; $\log(-eh) = 0,2842249\text{n}$
$\log h' = 1,2013506$ ; $\log l' = 1,5251928\text{n}$ ; $\log b' = 0,2509649$ ; $\log(-el') = 0,6070556\text{n}$.

Ecco i controlli di queste funzioni per $\varepsilon' = 90°$, $\varepsilon = 8°$.

| | $-\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen} J\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen}(f'+\Pi')$ | $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$ | $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f'$ | $\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\operatorname{sen} f'}{\cos\varphi'}$ |
|---|---|---|---|---|
| Calcolato direttamente: | + 0″,041018 | + 0″,426470 | − 0″,048278 | + 1″,000000 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,041015 | + 0,426473 | − 0,048281 | + 1.000002 |
| Differenza: | + 0,000003 | − 0,000003 | + 0,000003 | − 0,000002 |

Si osservi per comodo del seguito, che per $\varepsilon' = 90^\circ$, si ha:

$$\frac{r'}{a'} = 1\,; \qquad f' = 92^\circ, 46', 2'' \qquad g' = 87^\circ, 14', 2''.$$

Colla moltiplicazione meccanica si ottenne lo sviluppo di (H), (J):

Tav. XI.

| $\varepsilon$ , $g'$ | (H) | | (J) | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| — 1, — 1 | + 0,0138 | + 0,0260 | | |
| 0, — 1 | — 1,9224 | — 4,0451 | + 1,7807 | + 3,4297 |
| 1, — 1 | +15,9075 | +33,4756 | | |
| — 1, — 2 | + 0,0012 | + 0,0028 | | |
| 0, — 2 | — 0,1855 | — 0,3904 | + 0,1718 | + 0,3310 |
| 1, — 2 | + 1,5351 | + 3,2304 | | |
| — 1, — 3 | + 0,0001 | + 0,0001 | | |
| 0, — 3 | — 0,0151 | — 0,0318 | + 0,0140 | + 0,0269 |
| 1, — 3 | + 0,1250 | + 0,2630 | | |
| 0, — 4 | — 0,0011 | — 0,0024 | + 0,0011 | + 0,0020 |
| 1, — 4 | + 0,0095 | + 0,0200 | | |
| 0, — 5 | — 0,0001 | — 0,0002 | + 0,0001 | + 0,0001 |
| 1, — 5 | + 0,0007 | + 0,0015 | | |

Le due funzioni precedenti furono scrupolosamente controllate pei soliti valori di $\varepsilon = 8^\circ$, $\varepsilon' = 90^\circ$ e si ottenne:

| | (H) | (J) |
|---|---|---|
| Calcolato direttamente: | — 27,8203 | — 3,5167 |
| Mediante lo sviluppo: | — 27,8205 | — 3,5166 |
| Differenza | + 0,0002 | — 0,0001 |

Per il calcolo di 1ª approssimazione occorrono gli sviluppi seguenti:

$$\left.\begin{aligned} a\Omega &= \frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (\mathrm{H}) \\ ar\frac{d\Omega}{dr} &= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2 m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (\mathrm{H}) \\ a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0 &= -\frac{\alpha^2 m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \cdot \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen} \mathrm{J}\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen}(f' + \Pi') + (\mathrm{J})\,. \end{aligned}\right\} (h)$$

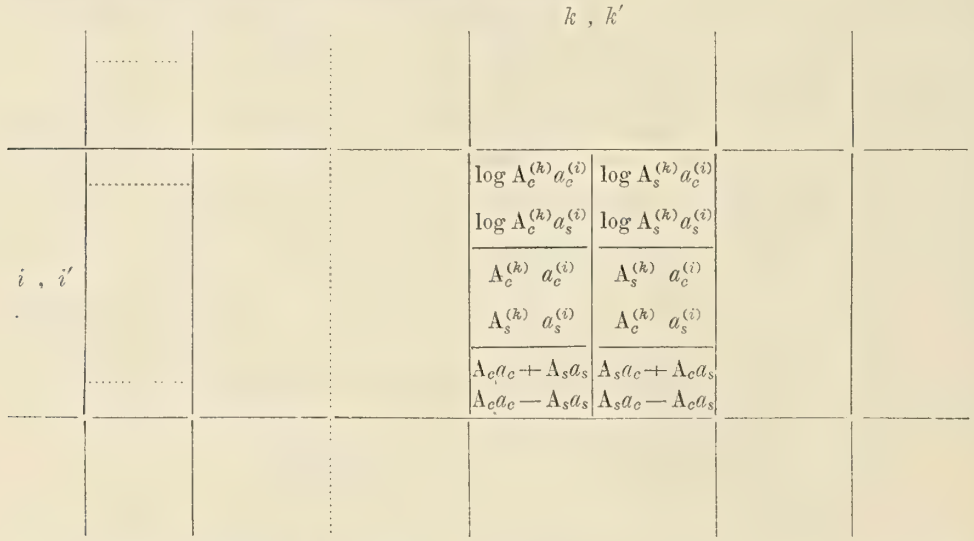
Le moltiplicazioni si fanno meccanicamente come segue. — Sieno:

$$F=\Sigma A_c^{(k)}\cos(k\varepsilon-k'g')+\Sigma A_s^{(k)}\operatorname{sen}(k\varepsilon-k'g')\,;\quad F'=\Sigma a_c^{(i)}\cos(i\varepsilon-i'g')+\Sigma a_s^{(i)}\operatorname{sen}(i\varepsilon-i'g')$$

le funzioni da moltiplicarsi. È facile vedere che si ha:

$$\begin{aligned}FF' = {} & \Sigma\left(A_c^{(k)}a_c^{(i)}-A_s^{(k)}a_s^{(i)}\right)\cos\left[(k+i)\,\varepsilon-(k'+i')\,g'\right]+\\ & +\Sigma\left(A_c\,a_c+A_s\,a_s\right)\cos\left[(k-i)\,\varepsilon-(k'-i')\,g'\right]+\\ & +\Sigma\left(A_s\,a_c+A_c\,a_s\right)\operatorname{sen}\left[(k+i)\,\varepsilon-(k'+i')\,g'\right]+\\ & +\Sigma\left(A_s\,a_c-A_c\,a_s\right)\operatorname{sen}\left[(k-i)\,\varepsilon-(k'-i')\,g'\right].\end{aligned}$$

La *confezione* di questi coefficienti si fa meccanicamente dicendosi perciò *moltiplicazione meccanica*. Si riga un foglio in modo da aver tanti rettangoli: in testa a ciascuno si scrivono successivamente gli indici $k$, $k'$: lateralmente a dritta successivamente e discendendo si scrivono gl' indici $i$, $i'$. — Su una strisciolina lunga si scrivono i coefficienti logaritmici rispondenti agl' indici $k$, $k'$, e su un' altra, quelli di $i$, $i'$. Ogni rettangolo è diviso in due parti: la prima è pel *cos*, la seconda pel *sen*. Combinando fra loro le striscie si sommano i logaritmi collocandoli nel respettivo scomparto, e si opera come è indicato dallo schema seguente:




Con tali procedimenti si trovò:

Tav. XII.

| $\varepsilon$ , $g'$ | $a\Omega$ | | $ar\frac{d\Omega}{dr}$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $\frac{1}{2}$ 180″,51978 | | +10″,1695 | | + 0″,5750 | |
| 1, 0 | — 1,11972 | + 0″,14947 | — 2,7063 | + 0″,5325 | — 3,7642 | — 0″,0922 |
| 2, 0 | — 0,05471 | — 0,02621 | — 0,1544 | — 0,0961 | + 0,1377 | — 0,1191 |
| 3, 0 | + 0,0033 | — 0,0019 | + 0,018 | — 0,008 | + 0,007 | + 0,010 |
| 4, 0 | + 0,0001 | + 0,0001 | + 0,001 | + 0,001 | 0. | 0. |
| — 3, — 1 | + 0,0005 | — 0,0002 | + 0,002 | — 0,001 | — 0,001 | — 0,001 |

| $\varepsilon$ , $g'$ | $a\Omega$ | | $ar\frac{d\Omega}{dr}$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| — 2, — 1 | — 0,0016 | + 0,0069 | 0. | + 0,031 | + 0,023 | + 0,001 |
| — 1, — 1 | — 0,0918 | + 0,0059 | — 0,253 | + 0,016 | — 0,183 | + 0,343 |
| 0, — 1 | + 4,5335 | — 0,6718 | + 0,651 | — 2,280 | — 0,969 | — 2,112 |
| 1, — 1 | + 1,1509 | + 2,7530 | + 3,898 | + 8,954 | + 0,040 | + 0,854 |
| 2, — 1 | — 0,0062 | — 0,5438 | — 0,328 | — 1,538 | — 0,790 | — 1,824 |
| 3, — 1 | — 0,0093 | — 0,0359 | — 0,026 | — 0,137 | + 0,066 | + 0,054 |
| 4, — 1 | + 0,0014 | + 0,0014 | + 0,008 | + 0,009 | — 0,003 | + 0,005 |
| 5, — 1 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| — 2, — 2 | + 0,0005 | + 0,0005 | + 0,003 | + 0,004 | + 0,002 | — 0,002 |
| — 1, — 2 | — 0,0067 | + 0,0027 | — 0,026 | + 0,017 | + 0,017 | + 0,040 |
| 0, — 2 | + 0,0548 | + 0,0706 | — 0,384 | + 0,033 | — 0,558 | + 0,169 |
| 1, — 2 | + 2,2736 | — 2,1371 | + 5,410 | — 4,429 | + 2,356 | — 2,884 |
| 2, — 2 | — 8,3483 | +10,0562 | —18,384 | +21,944 | — 0,564 | + 0,142 |
| 3, — 2 | + 0,2814 | — 0,0581 | + 0,955 | — 0,339 | + 0,660 | — 0,738 |
| 4, — 2 | + 0,0139 | — 0,0153 | + 0,068 | — 0,070 | — 0,020 | + 0,036 |
| 5, — 2 | — 0,0006 | + 0,0008 | — 0,005 | + 0,007 | — 0,002 | + 0,001 |
| 6, — 2 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| — 1, — 3 | + 0,0001 | + 0,0007 | — 0,001 | + 0,005 | + 0,004 | + 0,002 |
| 0, — 3 | — 0,0078 | + 0,0224 | — 0,050 | + 0,043 | — 0,048 | + 0,079 |
| 1, — 3 | + 0,1664 | — 0,4614 | + 0,221 | — 1,102 | — 0,112 | — 0,683 |
| 2, — 3 | + 0,2650 | + 2,1794 | + 2,311 | + 5,345 | + 1,877 | + 0,510 |
| 3, — 3 | — 4,5533 | — 1,1973 | —14,562 | — 3,918 | — 0,189 | — 0,313 |
| 4, — 3 | + 0,0723 | + 0,1265 | + 0,362 | + 0,524 | + 0,454 | + 0,141 |
| 5, — 3 | + 0,0104 | + 0,0021 | + 0,059 | + 0,013 | — 0,020 | — 0,006 |
| 6, — 3 | — 0,0004 | — 0,0002 | — 0,004 | — 0,002 | — 0,001 | — 0,001 |
| 7, — 3 | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. |
| — 1, — 4 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 | 0. | 0. |
| 0, — 4 | — 0,0007 | + 0,0029 | — 0,003 | + 0,010 | + 0,001 | + 0,012 |
| 1, — 4 | — 0,0061 | — 0,0505 | — 0,056 | — 0,111 | — 0,080 | — 0,045 |
| 2, — 4 | + 0,2187 | + 0,1517 | + 0,874 | + 0,138 | + 0,414 | — 0,268 |
| 3, — 4 | — 0,9562 | + 0,5770 | — 2,941 | + 2,736 | + 0,144 | + 0,932 |
| 4, — 4 | — 0,3112 | — 1,7461 | — 1,263 | — 7,364 | + 0,137 | — 0,167 |
| 5, — 4 | — 0,0446 | + 0,0551 | — 0,222 | + 0,304 | + 0,029 | + 0,222 |
| 6, — 4 | + 0,0017 | + 0,0052 | + 0,011 | + 0,033 | 0. | — 0,011 |
| 7, — 4 | 0. | — 0,0003 | 0. | — 0,001 | 0. | 0. |
| 0, — 5 | + 0,0001 | + 0,0002 | 0. | + 0,001 | 0. | 0. |
| 1, — 5 | — 0,0026 | — 0,0035 | — 0,012 | — 0,005 | — 0,011 | + 0,005 |
| 2, — 5 | + 0,0278 | — 0,0067 | + 0,085 | — 0,080 | + 0,012 | — 0,081 |

| $\varepsilon$ , $g'$ | $a\Omega$ | | $ar\frac{d\Omega}{dr}$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 3, — 5 | — 0,0350 | + 0,1694 | + 0,107 | + 0,713 | + 0,259 | + 0,170 |
| 4, — 5 | — 0,4494 | — 0,3073 | — 2,247 | — 1,058 | — 0,380 | + 0,239 |
| 5, — 5 | + 0,5623 | — 0,3911 | + 2,952 | — 2,021 | + 0,114 | + 0,037 |
| 6, — 5 | — 0,0325 | — 0,0097 | — 0,205 | — 0,054 | — 0,088 | + 0,054 |
| 7, — 5 | — 0,0019 | + 0,0026 | — 0,015 | + 0,015 | + 0,006 | — 0,001 |
| 8, — 5 | + 0,0002 | 0. | + 0,001 | — 0,001 | 0. | 0. |
| 1, — 6 | 0. | 0. | — 0,002 | 0. | 0. | + 0,001 |
| 2, — 6 | + 0,0015 | — 0,0027 | — 0,001 | — 0,014 | — 0,007 | — 0,008 |
| 3, — 6 | + 0,0131 | + 0,0179 | + 0,094 | + 0,052 | + 0,060 | — 0,017 |
| 4, — 6 | — 0,1004 | + 0,0217 | — 0,458 | + 0,251 | — 0,029 | + 0,177 |
| 5, — 6 | + 0,0435 | — 0,2549 | + 0,058 | — 1,432 | — 0,171 | — 0,118 |
| 6, — 6 | + 0,2314 | + 0,1366 | + 1,434 | + 0,864 | + 0,004 | + 0,065 |
| 7, — 6 | — 0,0016 | — 0,0155 | — 0,015 | — 0,112 | — 0,038 | — 0,027 |
| 8, — 6 | — 0,0016 | — 0,0004 | — 0,011 | — 0,002 | + 0,001 | + 0,003 |
| 9, — 6 | 0. | 0. | + 0,001 | + 0,001 | 0. | 0. |
| 1, — 7 | — 0,00003 | + 0,00001 | — 0,00016 | + 0,00005 | — 0,0003 | + 0,0013 |
| 2, — 7 | — 0,00010 | — 0,00031 | — 0,0015 | — 0,0015 | — 0,0015 | + 0,0001 |
| 3, — 7 | + 0,00259 | + 0,00025 | + 0,0133 | — 0,0053 | + 0,0042 | — 0,0093 |
| 4, — 7 | — 0,0077 | + 0,0134 | — 0,014 | + 0,087 | + 0,027 | + 0,032 |
| 5, — 7 | — 0,0343 | — 0,0464 | — 0,267 | — 0,221 | — 0,096 | + 0,026 |
| 6, — 7 | + 0,1165 | — 0,0312 | + 0,735 | — 0,286 | + 0,020 | — 0,092 |
| 7, — 7 | — 0,0112 | + 0,1059 | — 0,089 | + 0,766 | — 0,029 | + 0,015 |
| 8, — 7 | + 0,0062 | — 0,0035 | + 0,050 | — 0,029 | + 0,004 | — 0,021 |
| 9, — 7 | — 0,0003 | — 0,0007 | — 0,003 | — 0,006 | — 0,001 | + 0,001 |
| 10, — 7 | 0. | 0. | + 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| 3, — 8 | + 0,0003 | — 0,0003 | + 0,001 | — 0,001 | 0. | 0. |
| 4, — 8 | + 0,0008 | + 0,0021 | + 0,008 | + 0,009 | + 0,007 | 0. |
| 5, — 8 | — 0,0099 | — 0,0011 | — 0,064 | + 0,014 | — 0,012 | + 0,024 |
| 6, — 8 | + 0,0151 | — 0,0271 | + 0,064 | — 0,208 | — 0,033 | — 0,042 |
| 7, — 8 | + 0,0354 | + 0,0426 | + 0,295 | + 0,296 | + 0,041 | — 0,008 |
| 8, — 8 | — 0,0404 | + 0,0133 | — 0,334 | + 0,107 | — 0,012 | — 0,012 |
| 9, — 8 | + 0,0026 | + 0,0019 | + 0,024 | + 0,018 | + 0,009 | — 0,003 |
| 10, — 8 | + 0,0003 | — 0 0002 | + 0,003 | — 0,002 | — 0,001 | 0. |
| 11, — 8 | 0. | 0. | | | 0. | 0. |
| 4, — 9 | + 0,0002 | 0. | + 0,003 | 0. | 0. | 0. |
| 5, — 9 | — 0,0011 | + 0,0011 | — 0,006 | + 0,010 | + 0,002 | + 0,004 |
| 6, — 9 | — 0,0018 | — 0,0057 | — 0,026 | — 0,038 | — 0,016 | — 0,001 |
| 7, — 9 | + 0,0158 | + 0,0018 | + 0,128 | — 0,014 | + 0,012 | — 0,023 |

| $\varepsilon$ , $g'$ | $a\Omega$ | | $ar\frac{d\Omega}{dr}$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 8, — 9 | — 0,0108 | + 0,0229 | — 0,077 | + 0,201 | + 0,009 | + 0,016 |
| 9, — 9 | — 0,0114 | — 0,0126 | — 0,106 | — 0,118 | + 0,003 | — 0,007 |
| 10, — 9 | — 0,0003 | + 0,0015 | — 0,004 | + 0,015 | + 0,003 | + 0,003 |
| 11, — 9 | + 0,0001 | 0. | + 0,002 | 0. | 0. | 0. |
| 5, —10 | 0. | + 0,0002 | 0. | + 0,003 | 0. | 0. |
| 6, —10 | — 0,0010 | — 0,0005 | — 0,008 | — 0,001 | — 0,002 | + 0,001 |
| 7, —10 | + 0,0028 | — 0,0023 | + 0,017 | — 0,024 | — 0,004 | — 0,008 |
| 8, —10 | + 0,0029 | + 0,0078 | + 0,036 | + 0,065 | + 0,014 | — 0,001 |
| 9, —10 | — 0,0115 | + 0,0005 | — 0,109 | + 0,006 | — 0,004 | + 0,007 |
| 10, —10 | + 0,0019 | — 0,0071 | + 0,030 | — 0,064 | + 0,004 | 0. |
| 11, —10 | + 0,0001 | 0. | — 0,008 | + 0,002 | — 0,001 | + 0,002 |
| 12, —10 | 0. | + 0,0001 | 0. | 0. | | |
| 6, —11 | — 0,0001 | 0. | — 0,002 | 0. | | |
| 7 | + 0,0002 | — 0,0006 | 0. | — 0,006 | | |
| 8 | + 0,0018 | + 0,0009 | + 0,018 | + 0,004 | | |
| 9 | — 0,0029 | + 0,0030 | — 0,024 | + 0,033 | | |
| 10 | — 0,0024 | — 0,0046 | — 0,031 | — 0,047 | | |
| 11 | + 0,0030 | — 0,0006 | + 0,034 | — 0,008 | | |
| 12 | 0. | + 0,0001 | + 0,001 | + 0,002 | | |
| 7, —12 | | | 0. | — 0,001 | | |
| 8 | | | + 0,004 | — 0,002 | | |
| 9 | | | + 0,002 | + 0,012 | | |
| 10 | | | — 0,022 | — 0,006 | | |
| 11 | | | + 0,014 | — 0,023 | | |
| 12 | | | + 0,010 | + 0,012 | | |
| 13 | | | — 0,001 | + 0,001 | | |

Il controllo di queste funzioni è stato duplice. — Il primo è per sezioni, il secondo in complesso e con valori d' argomenti diversi da quelli sinora adoperati. — Il primo modo di controllo è molto analitico e serve a localizzare la ricerca dell' errore che può eventualmente presentarsi. Il secondo serve a confermare il primo ed a completarlo; giacchè nel primo modo di controllo i coefficienti dei seni degli argomenti di forma $(m, 0)$ non vengono considerati, ed inoltre tale controllo non scopre certi errori di collocazione, che potrebbero commettersi collocando male i coefficienti di una medesima sezione.

Per eseguire il controllo nel primo modo, cioè per sezioni e coi valori $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 90^\circ$, si dovrà (badando alle espressioni (4)) far le separate somme delle sezioni

di $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ che moltiplicate pel fattore che comparisce in $(h)$ possono dar termini il cui secondo indice dell'argomento è quello della sezione di $\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)$ o di $\frac{d\Omega}{dZ}$ che si vuol controllare; eseguire le moltiplicazioni ed aggiungere poi le sezioni corrispondenti di (H), (J) o $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ rispettivamente. — Siccome dopo la moltiplicazione si dee in questo controllo fare $\varepsilon = 0$, così il fattore $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r^2}{a}\right)\right]$ si modificherà, riunendo col termine indipendente i coefficienti degli argomenti $(1, 0), (2, 0)$. Esso diverrà così:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] = \bar{1},6318646 + 2\,(\bar{2},38261\text{n})\cos(-g') + \\ + 2\,(\bar{4},464\text{n})\cos(-2g') + 2\,(\bar{6},85\text{n})\cos(-3g').$$

In questa moltiplicazione considereremo poi come nulli i coefficienti dei seni di argomento $(m, 0)$ in $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$, giacchè dopo, per $\varepsilon = 0$ i prodotti svaniscono. — Così operando si avrà il valore della sezione che si considera, per $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 90°$, e si dirà valore calcolato direttamente. Non si è fatto questo primo controllo sulla $\Omega$ perchè dedotta immediatamente. Per le due altre funzioni, ebbersi i seguenti quadri:

*Controllo per sezioni di* $\left(r\frac{d\Omega}{dr}\right)$.

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 0$ | | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 7″,329 | | + 3″,966 | + 5″,054 | −12″,360 | +17″,162 |
| Mediante lo sviluppo: | + 7,328 | | + 3,967 | + 5,054 | −12,364 | +17,167 |
| Differenza | + 0,001 | | − 0,001 | 0,000 | + 0,004 | − 0,005 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | −11″,663 | + 0″,909 | − 3″,600 | − 4″,254 | + 0″,667 | − 2″,489 |
| Mediante lo sviluppo: | −11,664 | + 0,908 | − 3,601 | − 4,251 | + 0,666 | − 2,490 |
| Differenza | + 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | − 0,003 | + 0,001 | + 0,001 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 1,100 | — 0,393 | + 0,426 | + 0,304 | — 0,006 | + 0,233 |
| Mediante lo sviluppo : | + 1,100 | — 0,392 | + 0,425 | + 0,303 | — 0,003 | + 0,233 |
| Differenza | 0,000 | — 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | — 0,003 | 0,000 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0,086 | + 0,058 | — 0,042 | — 0,015 | — 0,003 | — 0,020 |
| Mediante lo sviluppo : | — 0,086 | + 0,056 | — 0,042 | — 0,013 | — 0,004 | — 0,022 |
| Differenza | 0,000 | + 0,002 | 0,000 | — 0,002 | + 0,001 | + 0,002 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 12$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0,008 | — 0,006 |
| Mediante lo sviluppo : | + 0,007 | — 0,007 |
| Differenza | + 0,001 | + 0,001 |

*Controllo per sezioni di* $a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$.

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 0$ | | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 3,047 | | — 1,811 | — 2,668 | + 1,891 | — 3,236 |
| Mediante lo sviluppo : | — 3,046 | | — 1,810 | — 2,667 | + 1,891 | — 3,236 |
| Differenza | — 0,001 | | — 0,001 | — 0,001 | 0,000 | 0,000 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 1,965 | — 0,273 | + 0,645 | + 0,675 | — 0,087 | + 0,423 |
| Mediante lo sviluppo : | + 1,965 | — 0,271 | + 0,645 | + 0,675 | — 0,088 | + 0,423 |
| Differenza | 0,000 | — 0,002 | 0,000 | 0,000 | + 0,001 | 0,000 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | $-$ 0,180 | $+$ 0,075 | $-$ 0,072 | $-$ 0,047 | $-$ 0,001 | $-$ 0,041 |
| Mediante lo sviluppo : | $-$ 0,180 | $+$ 0,076 | $-$ 0,072 | $-$ 0,047 | $-$ 0,001 | $-$ 0,041 |
| Differenza | 0,000 | $-$ 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

| $\varepsilon = 0$ , $\varepsilon' = 90°$ ; $g' = 87°, 14', 2''$ | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | $+$ 0,012 | $-$ 0,007 | $+$ 0,007 | $+$ 0,002 |
| Mediante lo sviluppo : | $+$ 0,013 | $-$ 0,007 | $+$ 0,007 | $+$ 0,001 |
| Differenza | $-$ 0,001 | 0,000 | 0,000 | $+$ 0,001 |

## Trasformazione dell'anomalia media di Giove nell'anomalia eccentrica di Feronia.

Le formule per passare dalla forma:

$$F = \Sigma\Sigma\,[((i, i', c))\cos(i\varepsilon - i'g') + ((i, i', s))\,\mathrm{sen}\,(i\varepsilon - i'g')]$$

alla forma definitiva:

$$F = \Sigma\Sigma\,\{[i, i', c]\cos\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'\gamma\} + [i, i', s]\,\mathrm{sen}\,\{(i - i'\mu)\,\varepsilon - i\gamma\}\}$$

ove si ha

$$\mu = \frac{n'}{n} \quad , \quad \gamma = c' - c\mu$$

sono

$$\left.\begin{aligned} [i, i', {}^{c}_{s}] = ((i, i', {}^{c}_{s}))\,I^{(0)}_{i\lambda} + ((i-1, i', {}^{c}_{s}))\,I^{(1)}_{i\lambda} + ((i-2, i', {}^{c}_{s}))\,I^{(2)}_{i\lambda} + \ldots\ldots \\ - ((i+1, i', {}^{c}_{s}))\,I^{(1)}_{i\lambda} + ((i+2, i', {}^{c}_{s}))\,I^{(2)}_{i\lambda} - \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

e le I sono date dalle stesse formule di un paragrafo precedente, salvo che qui è:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\,\mu e$$

La serie per calcolare $I^{(0)}_{i\lambda}$ è, numericamente, la seguente:

$$I^{(0)}_{i\lambda} = 1 - (i\lambda)^2 + A_1\,(i\lambda)^4 + A_2\,(i\lambda)^6 + \ldots\ldots$$

ove:

$$\log A_1 = \bar{1},39794 \quad ; \quad \log A_2 = \bar{2},44370\mathrm{n}\,.$$

Si ha poi in questo caso:

$$\log \mu = \bar{1},4587815 \qquad \log \lambda = \bar{2},2396143 .$$

Adoperando la solita catena adoperata da Hansen, il calcolo delle I si è fatto speditamente, osservando che il massimo valore di $m$ in $I_{i\lambda}^{(m)}$ è 4, a sufficienza, e il massimo di $i$ è 10.

Con ciò fu compilata la tavola seguente:

Tav. XIII.

| $i'$ | $\log I_{i'\lambda}^{(0)}$ | $\log I_{i'\lambda}^{(1)}$ | $\log I_{i'\lambda}^{(2)}$ | $\log I_{i'\lambda}^{(3)}$ | $\log I_{i'\lambda}^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\bar{1}$,999870 | $\bar{2}$,23955 | $\bar{4}$,1782 | $\bar{7}$,94 | |
| 2 | $\bar{1}$,999474 | $\bar{2}$,54037 | $\bar{4}$,7801 | $\bar{6}$,844 | |
| 3 | $\bar{1}$,998821 | $\bar{2}$,71615 | $\bar{3}$,13206 | $\bar{5}$,3718 | $\bar{7}$,49 |
| 4 | $\bar{1}$,997902 | $\bar{2}$,84063 | $\bar{3}$,38163 | $\bar{5}$,7464 | $\bar{7}$,98 |
| 5 | $\bar{1}$,996720 | $\bar{2}$,93693 | $\bar{3}$,57503 | $\bar{4}$,0368 | $\bar{6}$,373 |
| 6 | $\bar{1}$,995274 | $\bar{1}$,015402 | $\bar{3}$,73291 | $\bar{4}$,27394 | $\bar{6}$,690 |
| 7 | $\bar{1}$,993561 | $\bar{1}$,081498 | $\bar{3}$,86625 | $\bar{4}$,47438 | $\bar{6}$,957 |
| 8 | $\bar{1}$,991581 | $\bar{1}$,138509 | $\bar{3}$,981566 | $\bar{4}$,64786 | $\bar{5}$,1885 |
| 9 | $\bar{1}$,989330 | $\bar{1}$,188537 | $\bar{2}$,08313 | $\bar{4}$,80076 | $\bar{5}$,3925 |
| 10 | $\bar{1}$,986808 | $\bar{1}$,233048 | $\bar{2}$,17383 | $\bar{4}$,93741 | $\bar{5}$,5750 |
| 11 | $\bar{1}$,984009 | $\bar{1}$,273063 | $\bar{2}$,255695 | $\bar{3}$,06090 | $\bar{5}$,7398 |
| 12 | $\bar{1}$,980940 | $\bar{1}$,314357 | $\bar{2}$,33531 | $\bar{3}$,17855 | $\bar{5}$,8953 |

Pel controllo di questi valori, a somiglianza di Axel Möller ho preso la serie:

$$\cos i' g' = I_{i'\lambda}^{(0)} \cos i'(\gamma + \mu\varepsilon) + 2I_{i'\lambda}^{(1)} \operatorname{sen} i'(\gamma + \mu\varepsilon) \operatorname{sen} \varepsilon + 2I_{i'\lambda}^{(2)} \cos i'(\gamma + \mu\varepsilon) \cos 2\varepsilon +$$
$$+ 2I_{i'\lambda}^{(3)} \operatorname{sen} i'(\gamma + \mu\varepsilon) \operatorname{sen} 3\varepsilon + 2I_{i'\lambda}^{(4)} \cos i'(\gamma + \mu\varepsilon) \cos 4\varepsilon \text{ ecc.}$$

da una parte: e dall'altra la relazione:

$$g' = \gamma + \mu\varepsilon - \mu e \operatorname{sen} \varepsilon .$$

Ho posto $\gamma = 0$, $\varepsilon = 90$: allora quest'ultima dà:

$$g' = 23^\circ, 53', 38'', 2$$

e la prima diviene:

$$\cos i' (23^\circ, 53', 38'', 2) = \left[ I_{i'\lambda}^{(0)} - 2I_{i'\lambda}^{(2)} + 2I_{i'\lambda}^{(4)} \right] \cos i' (25^\circ, 53', 0'', 8) +$$
$$+ 2 \left[ I_{i'\lambda}^{(1)} - I_{i'\lambda}^{(3)} \right] \operatorname{sen} i' (25^\circ, 53', 0'', 8)$$

e questa servirà di controllo.

È preferibile paragonare piuttosto i logaritmi dei due membri, anzichè i due membri medesimi, vista la qualità d'approssimazione di cui abbiamo bisogno.

Chiamando A il primo e B il secondo membro logaritmico della precedente, si ebbe la seguente tavola di controllo:

| $\varepsilon = 90°$ | $i' = 1$ | $i' = 2$ | $i' = 3$ | $i' = 4$ | $i' = 5$ | $i' = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\bar{1}$,961087 | $\bar{1}$,827290 | $\bar{1}$,497339 | $\bar{2}$,987497n | $\bar{1}$,961933n | $\bar{1}$,904412n |
| B | $\bar{1}$,961092 | $\bar{1}$,827292 | $\bar{1}$,497344 | $\bar{2}$,987492n | $\bar{1}$,961936n | $\bar{1}$,904414n |
| Differenza | —0‘000005 | —0,000002 | —0,000005 | +0,000005 | —0,000003 | —0,000002 |

| $\varepsilon = 90°$ | $i' = 7$ | $i' = 8$ | $i' = 9$ | $i' = 10$ | $i' = 11$ | $i' = 12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\bar{1}$,989170n | $\bar{1}$,991722n | $\bar{1}$,913123n | $\bar{1}$,712602n | $\bar{1}$,096060n | |
| B | $\bar{1}$,989170n | $\bar{1}$,991722n | $\bar{1}$,913120n | $\bar{1}$,712596n | $\bar{1}$,096055n | |
| Differenza | 0,000000 | 0,000000 | +0,000003 | +0,000006 | +0,000005 | |

La formula pel calcolo dei coefficienti è già data. Con essa si ottennero i seguenti definitivi sviluppi:

Tav. XIV.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $\frac{1}{2}$ 180″,51978 | | +10″,1695 | | + 0″,5750 | |
| 1, 0 | — 1,11972 | + 0″,14947 | — 2,7063 | + 0″,5325 | — 3,7642 | — 0″,0922 |
| 2, 0 | — 0,05471 | — 0,02621 | — 0,1544 | — 0,0961 | + 0,1377 | — 0,1191 |
| 3, 0 | + 0,0033 | — 0,0019 | + 0,018 | — 0,008 | + 0,007 | + 0,010 |
| 4, 0 | + 0,0001 | + 0,0001 | + 0,001 | + 0,001 | 0. | 0. |
| — 3, — 1 | + 0,0005 | — 0,0003 | + 0,002 | — 0,001 | — 0,001 | — 0,001 |
| — 2, — 1 | + 0,0007 | + 0,0069 | + 0,004 | + 0,031 | + 0,026 | — 0,005 |
| — 1, — 1 | — 0,1704 | + 0,0179 | — 0,264 | + 0,056 | — 0,166 | + 0,379 |
| 0, — 1 | + 4,5105 | — 0,7193 | + 0,579 | — 2,434 | — 0,973 | — 2,120 |
| 1, — 1 | + 1,2294 | + 2,7500 | + 3,914 | + 8,939 | + 0,037 | + 0,850 |
| 2, — 1 | + 0,0147 | — 0,4952 | — 0,260 | — 1,381 | — 0,790 | — 1,809 |
| 3, — 1 | — 0,0092 | — 0,0449 | — 0,031 | — 0,164 | + 0,052 | + 0,022 |
| 4, — 1 | + 0,0012 | + 0,0008 | + 0,008 | + 0,007 | — 0,002 | + 0,006 |
| 5, — 1 | 0. | + 0,0001 | — 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| — 2, — 2 | + 0,0007 | + 0,0004 | + 0,004 | + 0,003 | + 0,002 | — 0,003 |
| — 1 | — 0,0071 | — 0,0011 | — 0,010 | + 0,013 | + 0,037 | + 0,032 |
| 0 | — 0,0294 | + 0,1508 | — 0,583 | + 0,201 | — 0,640 | + 0,270 |
| 1 | + 2,5626 | — 2,4811 | + 6,028 | — 5,185 | + 2,353 | — 2,880 |
| 2 | — 8,2690 | + 9,9719 | —18,207 | +21,776 | — 0,505 | + 0,068 |
| 3 | — 0,0078 | + 0,2902 | + 0,317 | + 0,423 | + 0,642 | — 0,735 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 4 | + 0,,0186 | — 0,,0112 | + 0,,090 | — 0,,069 | + 0,,003 | + 0,,010 |
| 5 | + 0,0001 | + 0,0003 | — 0,003 | + 0,005 | — 0,003 | + 0,002 |
| 6 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| — 1, — 3 | + 0,0007 | — 0,0011 | + 0,002 | + 0,001 | + 0,006 | — 0,003 |
| 0 | — 0,0159 | + 0,0492 | — 0,058 | + 0,107 | — 0,040 | + 0,115 |
| 1 | + 0,1455 | — 0,5739 | + 0,077 | — 1,380 | — 0,212 | — 0,703 |
| 2 | + 0,5098 | + 2,2120 | + 3,073 | + 5,476 | + 1,876 | + 0,490 |
| 3 | — 4,5307 | — 1,0878 | —14,421 | — 3,658 | — 0,115 | — 0,294 |
| 4 | — 0,1648 | + 0,0666 | — 0,396 | + 0,325 | + 0,447 | + 0,126 |
| 5 | + 0,0079 | + 0,0071 | + 0,058 | + 0,035 | + 0,004 | + 0,001 |
| 6 | + 0,0001 | + 0,0001 | — 0,001 | 0. | — 0,001 | — 0,001 |
| — 1, — 4 | 0. | — 0,0003 | 0. | 0. | 0. | + 0,001 |
| 0 | + 0,0002 | + 0,0068 | + 0,003 | + 0,018 | + 0,007 | + 0,014 |
| 1 | — 0,0235 | — 0,0591 | — 0.123 | — 0,111 | — 0,109 | — 0,025 |
| 2 | + 0,2827 | + 0,1033 | + 1,067 | — 0,079 | + 0,397 | — 0,334 |
| 3 | — 0,9150 | + 0,7058 | — 2,780 | + 3.243 | + 0,163 | + 0,921 |
| 4 | — 0,3723 | — 1,7011 | — 1,444 | - 7,160 | + 0,144 | — 0,118 |
| 5 | — 0,0684 | — 0,0652 | — 0,316 | — 0,202 | + 0,038 | + 0,212 |
| 6 | — 0,0021 | + 0,0048 | — 0,007 | + 0,036 | + 0,002 | + 0,004 |
| 7 | 0. | + 0,0002 | + 0,001 | + 0,002 | 0. | — 0,001 |
| 0, — 5 | + 0,0004 | + 0,0005 | + 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | 0. |
| 1 | — 0,0051 | — 0,0023 | — 0,019 | + 0,005 | — 0,011 | + 0,013 |
| 2 | + 0,0287 | — 0,0226 | + 0,066 | — 0,145 | — 0,012 | — 0,094 |
| 3 | + 0,0087 | + 0,1925 | + 0,318 | + 0,784 | + 0,291 | + 0,141 |
| 4 | — 0,4976 | — 0,2566 | — 2,477 | — 0,813 | — 0,364 | + 0,249 |
| 5 | + 0,5219 | — 0,4133 | + 2,754 | — 2,089 | + 0,089 | + 0,054 |
| 6 | + 0,0148 | — 0,0447 | + 0,045 | — 0,234 | — 0,079 | + 0,057 |
| 7 | — 0,0026 | + 0,0003 | — 0,022 | + 0,002 | — 0,002 | + 0,004 |
| 8 | — 0,0001 | + 0,0002 | — 0,001 | 0. | 0. | 0. |
| 1, — 6 | — 0,0001 | + 0,0004 | — 0,002 | + 0,001 | + 0,001 | + 0,002 |
| 2 | — 0,0003 | — 0,0044 | — 0,012 | — 0,018 | — 0,013 | — 0,005 |
| 3 | + 0,0238 | + 0,0138 | + 0,140 | + 0,016 | + 0,060 | — 0,037 |
| 4 | — 0,1013 | + 0,0504 | — 0,443 | + 0,406 | — 0,005 | + 0,185 |
| 5 | + 0,0087 | — 0,2640 | — 0,139 | — 1,479 | — 0,172 | — 0,106 |
| 6 | + 0,2331 | + 0,1104 | + 1,423 | + 0,720 | — 0,010 | + 0,056 |
| 7 | + 0,0228 | — 0,0026 | + 0,135 | — 0,030 | — 0,037 | — 0,021 |
| 8 | — 0,0006 | — 0,0013 | — 0,005 | — 0,009 | 0. | 0. |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 9, — 6 | — 0″,0002 | — 0″,0001 | 0″. | + 0″,001 | 0″. | 0″. |
| 2 | — 0,00046 | — 0,00024 | | | | |
| 3 | + 0,00319 | — 0,00173 | + 0,0128 | — 0,0174 | 0,00004 | — 0,0127 |
| 4 | — 0,0023 | + 0,0186 | + 0,024 | + 0,110 | + 0,039 | + 0,026 |
| 5 | — 0,0489 | — 0,0395 | — 0,353 | — 0,169 | — 0,094 | + 0,041 |
| 6 | + 0,1120 | — 0,0490 | + 0,703 | — 0,401 | + 0,011 | — 0,090 |
| 7 | + 0,0022 | + 0,1006 | — 0,008 | + 0,722 | — 0,027 | + 0,006 |
| 8 | + 0,0057 | + 0,0099 | + 0,043 | + 0,062 | + 0,001 | — 0,020 |
| 9 | + 0,0003 | — 0,0003 | + 0,003 | — 0,004 | — 0,001 | — 0,002 |
| 10 | 0. | 0. | + 0,001 | — 0,001 | 0. | 0. |
| 3, — 8 | + 0,0002 | — 0,0006 | 0. | — 0,002 | — 0,001 | 0. |
| 4 | + 0,0023 | + 0,0020 | + 0,017 | + 0,005 | + 0,008 | — 0,003 |
| 5 | — 0,0114 | + 0,0033 | — 0,068 | + 0,046 | — 0,007 | + 0,029 |
| 6 | + 0,0081 | — 0,0325 | + 0,011 | — 0,241 | — 0,039 | — 0,037 |
| 7 | + 0,0423 | + 0,0363 | + 0,344 | + 0,247 | + 0,038 | — 0,012 |
| 8 | — 0,0350 | + 0,0182 | — 0,291 | + 0,141 | — 0,007 | — 0,013 |
| 9 | — 0,0027 | + 0,0041 | — 0,020 | + 0,036 | + 0,007 | — 0,005 |
| 10 | + 0,0003 | + 0,0002 | + 0,003 | + 0,001 | 0. | 0. |
| 4, — 9 | + 0,0004 | — 0,0002 | + 0,004 | — 0,001 | 0. | 0. |
| 5 | — 0,0006 | + 0,0020 | 0. | + 0,016 | 0. | + 0,004 |
| 6 | — 0,0045 | — 0,0053 | — 0,047 | — 0,032 | — 0,018 | + 0,003 |
| 7 | + 0,0167 | — 0,0028 | + 0,132 | — 0,052 | + 0,009 | — 0,024 |
| 8 | — 0,0064 | + 0,0245 | — 0,039 | + 0,212 | + 0,011 | + 0,013 |
| 9 | — 0,0126 | — 0,0090 | — 0,113 | — 0,086 | + 0,004 | — 0,005 |
| 10 | — 0,0021 | — 0,0002 | — 0,021 | — 0,001 | + 0,003 | + 0,002 |
| 11 | 0. | + 0,0001 | + 0,001 | + 0,001 | 0. | 0. |
| 5, —10 | + 0,0002 | + 0,0003 | + 0,001 | + 0,003 | 0. | 0. |
| 6 | — 0,0015 | 0. | — 0,011 | + 0,004 | — 0,001 | + 0,002 |
| 7 | + 0,0018 | — 0,0036 | + 0,007 | — 0,034 | — 0,006 | — 0,008 |
| 8 | + 0,0053 | + 0,0070 | + 0,057 | + 0,057 | + 0 014 | — 0,003 |
| 9 | — 0,0110 | + 0,0030 | — 0,105 | + 0,028 | — 0,003 | + 0,007 |
| 10 | — 0,0002 | — 0,0067 | + 0,011 | — 0,060 | + 0,003 | + 0,001 |
| 11 | + 0,0002 | — 0,0012 | — 0,005 | — 0,009 | 0. | + 0,002 |
| 12 | 0. | 0. | — 0,001 | — 0,001 | | |
| 6, —11 | — 0,0001 | + 0,0001 | — 0,002 | + 0,001 | | |
| 7 | — 0,0001 | — 0,0007 | — 0,003 | — 0,006 | | |
| 8 | + 0,0022 | + 0,0001 | + 0,021 | — 0,004 | | |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 9 | — 0″,0021 | + 0″,0040 | — 0″,014 | + 0″,042 | | |
| 10 | — 0,0034 | — 0,0038 | — 0,040 | — 0,038 | | |
| 11 | + 0,0025 | — 0,0014 | + 0,027 | — 0,016 | | |
| 12 | + 0,0006 | — 0,0001 | + 0,007 | 0. | | |
| 13 | | | + 0,001 | 0. | | |
| 7, —12 | | | — 0,001 | — 0,001 | | |
| 8 | | | + 0,004 | — 0,004 | | |
| 9 | | | + 0,007 | + 0,013 | | |
| 10 | | | — 0,024 | + 0,001 | | |
| 11 | | | + 0,007 | — 0,025 | | |
| 12 | | | + 0,012 | + 0,007 | | |
| 13 | | | + 0,001 | + 0,003 | | |

Per istituire anche in questo caso un opportuno controllo per sezioni, non prenderemo le somme dei due membri delle equazioni del tipo $(a)$, poichè i termini con $I^{(1)}$ distruggendosi sfuggirebbero al controllo.

Piuttosto, immaginiamo di dare ad $i$ nella $(a)$ tutti i successivi valori che prende nella sezione che si vuol controllare: sieno

$$[l, i', c] = ((l, i', c))\, I^{(0)} - ((l+1, i', c))\, I^{(1)} + ((l+2, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots + \\ + ((l-1, i', c))\, I^{(1)} + ((l-2, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots$$

$$[l+1, i', c] = ((l+1, i', c))\, I^{(0)} - ((l+2, i', c))\, I^{(1)} + ((l+3, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots + \\ + ((l, i', c))\, I^{(1)} + ((l-1, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots$$

$$[l+2, i', c] = ((l+2, i', c))\, I^{(0)} - ((l+3, i', c))\, I^{(1)} + ((l+4, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots + \\ + ((l+1, i', c))\, I^{(1)} + ((l, i', c))\, I^{(2)} \ldots\ldots$$

. . . . . .

In questo sistema cambiamo i segni alla 3ª e 4ª, alla 7ª, 8ª, alla 11ª, 12ª equazione e così via: sommando poscia, ponendo:

$[A, i', c] = [l, i', c] + [l+1, i', c] - [l+2, i', c] - [l+3, i', c] + [l+4, i', c] + [l+5, i', c] - \ldots$

$[B, i', c] = [l+1, i', c] + [l+2, i', c] - [l+3, i', c] - [l+4, i', c] + [l+5, i', c] + [l+6, i', c] - \ldots$

otterrassi, com'è facile verificare, dopo aver stabilito lo stesso significato pei simboli $((A, i', c))$, $((B, i', c))$:

$$[A, i', c] = ((A, i', c))\, I^{(0)}_{i'\lambda} - 2\,((B, i', c))\, I^{(1)}_{i'\lambda} - 2\,((A, i', c))\, I^{(2)}_{i'\lambda} + 2\,((B, i', c))\, I^{(3)}_{i'\lambda} \ldots$$

la quale controlla in tutte le loro parti, i coefficienti dei coseni. — Una formula perfettamente analoga, ottenuta mutando $c$ in $s$ controlla i seni. Queste formule son preferibili a quelle di Hansen, perchè localizzano meglio l'errore, tenendo separati i coefficienti dei coseni da quelli dei seni; coefficienti che si calcolano indipendentemente: mentre la formula d'Hansen frammischia gli uni e gli altri e quindi nel caso d'errore bisogna fare un lavoro doppio.

*Valori di* $[A, i', \frac{c}{s}]$ *nella funzione* $a\Omega$.

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i'=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 3,0870 | + 3,0066 | —10,8351 | +12,6028 | — 5,3746 | — 2,6182 |
| Mediante lo sviluppo: | — 3,0868 | + 3,0068 | —10,8351 | +12,6030 | — 5,3747 | — 2,6184 |
| Differenza | — 0,0002 | — 0,0002 | 0,0000 | — 0,0002 | + 0,0001 | + 0,0002 |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 1,4757 | — 0,9726 | — 0,0302 | — 0,7967 | + 0,2962 | — 0,2182 |
| Mediante lo sviluppo: | — 1,4758 | — 0,9724 | — 0,0300 | — 0,7970 | + 0,2963 | — 0,2180 |
| Differenza | + 0,0001 | — 0,0002 | — 0,0002 | + 0,0003 | — 0,0001 | — 0,0002 |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | | $i'=9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0,1620 | + 0,0619 | + 0,0152 | + 0,0808 | — 0,0290 | + 0,0256 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,1624 | + 0,0616 | + 0,0155 | + 0,0806 | — 0,0293 | + 0,0255 |
| Differenza | — 0,0004 | + 0,0003 | — 0,0003 | + 0,0002 | + 0,0003 | + 0,0001 |

| | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0,0196 | — 0,0055 | — 0,0021 | — 0,0095 |
| Mediante lo sviluppo: | — 0,0198 | — 0,0056 | — 0,0018 | — 0,0098 |
| Differenza | + 0,0002 | + 0,0001 | — 0,0003 | + 0,0003 |

*Valori di* $[A, i', \frac{c}{s}]$ *nella funzione* $ar\frac{d\Omega}{dr}$.

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i'=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 3″,353 | +10″,126 | −23″,431 | +27″,263 | −18″,082 | − 7″,356 |
| Mediante lo sviluppo: | + 3,351 | +10,124 | −23,429 | + 27,263 | −18,080 | − 7,356 |
| Differenza | + 0,002 | + 0,002 | − 0,002 | 0,000 | − 0,002 | 0,000 |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | − 4″,838 | − 3″,539 | − 0″,149 | − 3″,306 | + 1″,442 | − 1″,158 |
| Mediante lo sviluppo: | − 4,841 | + 3,541 | − 0,149 | − 3,303 | + 1,443 | − 1,162 |
| Differenza | + 0,003 | + 0,002 | 0,000 | − 0,003 | − 0,001 | + 0,004 |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | | $i'=9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,989 | + 0″,301 | + 0″,145 | + 0″,550 | − 0″,212 | + 0″,222 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,990 | + 0,302 | + 0,144 | + 0,549 | − 0,213 | + 0,225 |
| Differenza | − 0,001 | − 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | − 0,003 |

| | $i'=10$ | | $i'=11$ | | $i'=12$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | − 0″,160 | − 0″,040 | − 0″,034 | − 0″,095 | + 0″,036 | − 0″,040 |
| Mediante lo sviluppo: | − 0,162 | − 0,038 | − 0,033 | − 0,097 | + 0,038 | − 0,040 |
| Differenza | + 0,002 | − 0,002 | − 0,001 | + 0,002 | − 0,002 | 0,000 |

*Valori di* $[A, i', \frac{c}{s}]$ *nella funzione* $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$.

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,353 | + 0″,733 | — 1″,540 | + 1″,959 | — 1″,370 | + 0″,158 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,354 | + 0,735 | — 1,537 | + 1,960 | — 1,369 | + 0,157 |
| Differenza | — 1,001 | — 0,002 | — 0,003 | — 0,001 | — 0,001 | + 0,001 |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0″,015 | + 0″,958 | — 0″,483 | + 0″,205 | — 0″,210 | — 0″,182 |
| Mediante lo sviluppo: | — 0,014 | + 0,960 | — 0,483 | + 0,208 | — 0,208 | — 0,183 |
| Differenza | — 0,001 | — 0,002 | 0,000 | — 0,003 | — 0,002 | + 0,001 |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | | $i'=9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,039 | — 0″,140 | + 0″,075 | — 0″,015 | — 0″,032 | + 0″,015 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,038 | — 0,140 | + 0,077 | — 0,015 | — 0,031 | + 0,015 |
| Differenza | + 0,001 | 0,000 | — 0,002 | 0,000 | — 0,001 | 0,000 |

| | $i'=10$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0″,015 | — 0″,006 |
| Mediante lo sviluppo: | — 0,015 | — 0,007 |
| Differenza | 0,000 | + 0,001 |

Dalla $a\Omega$ occorre ora ricavare il valore di $\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}$, cioè a dire la derivata rapporto ad $\varepsilon$ in quanto questo entra nel perturbato. Tale derivata per la sezione $i' = 0$ si ricava naturalmente al modo solito, e per le altre sezioni si ha lo sviluppo dato nella mia Memoria, onde indicando con $<i, i', \frac{c}{s}>$ i coefficienti di $\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}$ e con $[i, i', \frac{c}{s}]$ quelli di $\Omega$ calcolati nella tavola precedente, abbiamo le relazioni:

$$<i, i', c> = + \{ i\,[i, i', s] - i'\lambda\,[i-1, i', s] - i'\lambda\,[i+1, i', s] \{$$
$$<i, i', s> = - \{ i\,[i, i', c] - i'\lambda\,[i-1, i', c] - i'\lambda\,[i+1, i', c] \{$$

ove $\lambda$ ha il medesimo valore di poco avanti. — Con queste formossi la tavola:

Tav. XV.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\left(\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| 1, 0 | + 0,″14947 | + 1,″11972 |
| 2, 0 | — 0,05242 | + 0,10942 |
| 3, 0 | — 0,0057 | — 0,0100 |
| 4, 0 | + 0,0004 | — 0,0004 |
| — 3, — 1 | + 0,001 | + 0,001 |
| — 2 | — 0,014 | — 0,002 |
| — 1 | — 0,006 | — 0,092 |
| 0 | — 0,048 | + 0,018 |
| 1 | + 2,771 | — 1,151 |
| 2 | — 1,037 | — 0,008 |
| 3 | — 0,126 | + 0,028 |
| 4 | + 0,004 | — 0,005 |
| — 2, — 2 | — 0,001 | + 0,001 |
| — 1 | — 0,004 | — 0,008 |
| 0 | + 0,086 | + 0,089 |
| 1 | — 2,832 | — 2,850 |
| 2 | +20,020 | +16,627 |
| 3 | + 0,525 | — 0,263 |
| 4 | — 0,055 | — 0,074 |
| 5 | + 0,001 | — 0,001 |
| — 1, — 3 | — 0,001 | 0. |
| 0 | + 0,030 | + 0,007 |
| 1 | — 0,691 | — 0,120 |
| 2 | + 4,510 | — 1,249 |
| 3 | — 3,381 | +13,160 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\left(\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| 4 | + 0,″322 | + 0,″423 |
| 5 | + 0,032 | — 0,047 |
| 6 | + 0,001 | — 0,001 |
| 0, — 4 | + 0,004 | — 0,002 |
| 1 | — 0,066 | + 0,043 |
| 2 | + 0,162 | — 0,630 |
| 3 | + 2,228 | + 2,739 |
| 4 | — 6,849 | + 1,421 |
| 5 | — 0,208 | + 0,315 |
| 6 | + 0,033 | + 0,008 |
| 7 | + 0,001 | 0. |
| 1, — 5 | 0. | + 0,007 |
| 2 | — 0,062 | — 0,056 |
| 3 | + 0,601 | — 0,067 |
| 4 | — 1,007 | + 2,036 |
| 5 | — 2,040 | — 2,652 |
| 6 | — 0,232 | — 0,044 |
| 7 | + 0,006 | + 0,019 |
| 8 | + 0,002 | + 0,001 |
| 2, — 6 | — 0,010 | + 0,003 |
| 3 | + 0,036 | — 0,081 |
| 4 | + 0,229 | + 0,408 |
| 5 | — 1,336 | — 0,029 |
| 6 | + 0,690 | — 1,396 |
| 7 | 0,029 | — 0,136 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\left(\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| 8 | — 0,010 | + 0,008 |
| 9 | — 0,001 | + 0,002 |
| 1, — 7 | + 0,0001 | — 0,00005 |
| 2 | — 0,0004 | + 0,0013 |
| 3 | — 0,0074 | — 0,0099 |
| 4 | + 0,079 | + 0,003 |
| 5 | — 0,193 | + 0,258 |
| 6 | — 0,301 | — 0,678 |
| 7 | + 0,709 | 0. |
| 8 | + 0,065 | — 0,046 |
| 9 | — 0,004 | — 0,002 |
| 3, — 8 | — 0,002 | — 0,001 |
| 4 | + 0,008 | — 0,010 |
| 5 | + 0,020 | + 0,058 |
| 6 | — 0,200 | — 0,044 |
| 7 | + 0,256 | — 0,300 |
| 8 | + 0,140 | + 0,286 |
| 9 | + 0,035 | + 0,019 |
| 10 | + 0,001 | — 0,003 |
| 4, — 9 | — 0,001 | — 0,002 |
| 5 | + 0,011 | + 0,002 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\left(\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}\right)$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| 6 | — 0,032 | + 0,030 |
| 7 | — 0,023 | — 0,119 |
| 8 | + 0,197 | + 0,052 |
| 9 | — 0,085 | + 0,112 |
| 10 | — 0,001 | + 0,019 |
| 11 | + 0,001 | 0. |
| 5, —10 | + 0,001 | — 0,001 |
| 6 | 0. | + 0,009 |
| 7 | — 0,026 | — 0,012 |
| 8 | + 0,056 | — 0,044 |
| 9 | + 0,027 | + 0,100 |
| 10 | — 0,067 | 0. |
| 11 | — 0,012 | — 0,002 |
| 12 | | |
| 6, —11 | + 0,001 | + 0,001 |
| 7 | — 0,005 | + 0,001 |
| 8 | 0. | — 0,017 |
| 9 | + 0,037 | + 0,018 |
| 10 | — 0,039 | + 0,034 |
| 11 | — 0,014 | — 0,028 |
| 12 | — 0,001 | — 0,007 |

Per controllare le diverse sezioni si presero le somme delle formule precedenti per tutti i valori di $i$. Si ebbe allora:

$$\Sigma_i \langle i, i', c\rangle = \Sigma i\,[i, i', s] - 2i'\lambda\Sigma_i\,[i, i', s]$$
$$\Sigma \langle i, i', c\rangle = -\Sigma i\,[i, i', c] + 2i'\lambda\Sigma_i\,[i, i', c]\,.$$

Le somme del primo membro sono le somme di ciascuna sezione di $\frac{a\partial\Omega}{d\varepsilon}$ per un dato $i'$: l'ultima del secondo membro è la somma della sezione corrispondente di $a\Omega$. Il primo termine del secondo membro, si calcola col prodotto diretto dei termini di $\Omega$ pei varî valori di $i$: mentre nello sviluppo di $\frac{a\partial\Omega}{d\varepsilon}$ tali prodotti sono stati ottenuti logaritmicamente per ragione di uniformità e di controllo. La $\Sigma\langle i, i', \frac{c}{s}\rangle$ si dirà *valore mediante lo sviluppo:* ed allora si ha la tavola di controllo che vedesi alla pagina seguente.

*Valori di* $\Sigma \langle i, i', \overset{c}{s} \rangle$ *nella a* $\left(\frac{\partial \Omega}{d\varepsilon}\right)$.

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i'=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 1″,545 | + 1″,210 | +17″,740 | —13″,520 | + 0″,820 | —12″,625 |
| Mediante lo sviluppo: | + 1,545 | + 1,211 | +17,740 | —13,521 | + 0,822 | —12,623 |
| Differenza | 0,000 | — 0,001 | 0,000 | + 0,001 | — 0,002 | — 0,002 |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 4″,696 | — 3″,894 | — 2″,733 | + 0″,755 | — 0″,432 | + 1″,222 |
| Mediante lo sviluppo: | — 4,695 | — 3,894 | — 2,732 | + 0,756 | — 0,431 | + 1,221 |
| Differenza | — 0,001 | 0,000 | — 0,001 | — 0,001 | — 0,001 | + 0,001 |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | | $i'=9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | + 0″,347 | + 0″,474 | + 0″,258 | — 0″,005 | + 0″,069 | — 0″,094 |
| Mediante lo sviluppo: | + 0,348 | + 0,474 | + 0,258 | + 0,005 | + 0,067 | + 0,094 |
| Differenza | — 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | + 0,002 | 0,000 |

| | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| Calcolato direttamente: | — 0″,020 | — 0″,050 | — 0″,019 | + 0″,018 |
| Mediante lo sviluppo: | — 0,021 | — 0,050 | — 0,019 | + 0,016 |
| Differenza | + 0,001 | 0,000 | 0,000 | + 0,002 |

Giunti così alla fine degli sviluppi che serviranno a costituire le equazioni differenziali del moto, sarà bene di fare un controllo generale delle tre serie che uniche ci serviranno, cioè le tre derivate di $\Omega$. Tale controllo sarà tanto più decisivo, quanto più distanti fra loro saranno le espressioni che paragoneremo: però prenderemo come termine di confronto la prima forma della $\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ data nel capitolo secondo, cioè:

$$\frac{a}{\Delta} = \left\{ D - f \cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon' \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Le formule che servono pel controllo sono le $(h)$ del cap. 2$^{do}$ cioè

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon} &= \frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\frac{\partial}{d\varepsilon}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{d\varepsilon}(\mathrm{H}) \\ ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\alpha^2 m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\right\}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\frac{m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - (\mathrm{H}) \\ a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0 &= -\left\{\frac{\alpha^2 m'}{\operatorname{sen} 1''}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\right\}\frac{1}{\alpha}\operatorname{sen} \mathrm{J}\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen}(f' + \Pi') + (\mathrm{J}) . \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Ci resta a svolgere la prima di queste formule. — Dalle espressioni del capitolo secondo si ricava:

$$f \operatorname{sen} \mathrm{F} = w \operatorname{sen}(\varepsilon + \mathrm{W}) \cos \mathrm{P} - ep \cos \mathrm{P} + w_1 \cos(\varepsilon + \mathrm{W}_1) \operatorname{sen} \mathrm{P}$$
$$f \cos \mathrm{F} = w_1 \cos(\varepsilon + \mathrm{W}_1) \cos \mathrm{P} + ep \operatorname{sen} \mathrm{P} - w \operatorname{sen}(\varepsilon + \mathrm{W}) \operatorname{sen} \mathrm{P} .$$

Derivando queste rispetto ad $\varepsilon$ e facendosi poi $\varepsilon = 180°$, abbiamo:

$$\left(\frac{d(f \operatorname{sen} \mathrm{F})}{d\varepsilon}\right)_{180} = w_1 \operatorname{sen} \mathrm{W}_1 \operatorname{sen} \mathrm{P} - w \cos \mathrm{W} \cos \mathrm{P}$$
$$\left(\frac{d(f \cos \mathrm{F})}{d\varepsilon}\right)_{180} = w_1 \operatorname{sen} \mathrm{W}_1 \cos \mathrm{P} + w \cos \mathrm{W} \operatorname{sen} \mathrm{P} .$$

Si ricava poi subito dall'espressione di D data nel capitolo secondo:

$$\left(\frac{d\mathrm{D}}{d\varepsilon}\right)_{180} = e'\left(\frac{d(f \cos \mathrm{F})}{d\varepsilon}\right)_{180} .$$

Ora dalla espressione precedente di $\frac{a}{\Delta}$ si deduce coll'aiuto di queste formule:

$$\left[\frac{\partial}{d\varepsilon}\left(\frac{a}{\Delta}\right)\right]_{180} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3_{180}\left[(c' - \cos\varepsilon')\left(\frac{d(f\cos\mathrm{F})}{d\varepsilon}\right)_{180} - \operatorname{sen}\varepsilon'\left(\frac{d(f\operatorname{sen}\mathrm{F})}{d\varepsilon}\right)_{180}\right]. \quad (b)$$

Si ha poi:

$$(\mathrm{H}) = \{-eh + h\cos\varepsilon - l\operatorname{sen}\varepsilon\}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' + \{-el' + l'\cos\varepsilon + h'\operatorname{sen}\varepsilon\}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\operatorname{sen} f'}{\cos\varphi'}$$

donde, per $\varepsilon = 180°$:

$$\frac{\partial(\mathrm{H})}{d\varepsilon} = l\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' - h'\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\operatorname{sen} f'}{\cos\varphi'} . \quad (c)$$

Le $(b)$, $(c)$ vanno sostituite nella prima delle $(a)$. La maggior parte delle costanti e degli sviluppi che entrano nelle $(b)$, $(c)$ sono state già calcolate.

Dalle due formule:

$$g' = \gamma + \mu\varepsilon - \mu e \operatorname{sen}\varepsilon$$
$$\cos 2\varepsilon' = \left(\mathrm{P}^{(-2)}_{-1} + \mathrm{P}^{(-2)}_{1}\right)\cos g' + \left(\mathrm{P}^{(-2)}_{-2} + \mathrm{P}^{(-2)}_{2}\right)\cos 2g' + \ldots\ldots$$

si ricava per $\gamma = 0$ (ponendosi anche $c = c' = 0$) e per $\varepsilon = 180°$:

$$g' = 51°, 46', 08$$
$$\varepsilon' = 54°, \ 0', 35$$
$$f' = 56°, 16', 65 .$$

Con questi valori si trovò:

$$\log\{D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2\cos 2\varepsilon'\} = 0{,}5658997$$

$$\log\left(\frac{d(f\operatorname{sen} F)}{d\varepsilon}\right)_{180} = 0{,}2911156n$$

$$\log\left(\frac{d(f\cos F)}{d\varepsilon}\right)_{180} = 0{,}6145376n$$

$$\log\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' = \bar{1}{,}769430$$

$$\log\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{\operatorname{sen} f'}{\cos\varphi'} = \bar{1}{,}945493$$

$$\log\left\{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{r'}{a'}\right)\operatorname{sen} J\operatorname{sen}(f' + \Pi')\right\} = \bar{2}{,}325549$$

$$\log\left\{\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\right\} = \bar{1}{,}547633$$

$$(J) = -\ 1'',97800$$

$$(H) = +22'',6251\,.$$

Adoperando questi valori e usando gli sviluppi delle tavole precedenti, addivenimmo al controllo che soddisfece completamente coi seguenti risultati:

| $\varepsilon = 180°$ | $a\left(\frac{\partial\Omega}{d\varepsilon}\right)$ | $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ | $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_0$ |
|---|---|---|---|
| Calcolato direttamente: | — 19″,29 | — 22″,07 | + 1″,13 |
| Mediante lo sviluppo: | — 19,28 | — 22,08 | + 1,14 |
| Differenza | — 0,01 | + 0,01 | — 0,01 |

## Sviluppo delle funzioni $\varphi$, $\psi$, $\xi$, $\Xi$ e $A$.

(Venturi, § 3, n. 3 e segg.).

Le equazioni differenziali per determinare le funzioni precedenti, sono date dalle (4), (17), loco citato, e le espressioni dei coefficienti M, N son date dalle (9), (10), (18). — Si ricordi che il $\lambda$ che entra in tali formule, non è che l'angolo eccentrico, da Hansen indicato con $\varphi$. — Si calcolarono le costanti delle M, N e si trovò:

$$M_1 = (\bar{1},56536n) + (0,608438)\cos\varepsilon + (\bar{1},08824n)\cos 2\varepsilon$$

$$\cos\lambda\, M_2 = (0,605260)\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + (\bar{1},08824n)\,\mathrm{sen}\,2\varepsilon$$

$$\frac{1}{a} M_3 = (0,486653n) + (\bar{1},866392)\cos\varepsilon + (\bar{2},34620n)\cos 2\varepsilon$$

$$N_1 = (0,307408)\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + (\bar{1},08824n)\,\mathrm{sen}\,2\varepsilon$$

$$\cos\lambda\, N_2 = (\bar{1},08824n) + (0,301030n)\cos\varepsilon + (\bar{1},08824)\cos 2\varepsilon$$

$$\frac{1}{a} N_3 = (\bar{1},56536)\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + (\bar{2},34620n)\,\mathrm{sen}\,2\varepsilon$$

$$\frac{\cos i}{a^2} M_5 = (\bar{1},998068)\,\mathrm{sen}\,\varepsilon + (\bar{2},7789n)\,\mathrm{sen}\,2\varepsilon$$

$$\frac{\cos i}{a^2} M_6 = (\bar{1},25920n) + (0,007539)\cos\varepsilon + (\bar{2},7821n)\cos 2\varepsilon$$

e le quantità in parentesi sono logaritmi.

Questi sviluppi sono stati controllati per $\varepsilon = 20°$ colle formule (5), (7) e (16) e ne riportiamo i risultati:

| $\varepsilon = 20°$ | $M_1$ | $\cos\lambda M_2$ | $\frac{1}{a} M_3$ | $N_1$ | $\cos\lambda N_2$ | $\frac{1}{a} N_3$ | $\frac{\cos i}{a^2} M_5$ | $\frac{\cos i}{a^2} M_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sviluppi precedenti | +3″,3531 | +1″,2994 | −2″,3927 | +0″,6154 | −1″,9080 | +0″,1114 | +0″,3019 | +0″,7282 |
| Formule (5), (7), (16) | +3,3530 | +1,2995 | −2,3928 | +0,6154 | −1,9080 | +0,1115 | +0,3019 | +0,7282 |
| Differenze | +0,0001 | −0,0001 | +0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | −0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |

Secondo le formule (4), (17) l. c., si trovò:

Tav. XVI.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | | $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | + 0″,85284 | | + 3″,70014 | | + 0″,15447 | | −0″,0423 | | −2″,0236 | |
| 1, 0 | − 0,29977 | +20″,8432 | −19,86523 | + 0″,09388 | − 0,50276 | + 0″,41570 | −0,0568 | +0″,6174 | +1,4525 | −0″,0470 |
| 2, 0 | − 0,2375 | − 1,7986 | + 1,67711 | − 0,2000 | + 0,1141 | − 0,6550 | +0,0509 | −1,9117 | −1,9713 | −0,0202 |
| 3, 0 | + 0,0185 | + 0,1645 | − 0,1673 | + 0,0152 | + 0,0202 | + 0,0600 | +0,0565 | +0,1817 | +0,1826 | −0,0596 |
| 4, 0 | − 0,0063 | 0. | − 0,0008 | − 0,0064 | − 0,0023 | + 0,0013 | −0,0086 | −0,0006 | −0,0007 | +0,0087 |
| 5, 0 | − 0,0003 | | + 0,0003 | − 0,0004 | + 0,0001 | − 0,0002 | +0,0003 | −0,0002 | −0,0002 | −0,0003 |
| − 3, − 1 | 0. | − 0,018 | − 0,018 | 0. | − 0,003 | − 0,007 | −0,013 | −0,018 | +0,018 | −0,013 |
| − 2 | + 0,205 | + 0,120 | + 0,109 | − 0,197 | + 0,078 | + 0,026 | +0,253 | +0,054 | −0,060 | +0,258 |
| − 1 | − 3,342 | − 0,207 | − 0,201 | + 3,184 | − 0,588 | + 0,238 | −1,078 | +0,498 | −0,452 | −1,175 |
| 0 | +14,795 | − 6,786 | − 5,870 | −14,437 | + 2,823 | − 1,282 | +0,288 | −0,125 | +0,135 | +1,066 |
| 1 | − 2,131 | + 1,312 | − 0,877 | + 4,696 | − 8,700 | + 3,691 | +0,165 | −0,084 | −0,900 | −2,164 |
| 2 | − 3,634 | + 1,691 | − 1,440 | − 2,914 | + 2,453 | + 0,330 | −0,476 | +0,021 | +0,218 | +0,837 |
| 3 | − 0,265 | − 0,478 | + 0,432 | − 0,325 | + 0,329 | − 0,170 | +0,928 | −0,394 | −0,413 | −0,947 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | | $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{dA}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 4 | — 0,116 | + 0,045 | — 0,040 | — 0,112 | — 0,032 | + 0,022 | —0,065 | +0,049 | +0,050 | +0,065 |
| 5 | — 0,001 | — 0,002 | + 0,002 | — 0,001 | — 0,001 | — 0,001 | —0,002 | —0,002 | —0,002 | +0,002 |
| — 3, — 2 | 0. | — 0,004 | — 0,003 | 0. | | | —0,002 | 0. | 0. | —0,002 |
| — 2 | — 0,012 | — 0,047 | — 0,047 | + 0,012 | + 0,001 | — 0,011 | +0,008 | —0,037 | +0,038 | +0,008 |
| — 1 | + 0,865 | + 1,325 | + 1,302 | — 0,869 | + 0,170 | + 0,264 | +0,221 | +0,391 | —0,402 | +0,217 |
| 0 | —13,622 | —14,098 | —13,810 | +13,407 | — 2,725 | — 2,820 | —1,452 | —1,168 | +1,347 | —1,500 |
| 1 | +63,684 | +52,894 | +51,408 | —61,445 | +20,030 | +18,136 | —0,077 | —0,050 | —1,029 | +0,715 |
| 2 | — 6,337 | — 6,598 | + 1,080 | — 4,670 | —61,206 | —51,076 | +1,076 | +0,871 | +1,634 | —1,858 |
| 3 | +18,015 | +14,932 | —15,377 | +18,543 | + 1,687 | + 3,494 | —0,115 | —0,323 | —0,442 | +0,259 |
| 4 | + 0,771 | — 0,088 | + 0,106 | + 0,744 | + 0,305 | + 0,206 | +0,369 | +0,335 | +0,339 | —0,376 |
| 5 | — 0,047 | — 0,061 | + 0,063 | — 0,048 | — 0,011 | — 0,008 | —0,027 | —0,018 | —0,018 | +0,027 |
| 6 | — 0,006 | — 0,005 | + 0,007 | — 0,004 | | | —0,001 | —0,001 | —0,001 | +0,001 |
| — 2, — 3 | — 0,009 | — 0,006 | — 0,006 | + 0,009 | | | —0,004 | —0,004 | +0,004 | —0,004 |
| — 1 | + 0,297 | + 0 085 | + 0,084 | — 0,294 | + 0,057 | + 0,016 | +0,078 | +0,014 | —0,015 | +0,080 |
| 0 | — 3,430 | — 0,059 | — 0,048 | + 3,369 | — 0,711 | — 0,031 | —0,364 | +0,164 | —0,154 | — 0,394 |
| 1 | +15,348 | — 7,371 | — 7,272 | —14,871 | + 4,852 | — 0,975 | +0,196 | —0,957 | +0,975 | +0,444 |
| 2 | —12,270 | +42,504 | +41,576 | + 9,830 | —15,752 | +11,445 | +0,203 | —0,034 | —0,518 | —0,602 |
| 3 | + 5,777 | — 3,151 | + 2,462 | + 3,046 | +11,191 | —41,400 | —0,202 | +0,718 | +1,208 | +0,387 |
| 4 | — 3,108 | +12,568 | —12,993 | — 3,233 | — 1,530 | + 1,008 | +0,161 | — 0,115 | —0,193 | —0,187 |
| 5 | + 0,297 | + 0,521 | — 0,514 | + 0,301 | — 0,045 | + 0,236 | —0,072 | +0,225 | +0,229 | +0,073 |
| 6 | + 0,030 | — 0,038 | + 0,039 | + 0,029 | + 0,003 | — 0,004 | + 0,004 | —0,011 | —0,011 | —0,004 |
| 7 | + 0,002 | — 0,004 | + 0,004 | + 0,002 | | | 0. | + 0,001 | | |
| — 2, — 4 | — 0,001 | 0. | 0. | + 0,001 | | | | | | |
| — 1, — 4 | + 0,037 | — 0,018 | — 0,018 | — 0,037 | + 0,006 | — 0,002 | +0,008 | —0,006 | + 0,006 | +0,008 |
| 0 | — 0,252 | + 0,317 | + 0,313 | + 0,246 | — 0,057 | + 0,064 | —0,003 | +0,066 | —0,068 | —0,005 |
| 1 | — 0,072 | — 2,717 | — 2,657 | + 0,093 | + 0,185 | — 0,622 | —0,201 | —0,190 | +0,220 | —0,187 |
| 2 | + 8,593 | + 8,399 | + 8,031 | — 8,602 | + 1,069 | + 3,411 | +0,475 | —0,132 | —0,048 | +0,521 |
| 3 | —21,555 | + 3,113 | + 4,806 | +20,939 | —10,588 | — 7,652 | +0,100 | + 0,130 | +0,247 | —0,402 |
| 4 | + 3,104 | + 3,151 | — 1,588 | + 2,735 | +21,110 | — 3,693 | —0,363 | +0,050 | +0,064 | +0,607 |
| 5 | — 6,393 | + 1,328 | — 1,360 | — 6,654 | — 0,534 | — 0,704 | + 0,089 | + 0,066 | +0,062 | —0,124 |
| 6 | — 0,244 | + 0,315 | — 0,319 | — 0,244 | — 0,143 | + 0,034 | —0,109 | +0,015 | +0,015 | +0,112 |
| 7 | + 0,032 | + 0,009 | — 0,009 | + 0,031 | + 0,002 | + 0,002 | +0,004 | 0. | 0. | —0,004 |
| — 1, — 5 | + 0,001 | — 0,002 | — 0,002 | + 0,001 | | | | | | |
| 0 | + 0,018 | + 0,040 | + 0,040 | — 0,018 | + 0,004 | + 0,008 | +0,009 | + 0,005 | —0,005 | +0,010 |
| 1 | — 0,359 | — 0,158 | — 0,155 | + 0,354 | — 0,066 | — 0,049 | —0,051 | +0,015 | —0,013 | —0,054 |
| 2 | + 2,145 | — 0,721 | — 0,733 | — 2,094 | + 0,574 | + 0,038 | +0,057 | —0,161 | +0,156 | +0,088 |
| 3 | — 2,816 | + 6,957 | + 6,918 | + 2,513 | — 2,312 | + 1,461 | +0,170 | +0,178 | —0,247 | +0,051 |
| 4 | — 5,442 | — 8,733 | — 7,969 | + 6,693 | + 2,036 | — 7,692 | —0,048 | +0,100 | +0,261 | +0,054 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | | $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{dA}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 5 | — 1,166 | + 2,441 | — 2,083 | — 0,248 | + 5,909 | + 8,400 | —0,092 | —0,151 | —0,250 | +0,142 |
| 6 | — 1,909 | — 2,484 | + 2,616 | — 1,995 | + 0,349 | — 0,319 | —0,018 | +0,056 | +0,069 | +0,012 |
| 7 | — 0,235 | — 0,054 | + 0,055 | — 0,240 | — 0,059 | — 0,067 | —0,027 | —0,042 | —0,043 | +0,028 |
| 8 | + 0,009 | + 0,016 | — 0,016 | + 0,010 | — 0,004 | 0. | 0. | +0,001 | +0,001 | 0. |
| 9 | + 0,004 | + 0,001 | — 0,001 | + 0,004 | | | | | | |
| 0, — 6 | + 0,003 | + 0,001 | + 0,001 | — 0,002 | | | | | | |
| 1 | — 0,041 | + 0,032 | + 0,032 | + 0,041 | — 0,007 | + 0,005 | —0,001 | +0,008 | —0,008 | —0,001 |
| 2 | + 0,053 | — 0,361 | — 0,351 | — 0,048 | + 0,041 | — 0,074 | —0,024 | —0,030 | +0,033 | —0,024 |
| 3 | + 1,035 | + 1,295 | + 1,246 | — 1,044 | + 0,079 | + 0,477 | +0,097 | —0,008 | —0,014 | +0,102 |
| 4 | — 4,327 | + 0,084 | + 0,330 | + 4,262 | — 1,471 | — 1,209 | —0,037 | +0,115 | —0,056 | —0,109 |
| 5 | + 2,679 | — 3,876 | — 4,577 | — 1,878 | + 4,492 | — 0,614 | —0,064 | —0,001 | +0,023 | +0,143 |
| 6 | — 1,542 | — 0,098 | — 0,388 | — 1,203 | — 2,350 | + 4,170 | +0,050 | —0,066 | —0,104 | —0,071 |
| 7 | + 0,642 | — 1,307 | + 1,384 | + 0,694 | + 0,204 | + 0,169 | —0,031 | +0,002 | +0,005 | +0,035 |
| 8 | — 0,024 | — 0,139 | + 0,144 | — 0,025 | + 0,026 | — 0,050 | +0,011 | —0,019 | —0,018 | —0,012 |
| 9 | — 0,012 | + 0,010 | — 0,011 | — 0,011 | + 0,001 | — 0,001 | —0,001 | —0,001 | —0,001 | +0,001 |
| 10 | — 0,002 | + 0,004 | — 0,004 | — 0,002 | | | | | | |
| 1, — 7 | 0. | + 0,008 | + 0,007 | 0. | | | +0,001 | +0,001 | —0,001 | +0,001 |
| 2 | — 0,0442 | — 0,0322 | — 0,0310 | + 0,0438 | — 0,0068 | — 0,0096 | —0,0077 | +0,0011 | —0,0008 | —0,0069 |
| 3 | + 0,296 | — 0,052 | — 0,058 | — 0,290 | + 0,075 | + 0,019 | +0,011 | —0,023 | +0,022 | +0,015 |
| 4 | — 0,547 | + 0,958 | + 0,961 | + 0,504 | — 0,337 | + 0,164 | +0,029 | +0,047 | —0,055 | +0,012 |
| 5 | — 0,987 | — 2,155 | — 2,055 | + 1,162 | + 0,400 | — 1,164 | —0,058 | +0,013 | +0,044 | —0,039 |
| 6 | + 2,056 | + 0,428 | — 0,238 | — 2,310 | + 1,275 | + 2,110 | —0,015 | —0,035 | —0,054 | +0,039 |
| 7 | — 0,268 | — 0,793 | + 0,521 | — 0,484 | — 2,176 | — 0,144 | +0,036 | +0,008 | +0,014 | —0,057 |
| 8 | + 0,664 | 0. | — 0,003 | + 0,703 | — 0,074 | + 0,138 | —0,006 | —0,013 | —0,013 | +0,010 |
| 9 | + 0,070 | — 0,049 | + 0,049 | + 0,071 | + 0,025 | — 0,003 | +0,010 | 0. | +0,001 | —0,010 |
| 10 | — 0,004 | — 0,001 | + 0,001 | — 0,004 | | | | | | |
| 11 | + 0,001 | + 0,001 | — 0,001 | + 0,001 | | | | | | |
| 2, — 8 | — 0,006 | 0. | 0. | + 0,006 | | | | | | |
| 3 | + 0,018 | — 0,044 | — 0,044 | — 0,017 | + 0,010 | — 0,006 | | | | |
| 4 | + 0,110 | + 0,193 | + 0,189 | — 0,115 | — 0,004 | + 0,064 | | | | |
| 5 | — 0,678 | — 0,085 | — 0,049 | + 0,680 | — 0,182 | — 0,190 | | | | |
| 6 | + 0,819 | — 0,928 | — 1,034 | — 0,721 | + 0,749 | — 0,035 | | | | |
| 7 | + 0,170 | + 0,906 | + 0,900 | — 0,609 | — 0,737 | + 1,064 | | | | |
| 8 | + 0,321 | — 0,304 | + 0,352 | + 0,142 | — 0,362 | — 0,913 | | | | |
| 9 | + 0,130 | + 0,266 | — 0,289 | + 0,133 | — 0,082 | — 0,007 | | | | |
| 10 | + 0,035 | + 0,021 | — 0,019 | + 0,034 | + 0,004 | + 0,013 | | | | |
| 11 | + 0,001 | — 0,003 | + 0,003 | + 0,001 | | | | | | |
| 3, — 9 | — 0,005 | — 0,006 | — 0,008 | + 0,005 | | | | | | |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | | $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | | $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 4, — 9 | + 0,042 | 0. | — 0,001 | — 0,042 | + 0,010 | + 0,007 | | | | |
| 5 | — 0,098 | + 0,124 | + 0,122 | + 0,089 | — 0,051 | + 0,016 | | | | |
| 6 | — 0,107 | — 0,387 | — 0,375 | + 0,133 | + 0,078 | — 0,160 | | | | |
| 7 | + 0,600 | + 0,189 | + 0,101 | — 0,645 | + 0,177 | + 0,391 | | | | |
| 8 | — 0,325 | + 0,215 | + 0,448 | + 0,237 | — 0,650 | — 0,117 | | | | |
| 9 | + 0,211 | + 0,081 | + 0,008 | + 0,196 | + 0,292 | — 0,320 | | | | |
| 10 | — 0,081 | + 0,103 | — 0,111 | — 0,087 | — 0,012 | — 0,039 | | | | |
| 11 | — 0,001 | + 0,018 | — 0,017 | — 0,001 | + 0,003 | + 0,003 | | | | |
| 12 | + 0,001 | + 0,001 | — 0,001 | + 0,001 | | | | | | |
| 4,—10 | + 0,005 | — 0,005 | — 0,005 | — 0,005 | | | | | | |
| 5 | + 0,008 | + 0,030 | + 0,030 | — 0,008 | — 0,002 | + 0,008 | | | | |
| 6 | — 0,094 | — 0,029 | — 0,022 | + 0,091 | — 0,017 | — 0,032 | | | | |
| 7 | + 0,172 | — 0,148 | — 0,164 | — 0,166 | + 0,110 | + 0,010 | | | | |
| 8 | + 0,052 | + 0,309 | + 0,318 | — 0,114 | — 0,157 | + 0,187 | | | | |
| 9 | — 0,151 | — 0,078 | + 0,031 | + 0,246 | — 0,108 | — 0,314 | | | | |
| 10 | + 0,019 | + 0,098 | — 0,097 | + 0,067 | + 0,205 | + 0,016 | | | | |
| 11 | — 0,072 | + 0,013 | — 0,010 | — 0,074 | + 0,023 | + 0,008 | | | | |
| 12 | — 0,015 | — 0,010 | + 0,010 | — 0,015 | — 0,003 | — 0,002 | | | | |
| 13 | + 0,002 | — 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | | | | | | |
| 5,—11 | + 0,003 | + 0,004 | + 0,004 | — 0,003 | | | | | | |
| 6 | — 0,016 | + 0,007 | + 0,007 | + 0,016 | — 0,006 | — 0,002 | | | | |
| 7 | — 0,006 | — 0,057 | — 0,053 | + 0,008 | + 0,016 | — 0,013 | | | | |
| 8 | + 0,118 | + 0,051 | + 0,045 | — 0,124 | + 0,021 | + 0,060 | | | | |
| 9 | — 0,126 | + 0,094 | + 0,127 | + 0,112 | — 0,133 | — 0,038 | | | | |
| 10 | + 0,002 | — 0,074 | — 0,101 | + 0,080 | + 0,117 | — 0,115 | | | | |
| 11 | — 0,036 | + 0,017 | — 0,053 | — 0,035 | + 0,036 | + 0,088 | | | | |
| 12 | — 0,012 | — 0,028 | + 0,028 | — 0,012 | + 0,001 | + 0,017 | | | | |
| 13 | — 0,002 | — 0,007 | + 0,007 | — 0,002 | 0. | — 0,003 | | | | |
| 14 | 0. | + 0,001 | — 0,001 | 0. | | | | | | |

Queste funzioni sono state sottoposte a duplice controllo. Nel 1° si è fatto $\varepsilon = 180°$, $\mu = 0$ potendosi, algoritmicamente parlando, considerare come indipendenti gli archi $\varepsilon$ e $\mu\varepsilon$. Questo controllo verifica bene i termini che provengono dal prodotto delle derivate di $\Omega$ per $M_1$, $M_3$, $N_2$, $M_6$ com'è facile intendere: ma lascia incontrollati i termini venienti dai prodotti per $M_2$, $N_1$, $N_3$, $M_5$. — Per controllare questi ultimi si è fatto l'altro controllo, prendendo il 1° termine $\varepsilon$ di ogni argomento come eguale a 45°, e ciascun $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$. Con ciò il controllo senza perdere di efficacia è riuscito molto più semplice, come risulta dalle formule di riduzione al 1° quadrante.

Questo secondo controllo non servirebbe in tutto pei termini provenienti dai prodotti per $M_1$, $M_3$, $N_2$, $M_6$, ed ecco perchè si è dovuto eseguire l'uno e l'altro controllo. Per le sezioni $i' = 0$ si è fatto il controllo per $\varepsilon = \mu 180°$, perchè mancando la parte $\mu\varepsilon$ dell'argomento, ciascuno dei controlli precedenti non riuscirebbe completo. — Si intende poi che per le funzioni $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}, \frac{dA}{d\varepsilon}$ è bastato di fare un solo dei due controlli.

Si ebbe così la seguente tavola di controllo:

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | + 15″,407 | + 16″,992 | — 5″,537 | —101″,723 | — 89″,919 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | + 15,405 | + 16,989 | — 5,537 | —101,723 | — 89,922 |
| Differenza | 0,002 | 0,003 | 0. | 0. | + 0,003 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 40″,509 | + 64″,888 | + 39″,147 | + 10″,464 | — 0″,609 | — 21″,064 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 40,509 | + 64,889 | + 39,151 | + 10,467 | — 0,608 | — 21,067 |
| Differenza | 0. | — 0,001 | — 0,004 | — 0,003 | — 0,001 | + 0,003 |

| $\varepsilon = 180°$ $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 10″,140 | + 3″,335 | + 3″,012 | + 4″,395 | + 1″,642 | — 2″,061 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 10,142 | + 3,337 | + 3,013 | + 4,393 | + 1,638 | — 2,058 |
| Differenza | + 0,002 | — 0,002 | — 0,001 | + 0,002 | + 0,004 | — 0,003 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 9$ | | $i_1 = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 1″,178 | — 0″,473 | + 0″,005 | + 0″,546 | + 0″,259 | — 0″,091 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 1,177 | — 0,474 | + 0,008 | + 0,547 | + 0,259 | — 0,094 |
| Differenza | — 0,001 | + 0,001 | — 0,003 | — 0,001 | 0. | + 0,003 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 8″,946 | — 6″,578 | —25″,214 | —50″,056 | +53″,310 |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 8,945 | — 6,579 | —25,214 | —50,057 | +53,308 |
| Differenza | — 0,001 | + 0,001 | 0. | + 0,001 | + 0,002 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | +33″,804 | +21″,820 | + 5″,674 | —20″,234 | —10″,792 | + 0″,214 |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | +33,804 | +21,820 | + 5,675 | —20,236 | —10,794 | + 0,214 |
| Differenza | 0. | 0. | — 0,001 | + 0,002 | + 0,002 | 0. |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | + 1″,658 | + 5″,182 | + 2″,226 | — 1″,522 | — 1″,032 | — 0″,842 |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | + 1,658 | + 5,180 | + 2,227 | — 1,523 | — 1,033 | — 0,842 |
| Differenza | 0. | + 0,002 | — 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | 0. |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 0″,246 | + 0″,598 | + 0″,316 | + 0″,024 | — 0″,050 | — 0″,122 |
| $a \cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 0,246 | + 0,598 | + 0,318 | + 0,025 | — 0,054 | — 0,120 |
| Differenza | 0. | 0. | — 0,002 | — 0,001 | + 0,004 | — 0,002 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 0″,485 | +14″,283 | — 4″,654 | —85″,504 | —75″,582 |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 0,485 | +14,285 | — 4,655 | —85,501 | —75,587 |
| Differenza | 0. | — 0,002 | + 0,001 | — 0,003 | + 0,005 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | —34″,049 | +54″,542 | +32″,905 | + 8″,795 | — 0″,512 | —17″,705 |
| | Mediante lo sviluppo: | —34,045 | +54,541 | +32,908 | + 8,794 | — 0,513 | —17,710 |
| | Differenza | — 0,004 | + 0,001 | — 0,003 | + 0,001 | + 0,001 | + 0,005 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 8″,524 | + 2″,803 | + 2″,532 | + 3″,694 | + 1″,380 | — 1″,732 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 8,523 | + 2,801 | + 2,533 | + 3,694 | + 1,378 | — 1,732 |
| | Differenza | — 0,001 | + 0,002 | — 0,001 | 0. | + 0,002 | 0. |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 0″,990 | — 0″,398 | + 0″,004 | + 0″,459 | + 0″,210 | — 0″,076 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 0,995 | — 0,399 | + 0,005 | + 0,457 | + 0,214 | — 0,074 |
| | Differenza | + 0,005 | + 0,001 | — 0,001 | + 0,002 | — 0,004 | — 0,002 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{dA}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 0″,9139 | + 2″,092 | + 6″,523 | + 5″,252 | — 4″,946 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 0,9140 | + 2,092 | + 6,523 | + 5,248 | — 4,941 |
| | Differenza | + 0,0001 | 0. | 0. | + 0,004 | — 0,005 |

| $\varepsilon = 180°$ , $\mu\varepsilon = 0$ | | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{dA}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 3″,275 | — 2″,178 | — 0″,577 | + 1″,942 | + 1″,033 | 0″. |
| | Mediante lo sviluppo: | — 3,270 | — 2,175 | — 0,573 | + 1,944 | + 1,035 | — 0,003 |
| | Differenza | — 0,005 | — 0,003 | — 0,004 | — 0,002 | — 0,002 | + 0,003 |

| $\varepsilon = 180°$ ; $\mu\varepsilon = 0$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{dA}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | — 0,″146 | — 0,″501 | — 0,″215 | + 0,″146 |
| $\frac{dA}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | — 0,150 | — 0,496 | — 0,213 | + 0,144 |
| Differenza | + 0,004 | — 0,005 | — 0,002 | + 0,002 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | | + 4,″325 | + 9,″158 | +36,″605 | +32,″156 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | | + 4,325 | + 9,161 | +36,601 | +32,152 |
| Differenza | | 0. | — 0,003 | + 0,004 | + 0,004 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | + 6,″811 | +38,″136 | +14,″397 | + 9,″885 | + 8,″341 | + 3,″751 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | + 6,808 | +38,135 | +14,395 | + 9,890 | + 8,341 | + 3,750 |
| Differenza | + 0,003 | + 0,001 | + 0,002 | — 0,005 | 0. | + 0,001 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | + 1,″915 | + 3,″749 | + 1,″074 | + 1,″435 | + 0,″697 | + 0,″319 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | + 1,913 | + 3,749 | + 1,074 | + 1,436 | + 0,697 | + 0,320 |
| Differenza | + 0,002 | 0. | 0. | — 0,001 | 0. | — 0,001 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | + 0,″187 | + 0,″193 | + 0,″100 | + 0,″100 | + 0,″023 | + 0,″001 |
| $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | + 0,188 | + 0,191 | + 0,101 | + 0,101 | + 0,021 | 0. |
| Differenza | — 0,001 | + 0,002 | — 0,001 | — 0,001 | + 0,002 | 0. |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | | $-7''{,}012$ | $+1''{,}529$ | $+41''{,}395$ | $-14''{,}727$ |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | | $-7{,}017$ | $+1{,}528$ | $+41{,}395$ | $-14{,}728$ |
| Differenza | | $+0{,}005$ | $+0{,}001$ | 0. | $+0{,}001$ |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | $+20''{,}706$ | $+3''{,}799$ | $+1''{,}898$ | $+15''{,}165$ | $+5''{,}260$ | $+5''{,}248$ |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | $+20{,}706$ | $+3{,}798$ | $+1{,}903$ | $+15{,}162$ | $+5{,}256$ | $+5{,}249$ |
| Differenza | 0. | $+0{,}001$ | $-0{,}005$ | $+0{,}003$ | $+0{,}004$ | $-0{,}001$ |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | $+4''{,}144$ | $+1''{,}830$ | $+1''{,}360$ | $+1''{,}859$ | $+0''{,}679$ | $+0''{,}945$ |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | $+4{,}142$ | $+1{,}831$ | $+1{,}362$ | $+1{,}857$ | $+0{,}677$ | $+0{,}943$ |
| Differenza | $+0{,}002$ | $-0{,}001$ | $-0{,}002$ | $+0{,}002$ | $+0{,}002$ | $+0{,}002$ |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | $+0''{,}459$ | $+0''{,}330$ | $+0''{,}202$ | $+0''{,}197$ | $+0''{,}080$ | $+0''{,}107$ |
| $\cos\lambda \frac{d\psi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | $+0{,}458$ | $+0{,}331$ | $+0{,}202$ | $+0{,}196$ | $+0{,}082$ | $+0{,}107$ |
| Differenza | $+0{,}001$ | $-0{,}001$ | 0. | $+0{,}001$ | $-0{,}002$ | 0. |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ Calcolato direttamente: | | $-4''{,}838$ | $+1''{,}816$ | $-8''{,}287$ | $-36''{,}092$ |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ Mediante lo sviluppo: | | $-4{,}839$ | $+1{,}819$ | $-8{,}288$ | $-36{,}094$ |
| Differenza | | $+0{,}001$ | $-0{,}003$ | $+0{,}001$ | $+0{,}002$ |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 5,010 | —27,750 | —14,373 | — 5,353 | — 6,451 | — 4,439 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 5,011 | —27,750 | —14,373 | — 5,356 | — 6,453 | — 4,439 |
| | Differenza | + 0,001 | 0. | 0. | + 0,003 | + 0,002 | 0. |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | | $i' = 8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 1,814 | — 3,846 | — 1,458 | — 1,353 | — 0,808 | — 0,500 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 1,810 | — 3,844 | — 1,456 | — 1,354 | — 0,809 | — 0,500 |
| | Differenza | — 0,004 | — 0,002 | — 0,002 | + 0,001 | + 0,001 | 0. |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 9$ | | $i' = 10$ | | $i' = 11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 0,257 | — 0,329 | — 0,125 | — 0,150 | — 0,068 | — 0,043 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 0,261 | — 0,328 | — 0,122 | — 0,153 | — 0,065 | — 0,041 |
| | Differenza | + 0,004 | — 0,001 | — 0,003 | + 0,003 | — 0,003 | — 0,002 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 0$ | $i' = 1$ | | $i' = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | — 1,4303 | — 0,810 | — 0,552 | + 0,746 | — 1,189 |
| | Mediante lo sviluppo: | — 1,4202 | — 0,812 | — 0,555 | + 0,743 | — 1,189 |
| | Differenza | — 0,0001 | + 0,002 | + 0,003 | + 0,003 | 0. |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 3$ | | $i' = 4$ | | $i' = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | + 0,075 | — 0,051 | — 0,112 | + 0,256 | + 0,102 | + 0,042 |
| | Mediante lo sviluppo: | + 0.073 | — 0,052 | — 0,114 | + 0,255 | + 0,102 | + 0,043 |
| | Differenza | + 0,002 | + 0,001 | + 0,002 | + 0,001 | 0. | — 0,001 |

| $\varepsilon = 45°$ , $\mu\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$ | | $i' = 6$ | | $i' = 7$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | Calcolato direttamente: | + 0″,079 | + 0″,026 | + 0″,023 | + 0″,044 |
| | Mediante lo sviluppo: | + 0,078 | + 0,025 | + 0,022 | + 0,043 |
| | Differenza | + 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | + 0,001 |

## Integrazione delle funzioni $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}, \frac{d\psi}{d\varepsilon}, \frac{d\xi}{d\varepsilon}, \frac{d\Xi}{d\varepsilon}, \frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$.

Bisogna anzitutto formare la tavola dei divisori d'integrazione, i quali si deducono dalla forma generale: $i - i'\mu$

essendo $i$, $i'$ interi di cui $i'$ è sempre positivo e va da *1* a *10*; $i$ invece è positivo, nullo e negativo. Si ha poi che $\log \mu = \bar{1},4587815$.

La tavola seguente contiene i logaritmi di tutti i divisori, ridotti a moltiplicatori:

Tav. XVII.

| $i$ , $i'$ | $i - i'\mu$ | $i$ , $i'$ | $i - i'\mu$ | $i$ , $i'$ | $i - i'\mu$ | $i$ , $i'$ | $i - i'\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 3, 1 | Ī,48312n | 6, 3 | Ī,2893 | 5, 6 | Ī,48490 | 4, 9 | Ī,85025 |
| — 2, 1 | Ī,64062n | | | 6 | Ī,36914 | 5 | Ī,61762 |
| — 1 | Ī,89022n | — 1, 4 | Ī,66748n | 7 | Ī,2778 | 6 | Ī,46700 |
| 0 | 0,541211n | 0 | Ī,93915n | 8 | Ī,2025 | 7 | Ī,35536 |
| 1 | 0,147276 | 1 | 0,82274n | 9 | Ī,138 | 8 | Ī,26664 |
| 2 | Ī,76640 | 2 | 0,07079 | | | 9 | Ī,19300 |
| 3 | Ī,56665 | 3 | Ī,73292 | 2, 7 | Ī,87943n | 10 | Ī,1300 |
| 4 | Ī,43035 | 4 | Ī,54523 | 3 | 0,00577 | 11 | Ī,075 |
| | | 5 | Ī,41460 | 4 | Ī,70180 | | |
| — 2, 2 | Ī,58919n | 6 | Ī,3143 | 5 | Ī,52475 | 4, 10 | Ī,9492 |
| — 1 | Ī,80267n | 7 | Ī,2319 | 6 | Ī,3993 | 5 | Ī,6728 |
| 0 | 0,240181n | | | 7 | Ī,3022 | 6 | Ī,5053 |
| 1 | 0,371816 | 0, 5 | Ī,8422n | 8 | Ī,2228 | 7 | Ī,3847 |
| 2 | Ī,84625 | 1 | 0,35853n | 9 | Ī,156 | 8 | Ī,2904 |
| 3 | Ī,61533 | 2 | 0,25026 | | | 9 | Ī,2130 |
| 4 | Ī,46537 | 3 | Ī,80632 | 2, 8 | 0,52170n | 10 | Ī,1473 |
| 5 | Ī,35411 | 4 | Ī,59140 | 3 | 0,15540 | 11 | Ī,090 |
| | | 5 | Ī,44830 | 4 | Ī,76980 | 12 | Ī,040 |
| — 2, 3 | Ī,54321n | 6 | Ī,3408 | 5 | Ī,56864 | | |
| — 1 | Ī,72984n | 7 | Ī,2548 | 6 | Ī,4318 | 6, 11 | Ī,547 |
| 0 | 0,06409n | 8 | Ī,1830 | 7 | Ī,3279 | 7 | Ī,416 |
| 1 | 0,862646 | | | 8 | Ī,2440 | 8 | Ī,315 |
| 2 | Ī,94416 | 1, 6 | 0,13930n | 9 | Ī,174 | 9 | Ī,234 |
| 3 | Ī,67016 | 2 | 0,56160 | 10 | Ī,114 | 10 | Ī,165 |
| 4 | Ī,50346 | 3 | Ī,89473 | | | 11 | Ī,106 |
| 5 | Ī,3833 | 4 | Ī,64315 | 3, 9 | 0,3854 | | |

Integrando quindi le funzioni della tavola XVI, senza per ora aggiungere le costanti arbitrarie, trovossi:

Tav. XVIII.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\varphi$ | | $a\cos\lambda\psi$ | | $\xi$ | | $\Xi$ | | $A$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| | $+\ 0''{,}85284\varepsilon$ | | $+\ 3''{,}70014\varepsilon$ | | $+\ 0''{,}15447\varepsilon$ | | $-\ 0''{,}0423\varepsilon$ | | $-\ 2''{,}0236\varepsilon$ | |
| 1, 0 | — 20″,8432 | — 0″,29977 | — 0″,0939 | — 19″,8652 | — 0″,4157 | — 0″,5028 | —0″,6174 | —0″,0568 | +0″,0470 | +1″,4525 |
| 2 | + 0,8993 | — 0,1188 | + 0,1000 | + 0,8385 | + 0,3275 | + 0,0570 | +0,9558 | +0,0255 | +0,0101 | —0,9856 |
| 3 | — 0,055 | + 0,006 | — 0,004 | — 0,056 | — 0,020 | + 0,007 | —0,060 | +0,019 | +0,020 | +0,061 |
| 4 | 0. | — 0,001 | + 0,001 | 0. | 0. | 0. | 0. | —0,002 | —0,002 | 0. |
| — 3, — 1 | — 0,005 | 0. | 0. | + 0,005 | — 0,002 | + 0,001 | | | | |
| — 2 | + 0,052 | — 0,090 | — 0,086 | — 0,048 | + 0,011 | — 0,034 | +0,02 | —0,11 | +0,11 | +0,02 |
| — 1 | — 0,159 | + 2,596 | + 2,473 | + 0,156 | + 0,185 | + 0,457 | +0,39 | +0,84 | —0,91 | +0,35 |
| 0 | — 23,595 | — 51,444 | — 50,198 | + 20,410 | — 4,458 | — 9,816 | —0,43 | —1,00 | +3,71 | —0,47 |
| 1 | — 1,842 | — 2,991 | — 6,592 | — 1,231 | — 5,181 | —12,212 | +0,12 | +0,23 | +3,04 | —1,26 |
| 2 | — 0,987 | — 2,122 | + 1,702 | — 0,841 | — 0,193 | + 1,433 | —0,01 | —0,28 | —0,49 | +0,13 |
| 3 | + 0,176 | — 0,098 | + 0,120 | + 0,159 | + 0,063 | + 0,121 | +0,14 | +0,34 | +0,35 | —0,15 |
| 4 | — 0,012 | — 0,031 | + 0,030 | — 0,011 | — 0,006 | — 0,009 | —0,01 | —0,02 | —0,02 | +0,01 |
| — 2, — 2 | — 0,018 | + 0,004 | + 0,004 | + 0,018 | — 0,004 | 0. | —0,01 | 0. | 0. | +0,01 |
| — 1 | + 0,841 | — 0,549 | — 0,552 | — 0,827 | + 0,168 | — 0,108 | +0,25 | —0,14 | +0,14 | +0,25 |
| 0 | — 24,510 | + 23,682 | + 23,308 | + 24,009 | — 4,903 | + 4,737 | —2,03 | +2,52 | —2,61 | —2,34 |
| 1 | —124,515 | +149,915 | +144,645 | +121,017 | —42,693 | +47,152 | +0,12 | —0,18 | —1,68 | —2,42 |
| 2 | + 4,631 | — 4,448 | + 3,278 | + 0,758 | +35,848 | —42,958 | —0,61 | +0,75 | +1,30 | +1,15 |
| 3 | — 6,157 | + 7,429 | — 7,647 | — 6,342 | — 1,441 | + 0,696 | +0,13 | —0,05 | —0,11 | —0,17 |
| 4 | + 0,026 | + 0,224 | — 0,217 | + 0,031 | — 0,060 | + 0,089 | —0,10 | +0,11 | +0,11 | +0,10 |
| 5 | + 0,014 | — 0,010 | + 0,010 | + 0,014 | + 0,002 | — 0,002 | +0,01 | | —0,01 | —0,01 |
| — 2, — 3 | + 0,003 | — 0,002 | + 0,003 | + 0,002 | | | | | | |
| — 1 | — 0,159 | + 0,046 | — 0,158 | — 0,045 | + 0,009 | — 0,031 | +0,01 | — 0,04 | +0,04 | +0,01 |
| 0 | + 3,975 | — 0,068 | + 3,905 | + 0,056 | — 0,036 | + 0,824 | +0,19 | +0,42 | —0,45 | +0,18 |
| 1 | +111,866 | + 53,725 | +108,390 | — 53,002 | + 7,106 | +35,364 | +6,97 | +1,43 | —3,24 | +7,10 |
| 2 | — 10,790 | — 37,376 | — 8,644 | + 36,560 | —10,064 | —13,851 | +0,03 | +0,18 | +0,53 | —0,45 |
| 3 | + 2,703 | + 1,474 | — 1,425 | + 1,152 | +19,371 | + 5,236 | —0,33 | —0,09 | —0,18 | +0,56 |
| 4 | — 0,991 | — 4,006 | + 1,031 | — 4,142 | — 0,321 | — 0,488 | +0,04 | + 0,05 | +0,06 | —0,06 |
| 5 | + 0,072 | — 0,126 | — 0,073 | — 0,124 | — 0,057 | — 0,011 | —0,06 | —0,02 | —0,02 | +0,05 |
| 6 | + 0,006 | + 0,007 | — 0,006 | + 0,007 | + 0,001 | + 0,001 | | | | |
| — 1, — 4 | — 0,008 | — 0,017 | — 0,017 | + 0,008 | — 0,001 | — 0,003 | | | | |
| 0 | + 0,275 | + 0,219 | + 0,214 | — 0,272 | + 0,056 | + 0,050 | +0,06 | 0. | 0. | +0,06 |
| 1 | — 18,065 | + 0,478 | + 0,618 | + 17,666 | — 4,136 | — 1,230 | —1,26 | +1,34 | —1,24 | —1,46 |
| 2 | — 9,886 | + 10,144 | + 10,125 | + 9,453 | — 4,015 | + 1,258 | +0,16 | +0,56 | —0,61 | —0,06 |
| 3 | — 1,683 | — 11,653 | — 11,321 | + 2,598 | + 4,137 | — 5,724 | —0,07 | +0,05 | + 0.22 | + 0,13 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\varphi$ | | $a \cos \lambda\psi$ | | $\xi$ | | $\Xi$ | | $\Lambda$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 4, — 4 | — 1,106 | + 1,089 | — 0,960 | — 0,557 | + 1,296 | + 7,408 | —0,02 | —0,13 | —0,21 | +0,02 |
| 5 | — 0,345 | — 1,661 | + 1,729 | — 0,353 | + 0,183 | — 0,139 | —0,01 | +0,02 | +0,03 | +0,02 |
| 6 | — 0,065 | — 0,050 | + 0,050 | — 0,066 | — 0,007 | — 0,029 | 0. | —0,02 | —0,02 | 0. |
| 7 | — 0,001 | + 0,005 | — 0,005 | — 0,001 | | | | | | |
| 0, — 5 | + 0,028 | — 0,012 | — 0,012 | — 0,028 | + 0,006 | — 0,003 | | | | |
| 1 | — 0,361 | + 0,820 | + 0,808 | + 0,354 | — 0,112 | + 0,150 | +0,03 | +0,12 | —0,12 | +0,03 |
| 2 | + 1,283 | + 3,817 | + 3,726 | — 1,304 | — 0,068 | + 1,021 | +0,29 | +0,10 | —0,16 | +0,28 |
| 3 | — 4,454 | — 1,803 | — 1,609 | + 4,429 | — 0,935 | — 1,480 | —0,11 | +0,11 | —0,03 | —0,16 |
| 4 | + 3,408 | — 2.124 | — 2,612 | — 3,110 | + 3,002 | + 0,795 | —0,04 | —0,02 | —0,03 | +0,10 |
| 5 | — 0,685 | — 0,327 | + 0,070 | — 0,585 | — 2,358 | + 1,659 | +0,04 | —0,03 | —0,04 | —0,07 |
| 6 | + 0,544 | — 0,418 | + 0,437 | + 0,573 | + 0,070 | + 0,076 | —0,01 | 0. | 0. | +0,01 |
| 7 | + 0,010 | — 0.042 | + 0,043 | + 0,010 | + 0,012 | — 0,011 | +0,01 | 0. | 0. | —0,01 |
| 8 | — 0,002 | + 0,001 | — 0,001 | — 0,002 | 0. | — 0,001 | | | | |
| 1, — 6 | + 0,044 | + 0,056 | + 0,056 | — 0,044 | + 0,009 | + 0,010 | | | | |
| 2 | + 1,316 | + 0,193 | + 0,175 | — 1,279 | + 0,270 | + 0,149 | +0,11 | —0,09 | +0,09 | +0,12 |
| 3 | — 1,016 | + 0,812 | + 0,819 | + 0,978 | — 0,374 | + 0,062 | +0,01 | +0,08 | —0,08 | —0,01 |
| 4 | — 0,037 | — 1,902 | — 1,874 | + 0,145 | + 0,531 | — 0,647 | —0,05 | —0,02 | +0,05 | —0,02 |
| 5 | + 1,184 | + 0,818 | + 0,573 | — 1,398 | + 0,188 | + 1,372 | 0. | —0,02 | —0,04 | +0,01 |
| 6 | + 0,023 | — 0,361 | + 0,281 | — 0,091 | — 0,975 | — 0,550 | +0,02 | +0,01 | +0,02 | —0,02 |
| 7 | + 0,248 | + 0,122 | — 0,131 | + 0,262 | — 0,032 | + 0,039 | | | | |
| 8 | + 0,022 | — 0,004 | + 0,004 | + 0,023 | + 0,008 | + 0,004 | | | | |
| 9 | — 0,001 | — 0,002 | + 0,001 | — 0,001 | | | | | | |
| 1, — 7 | + 0,008 | 0. | 0. | — 0,007 | | | | | | |
| 2 | — 2,4394 | + 3,3485 | + 3,3182 | + 2,3485 | — 0,7273 | + 0,5152 | +0,08 | +0,58 | —0,52 | +0,06 |
| 3 | + 0,053 | + 0,300 | + 0,294 | — 0,059 | — 0,019 | + 0,076 | +0,02 | +0,01 | —0,01 | +0,02 |
| 4 | — 0,482 | — 0,275 | — 0,254 | + 0,484 | — 0,082 | — 0,170 | —0,02 | +0,01 | —0,01 | —0,03 |
| 5 | — 0,721 | — 0,330 | — 0,389 | — 0,688 | + 0,390 | + 0,134 | 0. | —0,02 | +0,01 | +0,01 |
| 6 | — 0,107 | + 0,516 | + 0,579 | — 0,060 | — 0,529 | + 0,320 | | | | |
| 7 | + 0,159 | — 0,054 | + 0,097 | + 0,104 | + 0,029 | — 0,436 | | | | |
| 8 | 0. | + 0,111 | — 0,117 | 0. | — 0,023 | — 0,012 | | | | |
| 9 | + 0,007 | + 0,010 | — 0,010 | + 0,007 | 0. | + 0,003 | | | | |
| 2, — 8 | 0. | + 0,020 | + 0,020 | 0. | | | | | | |
| 3 | + 0,063 | + 0,026 | + 0,026 | — 0,063 | + 0,009 | + 0,014 | | | | |
| 4 | — 0,114 | + 0,065 | + 0,068 | + 0,111 | — 0,038 | — 0,002 | | | | |
| 5 | + 0,032 | — 0,251 | — 0,252 | — 0,018 | + 0,070 | — 0,067 | | | | |
| 6 | + 0,251 | + 0,221 | + 0,195 | — 0,279 | + 0,009 | + 0,202 | | | | |
| 7 | — 0,193 | + 0,036 | + 0,130 | + 0,191 | — 0,226 | — 0,157 | | | | |
| 8 | + 0,053 | + 0,056 | — 0,025 | + 0,062 | + 0,160 | — 0,063 | | | | |
| 9 | — 0,040 | + 0,019 | — 0,020 | — 0,043 | + 0,001 | — 0,012 | | | | |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $a\varphi$ | | $a\cos\lambda\psi$ | | $\xi$ | | $\Xi$ | | $\Lambda$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 10, — 8 | — 0″,003 | + 0″,005 | — 0″,005 | — 0″,003 | — 0″,002 | 0″. | | | | |
| + 3, — 9 | + 0,015 | — 0,012 | — 0,012 | — 0,019 | | | | | | |
| 4 | 0. | + 0,030 | + 0,030 | 0. | — 0,005 | + 0,007 | | | | |
| 5 | — 0,051 | — 0,040 | — 0,037 | + 0,051 | — 0,007 | — 0,021 | | | | |
| 6 | + 0,113 | — 0,031 | — 0,039 | — 0,110 | + 0,047 | + 0,023 | | | | |
| 7 | — 0,043 | + 0,136 | + 0,146 | + 0,023 | — 0,088 | + 0,040 | | | | |
| 8 | — 0,040 | — 0,060 | — 0,044 | + 0,083 | + 0,021 | — 0,120 | | | | |
| 9 | — 0,013 | + 0,033 | — 0,031 | + 0,001 | + 0,050 | + 0,045 | | | | |
| 10 | — 0,014 | — 0,011 | + 0,012 | — 0,015 | + 0,005 | — 0,001 | | | | |
| 11 | — 0,002 | 0. | 0. | — 0,002 | | | | | | |
| 4, — 10 | + 0,004 | + 0,004 | + 0,004 | — 0,004 | | | | | | |
| 5 | — 0,014 | + 0,004 | + 0,004 | + 0,014 | — 0,004 | — 0,001 | | | | |
| 6 | + 0,009 | — 0,030 | — 0,029 | — 0,007 | + 0,010 | — 0,005 | | | | |
| 7 | + 0,036 | + 0,042 | + 0,040 | — 0,040 | — 0,002 | + 0,026 | | | | |
| 8 | — 0,060 | + 0,010 | + 0,032 | + 0,062 | — 0,036 | — 0,031 | | | | |
| 9 | + 0,013 | — 0,025 | — 0,040 | + 0,005 | + 0,051 | — 0,017 | | | | |
| 10 | — 0,014 | + 0,003 | — 0,009 | — 0,014 | — 0,002 | + 0,029 | | | | |
| 11 | — 0,002 | — 0,009 | + 0,009 | — 0,001 | — 0,001 | + 0,003 | | | | |
| 12 | + 0,001 | — 0,001 | + 0,001 | + 0,001 | | | | | | |
| 6, — 11 | + 0,002 | — 0,006 | — 0,006 | + 0,003 | | | | | | |
| 7 | + 0,015 | — 0,001 | — 0,002 | — 0,014 | + 0,003 | + 0,004 | | | | |
| 8 | — 0,010 | + 0,024 | + 0,025 | + 0,009 | — 0,012 | + 0,004 | | | | |
| 9 | — 0,016 | — 0,022 | — 0,019 | + 0,022 | + 0,006 | — 0,023 | | | | |
| 10 | + 0,010 | 0. | — 0,011 | — 0,015 | + 0,017 | + 0,017 | | | | |
| 11 | — 0,002 | — 0,004 | + 0,004 | — 0,007 | — 0,011 | + 0,005 | | | | |

Anche queste formule sono state controllate per sezioni, per quanto esse sieno di facile calcolo; ma tal controllo ha servito, tra le altre cose, a controllare i divisori d'integrazione ed i segni sui quali è facile che possa cadere l'errore. — Tale operazione è stata compiuta nel modo seguente. I divisori d'integrazione hanno la forma:

$$i - \mu i' :$$

Quindi se $a$, $b$, $c$ ecc. indicano i coefficienti di una sezione della serie di $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$, ecc., i coefficienti della sezione corrispondente di $\varphi$, ecc. avranno la forma $\frac{a}{i - i'\mu}, \frac{b}{i+1-i'\mu}$ ecc. e li potremo indicare con $\alpha$, $\beta$, ecc.

Si è quindi adoperata l'identità:

$$\alpha i \pm \beta (i+1) \pm \gamma (i+2) \ldots\ldots - (\alpha \pm \beta \pm \gamma \ldots\ldots) i'\mu = a \pm b \pm c \ldots\ldots \qquad (a)$$

Se quindi indichiamo con $(i, i', c)$ $(i, i', s)$ i coefficienti di $\varphi$, $\psi$, ecc. e con $[i, i', c]$, $[i, i', s]$ quelli di $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$, $a\cos\lambda\,\frac{d\psi}{d\varepsilon}$; ecc., avremo dalla precedente:

$$\Sigma_i\, i\,(i, i', c) - i'\mu\,\Sigma_i\,(i, i', c) = -\Sigma_i[i, i', s] \quad \text{pel coseno,}$$

e $$\Sigma_i\, i\,(i, i', s) - i'\mu\,\Sigma_i\,(i, i', s) = +\Sigma_i[i, i', c] \quad \text{pel seno.}$$

In tali somme i coefficienti sono stati presi talora coi segni cambiati in parte, quando la somma $a + b + c \ldots$ avrebbe dato zero come nella $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$: perchè allora la $(a)$ non costituisce vero controllo. — Si ottenne così la tavola seguente:

| | | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\varphi$ | Somme dei coefficienti di $a\varphi$ | −19″,210 | − 0″,523 | + 4″,318 | + 5″,513 | −48″,257 | +63″,317 |
| | Somme dei coefficienti di $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | −19,209 | − 0,525 | + 4,321 | + 5,511 | −48,259 | +63,317 |
| | Differenza | − 0,001 | + 0,002 | − 0,003 | + 0,002 | + 0,002 | 0. |
| | | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\varphi$ | Somme dei coefficienti di $a\varphi$ | + 2″,925 | +45″,057 | −13″,899 | −16″,752 | + 2″,697 | − 9″,754 |
| | Somme dei coefficienti di $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | + 2,930 | +45,053 | −13,898 | −16,750 | + 2,696 | − 9,755 |
| | Differenza | − 0,005 | + 0,004 | − 0,001 | − 0,002 | + 0,001 | + 0,001 |
| | | $i'=6$ | | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\varphi$ | Somme dei coefficienti di $a\varphi$ | + 4″,363 | − 1″,540 | + 1″,686 | + 1″,242 | − 0″,030 | + 0″,920 |
| | Somme dei coefficienti di $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | + 4,360 | − 1,537 | + 1,687 | + 1,240 | − 0,025 | + 0,920 |
| | Differenza | + 0,003 | − 0,003 | − 0,001 | + 0,002 | − 0,005 | 0. |
| | | $i'=9$ | | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\varphi$ | Somme dei coefficienti di $a\varphi$ | − 0″,340 | + 0″,240 | − 0″,184 | − 0″,076 | − 0″,032 | − 0″,048 |
| | Somme dei coefficienti di $a\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$ | − 0,337 | + 0,237 | − 0,180 | − 0,076 | − 0,031 | − 0,048 |
| | Differenza | − 0,003 | + 0,003 | − 0,004 | 0. | − 0,001 | 0. |

| | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\psi$ | + 0″,098 | −18″,356 | +10″,104 | − 7″,904 | +34″,328 | +24″,726 |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | + 0,099 | −18,356 | +10,105 | − 7,905 | +34,326 | +24,722 |
| Differenza | − 0,001 | 0. | − 0,001 | + 0,001 | + 0,002 | + 0,004 |

| | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\psi$ | + 1″,815 | +23″,324 | − 8″,506 | + 7″,202 | − 4″,972 | − 1″,325 |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | + 1,814 | +23,328 | − 8,507 | + 7,206 | − 4,975 | − 1,327 |
| Differenza | + 0,001 | − 0,004 | + 0,001 | − 0,004 | + 0,003 | + 0,002 |

| | $i'=6$ | | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\psi$ | − 0″,790 | − 2″,191 | + 0″,601 | − 0″,846 | + 0″,465 | + 0″,003 |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | − 0,788 | − 2,191 | + 0,600 | − 0,847 | + 0,467 | + 0,006 |
| Differenza | − 0,002 | 0. | + 0,001 | + 0,001 | − 0,002 | − 0,003 |

| | $i'=9$ | | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\psi$ | + 0″,111 | + 0″,170 | − 0″,024 | + 0″,091 | − 0″,060 | − 0″,028 |
| $a\cos\lambda\psi$ Somme dei coefficienti di $a\cos\lambda\frac{d\psi}{d\varepsilon}$ | + 0,115 | + 0,167 | − 0,022 | + 0,091 | − 0,057 | − 0,028 |
| Differenza | − 0,004 | + 0,003 | − 0,002 | 0. | − 0,003 | 0. |

| | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\xi$ Somme dei coefficienti di $\xi$ | + 0″,179 | − 0″,368 | − 2″,848 | − 3″,642 | +31″,816 | −41″,748 |
| $\xi$ Somme dei coefficienti di $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | + 0,178 | − 0,371 | − 2,848 | − 3,640 | +31,815 | −41,749 |
| Differenza | + 0,001 | + 0,003 | 0. | − 0,002 | + 0,001 | + 0,001 |

| | | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\xi$ | Somme dei coefficienti di $\xi$ | +29″,707 | — 1″,934 | + 9″,163 | +11″,048 | — 1″,781 | + 6″,428 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | +29,705 | — 1,935 | + 9,164 | +11,048 | — 1,781 | + 6,431 |
| | Differenza | + 0,002 | + 0,001 | — 0,001 | 0. | 0. | — 0,003 |

| | | $i'=6$ | | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\xi$ | Somme dei coefficienti di $\xi$ | — 2″,871 | + 1″,015 | — 1″,110 | — 0″,819 | + 0″,007 | — 0″,605 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | — 2,874 | + 1,014 | — 1,110 | — 0,819 | + 0,010 | — 0,604 |
| | Differenza | + 0,003 | + 0,001 | 0. | 0. | — 0,003 | — 0,001 |

| | | $i'=9$ | | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\xi$ | Somme dei coefficienti di $\xi$ | + 0″,220 | — 0″,154 | + 0″,120 | + 0″,053 | + 0″,019 | + 0″,056 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ | + 0,219 | — 0,153 | + 0,119 | + 0,051 | + 0,018 | + 0,058 |
| | Differenza | + 0,001 | — 0,001 | + 0,001 | + 0,002 | + 0,001 | — 0,002 |

| | | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\Xi$ | Somme dei coefficienti di $\Xi$ | + 1″,114 | + 0″,043 | + 0″,99 | + 2″,15 | + 0″,79 | — 0″,46 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | + 1,113 | + 0,042 | + 0,98 | + 2,17 | + 0,78 | — 0,44 |
| | Differenza | + 0,001 | + 0,001 | + 0,01 | — 0,02 | + 0,01 | — 0,02 |

| | | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\Xi$ | Somme dei coefficienti di $\Xi$ | — 1″,93 | — 0″,39 | — 0″,64 | + 0″,39 | — 0″,30 | — 0″,09 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | — 1,91 | — 0,39 | — 0,65 | + 0,39 | — 0,32 | — 0,08 |
| | Differenza | — 0,02 | 0. | + 0,01 | 0. | + 0,02 | — 0,01 |

| | | $i'=6$ | | $i'=7$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\Xi$ | Somme dei coefficienti di $\Xi$ | $-$ 0″,05 | $+$ 0″,06 | $-$ 0″,03 | 0″. |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$ | $-$ 0,07 | $+$ 0,07 | $-$ 0,04 | $-$ 0,01 |
| | Differenza | $+$ 0,02 | $-$ 0,01 | $+$ 0,01 | $+$ 0,01 |

| | | $i'=0$ | | $i'=1$ | | $i'=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\Lambda$ | Somme dei coefficienti di $\Lambda$ | $+$ 0″,119 | $-$ 0″,336 | $+$ 2″,06 | $-$ 1″,41 | $+$ 2″,48 | $+$ 1″,43 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ | $+$ 0,118 | $-$ 0,336 | $+$ 2,06 | $-$ 1,42 | $+$ 2,51 | $+$ 1,46 |
| | Differenza | $+$ 0,001 | 0. | 0. | $+$ 0,01 | $-$ 0,03 | $-$ 0,03 |

| | | $i'=3$ | | $i'=4$ | | $i'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| $\Lambda$ | Somme dei coefficienti di $\Lambda$ | $+$ 0″,19 | $+$ 1″,52 | $-$ 0″,51 | $+$ 0″,47 | $-$ 0″,28 | $-$ 0″,08 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ | $+$ 0,20 | $+$ 1,53 | $-$ 0,53 | $+$ 0,49 | $-$ 0,31 | $-$ 0,07 |
| | Differenza | $-$ 0,01 | $-$ 0,01 | $+$ 0,02 | $-$ 0,02 | $+$ 0,03 | $-$ 0,01 |

| | | $i'=6$ | | $i'=7$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| $\Lambda$ | Somme dei coefficienti di $\Lambda$ | $+$ 0″,02 | $-$ 0″,10 | 0″. | $-$ 0″,01 |
| | Somme dei coefficienti di $\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ | $+$ 0,04 | $-$ 0,11 | $+$ 0,02 | $+$ 0,01 |
| | Differenza | $-$ 0,02 | $+$ 0,01 | $-$ 0,02 | $-$ 0,02 |

## Determinazione delle costanti arbitrarie nelle funzioni $a\varphi$, $a\cos\lambda\psi$, $\xi$, $\Lambda$ e $\Xi$.

Questa determinazione si fa in base ai valori che le precedenti funzioni assumono all'origine del tempo. Per l'epoca tali funzioni divengono (Venturi, § II, n. 19 e segg.; § III, n. 17):

$$a\varphi = 0 \ , \ a\cos\lambda\psi = 0 \ , \ \xi = 1 \ , \ \Xi = 0 \ , \ \Lambda = 0 \, .$$

Se dunque s'indica con $\varphi_0$, $\psi_0$ ... ciò che diviene la parte variabile di $\varphi$, $\psi$, ecc. per $t = 0$, avremo che $a\varphi_0$, $a\cos\lambda\psi_0$, $\xi_0$, $\Xi_0$, $\Lambda_0$ saranno i valori per $t = 0$ delle

funzioni della tav. XVIII; inoltre le costanti da aggiungersi a tali sviluppi di detta tavola saranno, per le (58), (76) § III, l. c. rispettivamente $ac'_2$, $a\cos\lambda c'_3$, $\gamma'_1$, $\gamma'_3$, $\gamma'_4$, e si dedurranno dalle formule:

$$ac'_2 = -a\varphi_0\ ,\quad a\cos\lambda c'_3 = -a\cos\lambda\psi_0\ ,\quad \gamma'_1 = 1-\xi_0\ ,\quad \gamma'_3 = -\Xi_0\ ,\quad \gamma'_4 = -\Lambda_0\ .$$

Per calcolare i valori di $a\varphi$, $a\cos\lambda\psi$ ecc. per $t=0$, si osservi, che per $t=0$ l'equazione di Keplero dà

$$\varepsilon_0 = 65^\circ, 50', 3'', 8\ .$$

L'argomento della serie può scriversi:

$$i\varepsilon_0 - i'\left[c' + \mu\left(\varepsilon_0 - c\right)\right].$$

Ora pel valore precedente e ricordando le anomalie di Giove e di Feronia:

$$c' + \mu\left(\varepsilon_0 - c\right) = 337^\circ, 53', 23'', 5\ .$$

Con questo si formarono i valori dei seni e coseni di tutti gli argomenti, valori registrati nella tavola seguente, in cui si tralasciarono quelli che combinati coi termini rispettivi di $a\varphi$, $a\cos\lambda\psi$ ecc. avrebbero dato risultati insensibili.

*Tavola dei seni e coseni degli argomenti per* $t=0$.

Tav. XIX.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | cos | sen | $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | cos | sen | $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | cos | sen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 2,— 1 | $\bar{1}$,52474n | $\bar{1}$,97419n | 5,— 4 | $\bar{1}$,72889 | $\bar{1}$,92657 | 3,— 8 | $\bar{1}$,98617 | $\bar{1}$,39517 |
| — 1 | $\bar{1}$,85894 | $\bar{1}$,83960n | 6 | $\bar{1}$,74128n | $\bar{1}$,92137 | 4 | $\bar{1}$,23025 | $\bar{1}$,99364 |
| 0 | $\bar{1}$,96682 | $\bar{1}$,57563 | | | | 5 | $\bar{1}$,91883n | $\bar{1}$,74700 |
| 1 | $\bar{2}$,55471 | $\bar{1}$,99972 | 0,— 5 | $\bar{1}$,54534n | $\bar{1}$,97145 | 6 | $\bar{1}$,92897n | $\bar{1}$,72280n |
| 2 | $\bar{1}$,95283n | $\bar{1}$,64526 | 1 | $\bar{1}$,99913n | $\bar{2}$,79970 | 7 | $\bar{1}$,12800 | $\bar{1}$,99605n |
| 3 | $\bar{1}$,88670n | $\bar{1}$,80455n | 2 | $\bar{1}$,66846n | $\bar{1}$,94680n | 8 | $\bar{1}$,98185 | $\bar{1}$,45206n |
| 4 | $\bar{1}$,42553n | $\bar{1}$,98402n | 3 | $\bar{1}$,78986 | $\bar{1}$,89622n | 9 | $\bar{1}$,81358 | $\bar{1}$,88029 |
| | | | 4 | $\bar{1}$,98712 | $\bar{1}$,38026 | | | |
| — 2,— 2 | $\bar{2}$,64827 | $\bar{1}$,99957n | 5 | $\bar{1}$,25140 | $\bar{1}$,99297 | 3,— 9 | $\bar{1}$,90518 | $\bar{1}$,77440 |
| — 1 | $\bar{1}$,96838 | $\bar{1}$,56625n | 6 | $\bar{1}$,91630n | $\bar{1}$,75250 | 4 | $\bar{1}$,32960n | $\bar{1}$,98986 |
| 0 | $\bar{1}$,85530 | $\bar{1}$,84352 | 7 | $\bar{1}$,93127n | $\bar{1}$,71674n | 5 | $\bar{1}$,99067n | $\bar{1}$,31189 |
| 1 | $\bar{1}$,535190n | $\bar{1}$,972835 | | | | 6 | $\bar{1}$,76922n | $\bar{1}$,90796n |
| 2 | $\bar{1}$,99888n | $\bar{2}$,85546 | 1,— 6 | $\bar{1}$,97696n | $\bar{1}$,50137n | 7 | $\bar{1}$,69677 | $\bar{1}$,93826n |
| 3 | $\bar{1}$,67553n | $\bar{1}$,94480n | 2 | $\bar{2}$,99552n | $\bar{1}$,99787n | 8 | $\bar{1}$,99787 | $\bar{2}$,99450 |
| 4 | $\bar{1}$,78502 | $\bar{1}$,89913n | 3 | $\bar{1}$,93826 | $\bar{1}$,69681n | 9 | $\bar{1}$,50148 | $\bar{1}$,97696 |
| 5 | $\bar{1}$,98801 | $\bar{1}$,36502 | 4 | $\bar{1}$,90796 | $\bar{1}$,76922 | 10 | $\bar{1}$,86647n | $\bar{1}$,83106 |
| | | | 5 | $\bar{1}$,31189 | $\bar{1}$,99067 | | | |
| — 1,— 3 | $\bar{1}$,99998 | $\bar{3}$,93745 | 6 | $\bar{1}$,98986n | $\bar{1}$,32960 | 5,—10 | $\bar{1}$,9930n | $\bar{1}$,2510n |
| 0 | $\bar{1}$,60365 | $\bar{1}$,96183 | 7 | $\bar{1}$,77440n | $\bar{1}$,90518n | 6 | $\bar{1}$,3806n | $\bar{1}$,9871n |
| 1 | $\bar{1}$,826896n | $\bar{1}$,869944 | 8 | $\bar{1}$,69010 | $\bar{1}$,94041n | 7 | $\bar{1}$,8961 | $\bar{1}$,7900n |
| 2 | $\bar{1}$,978208n | $\bar{1}$,48996n | | | | 8 | $\bar{1}$,9469 | $\bar{1}$,6683 |
| 3 | $\bar{1}$,03109n | $\bar{1}$,99748n | 1,— 7 | $\bar{1}$,88040n | $\bar{1}$,81343n | 9 | $\bar{2}$,7979n | $\bar{1}$,9991 |
| 4 | $\bar{1}$,93606 | $\bar{1}$,70332n | 2 | $\bar{1}$,45206 | $\bar{1}$,98185n | 10 | $\bar{1}$,9714n | $\bar{1}$,5453 |
| 5 | $\bar{1}$,91067 | $\bar{1}$,76399 | 3 | $\bar{1}$,99605 | $\bar{1}$,12845n | | | |
| | | | 4 | $\bar{1}$,72300 | $\bar{1}$,92890 | 7,—11 | $\bar{1}$,98291 | $\bar{1}$,43950n |
| — 1,— 4 | $\bar{1}$,96530 | $\bar{1}$,58467n | 5 | $\bar{1}$,74700n | $\bar{1}$,91883 | 8 | $\bar{1}$,8091 | $\bar{1}$,8835 |
| 0 | $\bar{2}$,43479 | $\bar{1}$,99984 | 6 | $\bar{1}$,99364n | $\bar{1}$,23025n | 9 | $\bar{1}$,6374n | $\bar{1}$,9547 |
| 1 | $\bar{1}$,95468n | $\bar{1}$,63754 | 7 | $\bar{1}$,39517n | $\bar{1}$,98617n | 10 | $\bar{1}$,9998n | $\bar{2}$,4322n |
| 2 | $\bar{1}$,88355n | $\bar{1}$,80906n | 8 | $\bar{1}$,89324 | $\bar{1}$,79463n | 11 | $\bar{1}$,58497n | $\bar{1}$,9652n |
| 3 | $\bar{1}$,43883 | $\bar{1}$,98295n | | | | | | |
| 4 | $\bar{1}$,99552 | $\bar{1}$,15534n | 2,— 8 | $\bar{1}$,79463 | $\bar{1}$,89324n | | | |

Questi valori, che hanno parte principalissima nella esattezza degli sviluppi, sono stati rigorosamente controllati col mezzo di queste formule da me trovate:

$$\tfrac{1}{2}\cos[i\varepsilon-\beta]+\cos[(i+1)\varepsilon-\beta]+\cos[(i+2)\varepsilon-\beta]+\ldots.+$$
$$+\cos[(i+n-1)\varepsilon-\beta]+\tfrac{1}{2}\cos[(i+n)\varepsilon-\beta]=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\{\operatorname{sen}[(i+n)\varepsilon-\beta]-\operatorname{sen}[i\varepsilon-\beta]\}$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}[i\varepsilon-\beta]+\operatorname{sen}[(i+1)\varepsilon-\beta]+\operatorname{sen}[(i+2)\varepsilon-\beta]+\ldots.+$$
$$+\operatorname{sen}[(i+n-1)\varepsilon-\beta]+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}[(i+n)\varepsilon-\beta]=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\{\cos[i\varepsilon-\beta]-\cos[(i+n)\varepsilon-\beta]\}$$

e fu trovata:

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i'=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Valore del 1° membro | + 0″,2353 | + 0″,3363 | + 0″,1594 | — 0″,4363 | + 0″,4417 | + 0″,1436 |
| Valore del 2° membro | + 0,2353 | + 0,3364 | + 0,1593 | — 0,4365 | + 0,4419 | + 0,1435 |
| Differenza | 0. | — 0,001 | + 0,0001 | + 0,0002 | — 0,0002 | + 0,0001 |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Valore del 1° membro | — 0″,1276 | + 0″,4466 | — 0″,4510 | — 0″,1515 | — 0″,3760 | — 0″,2731 |
| Valore del 2° membro | — 0,1276 | + 0,4467 | — 0,4510 | — 0,1515 | — 0,3759 | — 0,2730 |
| Differenza | 0. | — 0,0001 | 0. | 0. | — 0,0001 | — 0,0001 |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | | $i'=9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Valore del 1° membro | + 0″,0216 | — 1″,1906 | + 1″,1905 | — 0″,0215 | — 0″,0221 | — 0″,4102 |
| Valore del 2° membro | + 0,0213 | — 1,1906 | + 1,1904 | — 0,0215 | — 0,0221 | — 0,4101 |
| Differenza | + 0,0003 | 0. | + 0,0001 | 0. | 0. | — 0,0001 |

| | $i'=10$ | | $i'=11$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| Valore del 1° membro | + 0″,4090 | — 0″,0370 | — 0″,5008 | + 1″,0397 |
| Valore del 2° membro | + 0,4088 | — 0,0369 | — 0,5005 | + 1,0396 |
| Differenza | + 0,0002 | — 0,0001 | — 0,0003 | + 0,0001 |

Adoperando i valori della tavola precedente per calcolare i valori delle serie per $t=0$, si trovò:

$a\varphi_0=217'',749$; $a\cos\lambda\psi_0=-88'',731$; $\xi_0=+46'',294$; $\Xi_0=-4'',23$; $\Lambda_0=+0'',52$

e quindi per le formule precedenti si ebbero i seguenti valori per le costanti arbitrarie:

$$ac'_2 = -217'',75$$
$$a\cos\lambda c'_3 = +\ 88,\ 73$$
$$\gamma'_1 = 1 - 46,\ 29$$
$$\gamma'_3 = +\ 4,\ 23$$
$$\gamma'_4 = -\ 0,\ 52\,.$$

Quanto alla costante della funzione $\frac{h_0}{h}$ che presto introdurremo e che si trova nel testo (Venturi, l. c. pag. 45) osserviamo che essa fu chiamata $h_0\gamma'_2$ e vedemmo (l. c. pag. 57) che dev'esser di forma $1+q_2$ mentre $\gamma'_1$ è di forma $1+q_1$. Vedemmo, pag. 58, che dev'essere $q_2 = -\frac{1}{3}q_1$: quindi badando che si è trovato sopra:

$$q_1 = -46'',294$$

avremo per la costante di $\frac{h_0}{h}$:

$$h_0\gamma'_2 = 1 + 15'',431$$

che sarà adoperata in seguito.

Anche i valori di queste costanti sono stati controllati in questo modo. Le $\gamma_3$, $\gamma_4$ sono state controllate in seguito colla $c'_4$ rimanendo esse da sole, non entrando cioè nei calcoli successivi. Le $c'_2$, $c'_3$, $\gamma'_1$ e $\gamma'_2$ sono state controllate insieme colla $c'_1$ essendo questa, funzione di quelle. Però il risultato di questo controllo deve trovarsi naturalmente dopo il calcolo di $c'_1$ epperò entrambi i controlli si troveranno dopo le tavole seguenti.

## Determinazione delle funzioni $nz$ e $v$.

Occorre prima di tutto di formare la funzione $w_0$ dalla quale si deduce la $\frac{dz}{d\varepsilon}$. Le espressioni di questa e di $\frac{dv}{d\varepsilon}$ sono date dalle (13), (15) § III, l. c. — Si formò così la tavola che segue:

Tav. XX.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $w_0$ | | $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | | $2\frac{dv}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $1 - 40'',358$ | | $1 - 27'',393$ | | $-\ 0'',1030$ | |
| 0, 0 | $+\ 0'',05150\,\varepsilon$ | | | | | |
| 1, 0 | $-214'',774$ | $+88'',154$ | $-\ 25114'',961$ | $+88'',161$ | $-88'',840$ | $-218'',609$ |
| 1, 0 | $+\ 0,85284\,\varepsilon$ | $+\ 3,70014\,\varepsilon$ | $+\ 0,84662\,\varepsilon$ | $+\ 3,70014\,\varepsilon$ | $-\ 3,70014\,\varepsilon$ | $+\ 0,85284\,\varepsilon$ |
| 2, 0 | $-\ 0,3256$ | $-\ 0,1205$ | $+12,639$ | $-\ 5,442$ | $+\ 0,2019$ | $-\ 0,4335$ |
| 2, 0 | | | $-\ 0,05149\,\varepsilon$ | $-\ 0,22338\,\varepsilon$ | | |
| 3, 0 | $+\ 0,017$ | $-\ 0,003$ | $+\ 0,037$ | $+\ 0,004$ | $+\ 0,009$ | $+\ 0,031$ |
| $-2, -1$ | 0. | $+\ 0,040$ | $+\ 0,08$ | $+\ 0,07$ | $+\ 0,06$ | 0. |
| $-1$ | $-\ 1,338$ | $-\ 0,566$ | $-\ 1,14$ | $-\ 0,61$ | $-\ 0,53$ | $+\ 1,64$ |
| 0 | $-\ 3,302$ | $+\ 0,730$ | $-\ 1,54$ | $+\ 4,66$ | $-\ 0,73$ | $+\ 1,38$ |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $w_0$ | | $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | | $2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 1, — 1 | —27″,874 | — 64″,585 | —27″,66 | — 64″,43 | + 48″,91 | — 21″,09 |
| 2 | — 0,213 | — 3,210 | + 1,47 | + 0,70 | + 4,23 | — 0,47 |
| 3 | — 0,042 | — 0,107 | — 0,03 | + 0,09 | + 0,19 | + 0,07 |
| — 1, — 2 | — 0,203 | + 0,149 | — 0,03 | — 0,09 | + 0,18 | + 0,23 |
| 0 | — 2,860 | + 3,962 | + 0,12 | + 1,01 | + 3,18 | + 2,58 |
| 1 | —49,224 | + 48,683 | —43,39 | + 41,66 | — 27,36 | — 26,95 |
| 2 | —93,725 | +112,395 | —90,83 | +109,49 | —139,74 | —116,52 |
| 3 | + 1,266 | — 0,566 | + 6,92 | — 7,35 | + 0,80 | + 1,91 |
| 4 | + 0,044 | — 0,057 | — 0,03 | — 0,02 | + 0,10 | + 0,08 |
| — 1, — 3 | 0. | + 0,023 | — 0,02 | — 0,09 | + 0,03 | + 0,01 |
| 0 | + 0,378 | + 1,924 | + 0,37 | + 0,43 | + 1,90 | — 0,32 |
| 1 | + 0,150 | + 24,723 | — 2,84 | + 18,59 | — 5,01 | + 0,35 |
| 2 | +49,125 | + 99,643 | +50,45 | + 98,50 | —108,06 | + 52,05 |
| 3 | —21,850 | — 5,817 | —24,83 | — 11,85 | + 8,71 | — 32,89 |
| 4 | + 0,200 | + 0,343 | + 1,52 | + 0,69 | — 0,57 | + 0,29 |
| 5 | + 0,032 | + 0,006 | + 0,02 | — 0,01 | — 0,01 | + 0,06 |
| 0, — 4 | — 0,183 | — 0,061 | — 0,07 | 0. | — 0,05 | + 0,19 |
| 1 | — 0,900 | — 1,077 | — 0,67 | — 1,10 | — 0,22 | + 0,49 |
| 2 | —20,228 | + 0,420 | —19,74 | + 0,07 | — 0,71 | — 18,32 |
| 3 | — 6,160 | + 6,827 | — 4,87 | + 7,16 | — 9,09 | — 8,84 |
| 4 | — 1,060 | — 5,904 | — 0,68 | — 6,32 | + 9,79 | — 1,79 |
| 5 | — 0,115 | + 0,076 | — 0,05 | + 0,43 | — 0,11 | — 0,21 |
| 6 | + 0,005 | + 0,011 | + 0,01 | + 0,01 | — 0,03 | 0. |
| 1, — 5 | — 0,051 | + 0,083 | — 0,01 | + 0,01 | + 0,06 | + 0,04 |
| 2 | — 0,593 | + 1,277 | — 0,65 | + 1,11 | — 0,91 | — 0,34 |
| 3 | + 1,045 | + 2,753 | + 1,23 | + 2,73 | — 3,53 | + 1,14 |
| 4 | — 2,484 | — 0,852 | — 2,64 | — 0,95 | + 1,51 | — 3,81 |
| 5 | + 1,542 | — 1,095 | + 1,69 | — 1,04 | + 1,94 | + 2,70 |
| 6 | — 0,036 | — 0,044 | — 0,13 | + 0,02 | + 0,09 | — 0,06 |
| 1, — 6 | + 0,022 | + 0,012 | + 0,01 | 0. | + 0,01 | — 0,02 |
| 2 | + 0,136 | + 0,178 | + 0,07 | + 0,17 | — 0,06 | + 0,06 |
| 3 | + 0,101 | + 0,131 | + 1,13 | + 0,09 | — 0,20 | + 1,24 |
| 4 | — 0.570 | + 0,522 | — 0,63 | + 0,57 | — 0,69 | — 0,89 |
| 5 | — 0,078 | — 0,936 | — 0,08 | — 0,99 | + 1,57 | — 0,06 |
| 6 | + 0,569 | + 0,315 | + 0,57 | + 0,37 | — 0,57 | + 1,04 |
| 7 | + 0,017 | — 0,020 | — 0,02 | — 0,04 | + 0,03 | + 0,03 |
| 1, — 7 | | | — 0,02 | + 0,01 | + 0,01 | + 0,05 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $w_0$ | | $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | | $2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 2, — 7 | — 0,429 | + 0,114 | — 0,283 | — 0,089 | + 0,003 | + 0,011 |
| 3 | — 2,418 | + 3,363 | — 2,39 | + 3,34 | — 3,34 | — 2,39 |
| 4 | + 0,047 | + 0,189 | + 0,21 | — 0,01 | — 0,27 | + 0,04 |
| 5 | — 0,263 | — 0,121 | — 0,28 | — 0,12 | + 0,23 | — 0,40 |
| 6 | + 0,318 | — 0,176 | + 0,33 | — 0,18 | + 0,28 | + 0,57 |
| 7 | — 0,013 | + 0,230 | — 0,02 | + 0,24 | — 0,43 | — 0,02 |
| 3, — 8 | 0. | + 0,030 | 0. | + 0,03 | — 0,02 | 0. |
| 4 | + 0,045 | + 0,017 | + 0,05 | + 0,01 | — 0,02 | + 0,06 |
| 5 | — 0,061 | + 0,042 | — 0,06 | + 0,05 | — 0,05 | — 0,10 |
| 6 | + 0,003 | — 0,123 | 0. | — 0,13 | + 0,20 | + 0,03 |
| 7 | + 0,120 | + 0,086 | + 0,12 | + 0,09 | — 0,17 | + 0,21 |
| 8 | — 0,078 | + 0,033 | — 0,08 | + 0,03 | — 0,06 | — 0,15 |
| 4, — 9 | + 0,012 | — 0,011 | + 0,01 | — 0,01 | + 0,01 | + 0,02 |
| 5 | 0. | + 0,019 | 0. | + 0,02 | — 0,02 | 0. |
| 6 | — 0,026 | — 0,016 | — 0,03 | — 0,02 | + 0,03 | — 0,04 |
| 7 | + 0,049 | — 0,019 | + 0,05 | — 0,02 | + 0,03 | + 0,09 |
| 8 | — 0,013 | + 0,060 | — 0,02 | + 0,06 | — 0,11 | — 0,03 |
| 9 | — 0,024 | — 0,022 | — 0,02 | — 0,03 | + 0,04 | — 0,05 |

Di queste funzioni non controlliamo per ora che la $n\frac{dz}{d\varepsilon}$, giacchè le altre si controllano insieme col mezzo di un'altra funzione di semplicissima determinazione e di largo uso, cioè la $\delta\frac{h_0}{h}$ (Venturi, pag. 45).

Ricordando la 1$^{ma}$ delle (15) § III, l. c., si vedrà che si ottiene un semplice controllo per $\varepsilon = 0$, e immaginando $\mu\varepsilon$ indipendente da $\varepsilon$, il che algoritmicamente può farsi. Indicando con $[i, i', {}^{c}_{s}]$ i coefficienti di $w_0$ e con $(i, i', {}^{c}_{s})$ quelli di $n\frac{dz}{d\varepsilon}$, avremo, per $\mu\varepsilon$ qualunque (diverso da zero) le relazioni dedotte dalla detta (15):

$$\Sigma_i (i, i', {}^{c}_{s}) = (1 - e)\, \Sigma_i [i, i', {}^{c}_{s}] .$$

Da questa si dedusse la tavola seguente:

*Controllo di* $n\frac{dz}{d\varepsilon}$.

| $\varepsilon = 0$ ; $\mu\varepsilon$ diverso da zero | $i=0$ per $\varepsilon = 65°, 50', 4''$ | $i=1$ | | $i=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos | sen | cos | sen |
| Valore di $\Sigma(i,i\,{}^{c}_{s})$ | $1 - 10235,678$ | $-28,83$ | $-59,52$ | $-127,24$ | $+144,70$ |
| Valore di $(1-e)\Sigma[i,i\,{}^{c}_{s}]$ | $1 - 10235,680$ | $-28,82$ | $-59,53$ | $-127,23$ | $+144,70$ |
| Differenza | $+0,002$ | $-0,01$ | $+0,01$ | $-0,01$ | $0,00$ |

| $\varepsilon = 0$ ; $\mu\varepsilon$ diverso da zero | $i=3$ | | $i=4$ | | $i=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Valore di $\Sigma(i,i'\,{}^{c}_{s})$ | $+24,67$ | $+106,26$ | $-26,07$ | $+0,25$ | $-0,51$ | $+1,88$ |
| Valore di $(1-e)\Sigma[i,i'\,{}^{c}_{s}]$ | $+24,65$ | $+106,25$ | $-26,06$ | $+0,25$ | $-0,50$ | $+1,86$ |
| Differenza | $+0,02$ | $+0,01$ | $-0,01$ | $0,00$ | $-0,01$ | $+0,02$ |

| $\varepsilon = 0$ ; $\mu\varepsilon$ diverso da zero | $i=6$ | | $i=7$ | | $i=8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Valore di $\Sigma(i,i'\,{}^{c}_{s})$ | $+1,05$ | $+0,17$ | $-2,45$ | $+3,19$ | $+0,03$ | $+0,08$ |
| Valore di $(1-e)\Sigma[i,i'\,{}^{c}_{s}]$ | $+1,03$ | $+0,18$ | $-2,43$ | $+3,16$ | $+0,03$ | $+0,07$ |
| Differenza | $+0,02$ | $-0,01$ | $-0,02$ | $+0,03$ | $0,00$ | $+0,01$ |

| $\varepsilon = 0$ ; $\mu\varepsilon$ diverso da zero | $i=9$ | |
|---|---|---|
| | cos | sen |
| Valore di $\Sigma(i,i'\,{}^{c}_{s})$ | $-0,01$ | $-0,00$ |
| Valore di $(1-e)\Sigma[i,i'\,{}^{c}_{s}]$ | $-0,01$ | $+0,01$ |
| Differenza | $0,00$ | $-0,01$ |

Integrando ora le equazioni relative ad $nz$ ed a $v$, otterremo la seguente tavola, nella quale introduciamo anche la funzione $\frac{h_0}{h}$ calcolata secondo la semplice formula, ricavata dalla (11), Venturi, l. c. § III:

$$\frac{h_0}{h} = -\tfrac{1}{3}\,\xi$$

essendo $\xi$ la funzione della tavola XVIII. Si è così ottenuto:

Tav. XXI.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $nz$ | | $\nu$ | | $\frac{h_o}{h}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | $(1-27,393)\,\varepsilon$ | | $-\ 0,0515\varepsilon$ | | $-\ 0,0515\varepsilon$ | |
| 1, 0 | $-\ 87,314$ | $-25111,261$ | $+107,454$ | $-43,994$ | $+\ 0,1386$ | $+\ 0,1676$ |
| 1, 0 | $-\ 3,70014\varepsilon$ | $+\ 0,84684\varepsilon$ | $-\ 0,42642\varepsilon$ | $-\ 1,85007\varepsilon$ | | |
| 2, 0 | $+\ 2,708$ | $+\ 6,264$ | $+\ 0,1083$ | $+\ 0,0505$ | $-\ 0,1092$ | $-\ 0,0190$ |
| 2, 0 | $+\ 0,11170\varepsilon$ | $-\ 0,02575\varepsilon$ | | | | |
| 3, 0 | $-\ 0,001$ | $+\ 0,012$ | $-\ 0,006$ | $+\ 0,002$ | $+\ 0,007$ | $-\ 0,002$ |
| $-$ 2, $-$ 1 | $+\ 0,03$ | $-\ 0,03$ | 0. | $-\ 0,01$ | 0. | $+\ 0,01$ |
| $-$ 1 | $-\ 0,47$ | $+\ 0,88$ | $+\ 0,63$ | $+\ 0,20$ | $-\ 0,06$ | $-\ 0,15$ |
| 0 | $+\ 16,20$ | $+\ 5,35$ | $+\ 2,40$ | $+\ 1,27$ | $+\ 1,19$ | $+\ 3,27$ |
| 1 | $+\ 90,44$ | $-\ 38,83$ | $+\ 14,80$ | $+34,33$ | $+\ 1,73$ | $+\ 4,07$ |
| 2 | $-\ 0,41$ | $+\ 0,86$ | $+\ 0,14$ | $+\ 1,37$ | $+\ 0,06$ | $-\ 0,48$ |
| 3 | $-\ 0,03$ | $-\ 0,01$ | $-\ 0,01$ | $+\ 0,03$ | $-\ 0,02$ | $-\ 0,04$ |
| $-$ 1, $-$ 2 | $-\ 0,06$ | $+\ 0,02$ | $+\ 0,07$ | $-\ 0,05$ | $-\ 0,05$ | $+\ 0,04$ |
| 0 | $+\ 1,76$ | $-\ 0,21$ | $+\ 2,24$ | $-\ 2,76$ | $+\ 1,63$ | $-\ 1,58$ |
| 1 | $-\ 98,07$ | $-102,14$ | $+\ 31,72$ | $-32,20$ | $+14,23$ | $-15,72$ |
| 2 | $-\ 76,85$ | $-\ 63,75$ | $+\ 40,89$ | $-49,04$ | $-11,95$ | $+14,32$ |
| 3 | $+\ 3,03$ | $+\ 2,85$ | $-\ 0,39$ | $+\ 0,16$ | $+\ 0,48$ | $-\ 0,23$ |
| 4 | $+\ 0,01$ | $-\ 0,01$ | $-\ 0,01$ | $+\ 0,01$ | $+\ 0,02$ | $-\ 0,03$ |
| $-$ 1, $-$ 3 | $-\ 0,05$ | $+\ 0,01$ | 0. | $-\ 0,01$ | 0. | $+\ 0,01$ |
| 0 | $+\ 0,50$ | $-\ 0,43$ | $-\ 0,18$ | $-\ 1,10$ | $+\ 0,01$ | $-\ 0,27$ |
| 1 | $-135,49$ | $-\ 20,70$ | $-\ 1,27$ | $-18,26$ | $-\ 2,37$ | $-11,79$ |
| 2 | $-\ 86,60$ | $+\ 44,36$ | $-\ 22,88$ | $-47,51$ | $+\ 3,35$ | $+\ 4,62$ |
| 3 | $+\ 5,54$ | $-\ 11,62$ | $+\ 7,70$ | $+\ 2,04$ | $-\ 6,46$ | $-\ 1,74$ |
| 4 | $-\ 0,22$ | $+\ 0,48$ | $-\ 0,05$ | $-\ 0,09$ | $+\ 0,11$ | $+\ 0,16$ |
| 5 | 0. | $+\ 0,01$ | $-\ 0,01$ | 0. | $+\ 0,02$ | 0. |
| 0, $-$ 4 | 0. | $+\ 0,06$ | $+\ 0,08$ | $+\ 0,02$ | $-\ 0,02$ | $-\ 0,02$ |
| 1 | $-\ 7,31$ | $+\ 4,46$ | $+\ 1,63$ | $+\ 0,73$ | $+\ 1,38$ | $+\ 0,41$ |
| 2 | $-\ 0,08$ | $-\ 23,24$ | $+\ 10,78$ | $-\ 0,42$ | $+\ 1,34$ | $-\ 0,42$ |
| 3 | $-\ 3,87$ | $-\ 2,63$ | $+\ 2,39$ | $-\ 2,46$ | $-\ 1,38$ | $+\ 1,91$ |
| 4 | $+\ 2,22$ | $-\ 0,24$ | $+\ 0,31$ | $+\ 1,72$ | $-\ 0,43$ | $-\ 2,47$ |
| 5 | $-\ 0,11$ | $-\ 0,01$ | $+\ 0,03$ | $-\ 0,01$ | $-\ 0,06$ | $+\ 0,04$ |
| 1, $-$ 5 | $-\ 0,02$ | $+\ 0,02$ | $+\ 0,05$ | $-\ 0,07$ | $+\ 0,04$ | $-\ 0,05$ |
| 2 | $-\ 1,97$ | $-\ 1,16$ | $+\ 0,30$ | $-\ 0,81$ | $+\ 0,02$ | $-\ 0,34$ |
| 3 | $-\ 1,75$ | $+\ 0,79$ | $-\ 0,36$ | $-\ 1,13$ | $+\ 0,31$ | $+\ 0,49$ |
| 4 | $+\ 0,37$ | $-\ 1,03$ | $+\ 0,74$ | $+\ 0,29$ | $-\ 1,00$ | $-\ 0,26$ |
| 5 | $+\ 0,29$ | $+\ 0,47$ | $-\ 0,38$ | $+\ 0,27$ | $+\ 0,79$ | $-\ 0,55$ |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $nz$ | | $\nu$ | | $\frac{h_0}{h}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 6, — 5 | 0." | — 0",03 | + 0",01 | + 0",01 | — 0",02 | — 0",02 |
| 1, — 6 | 0. | — 0,01 | — 0,01 | — 0,01 | 0. | 0. |
| 2 | — 0,62 | + 0,25 | — 0,11 | — 0,11 | — 0,09 | — 0,05 |
| 3 | — 0,07 | + 0,89 | — 0,49 | — 0,08 | + 0,12 | — 0,02 |
| 4 | — 0,25 | — 0,28 | + 0,20 | — 0,15 | — 0,18 | + 0,21 |
| 5 | + 0,31 | — 0,02 | — 0,01 | + 0,24 | — 0,06 | — 0,46 |
| 6 | — 0,09 | — 0,13 | — 0,12 | — 0,07 | + 0,32 | + 0,18 |
| 1, — 7 | + 0,01 | + 0,02 | + 0,02 | — 0,01 | 0. | 0. |
| 2 | — 6,73 | +21,44 | + 0,42 | — 0,11 | + 0,24 | — 0,17 |
| 3 | — 3,38 | — 2,42 | + 1,21 | — 1,70 | + 0,01 | — 0,02 |
| 4 | + 0,01 | + 0,11 | — 0,01 | — 0,07 | + 0,03 | + 0,06 |
| 5 | + 0,04 | — 0,09 | + 0,07 | + 0,04 | — 0,13 | — 0,04 |
| 6 | + 0,04 | + 0,08 | — 0,07 | + 0,03 | + 0,17 | — 0,11 |
| 7 | — 0,05 | — 0,01 | 0. | — 0,04 | — 0,01 | + 0,14 |
| 3, — 8 | — 0,04 | 0. | 0. | — 0,01 | 0. | 0. |
| 4 | — 0,01 | + 0,03 | — 0,02 | — 0,01 | + 0,01 | 0. |
| 5 | — 0,02 | — 0,02 | + 0,02 | — 0,01 | — 0,02 | + 0,02 |
| 6 | + 0,03 | 0. | 0. | + 0,03 | 0. | — 0,06 |
| 7 | — 0,02 | + 0,02 | — 0,02 | — 0,02 | + 0,07 | + 0,05 |
| 8 | 0. | — 0,01 | + 0,01 | 0. | — 0,05 | + 0,02 |

La funzione $nz$ è stata controllata per sezioni, come furono controllati gl'integrali $\varphi$, $\psi$, $\xi$, ecc. nella tavola XVIII. Si ebbe la tavola seguente:

| | $i'=1$ | | $i'=2$ | | $i'=3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Somma dei coefficienti di $nz$ | + 59",52 | — 28",82 | — 144",70 | — 127",25 | — 106".27 | + 24",67 |
| Somma dei coefficienti di $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | + 59,52 | — 28,82 | — 144,70 | — 127,24 | — 106,26 | + 24,67 |
| Differenza | 0. | 0. | 0. | — 0,01 | — 0,01 | 0. |

| | $i'=4$ | | $i'=5$ | | $i'=6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| Somma dei coefficienti di $nz$ | $-0''{,}23$ | $-26''{,}07$ | $-1''{,}85$ | $-0''{,}53$ | $-0''{,}20$ | $+1''{,}05$ |
| Somma dei coefficienti di $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | $-0{,}25$ | $-26{,}07$ | $-1{,}88$ | $-0{,}50$ | $-0{,}17$ | $+1{,}05$ |
| Differenza | $+0{,}02$ | $0.$ | $+0{,}03$ | $-0{,}03$ | $-0{,}03$ | $0.$ |

| | $i'=7$ | | $i'=8$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen |
| Somma dei coefficienti di $nz$ | $-3''{,}21$ | $-2''{,}47$ | $-0''{,}08$ | $+0''{,}03$ |
| Somma dei coefficienti di $n\frac{dz}{d\varepsilon}$ | $-3{,}19$ | $-2{,}46$ | $-0{,}08$ | $+0{,}03$ |
| Differenza | $-0{,}02$ | $-0{,}01$ | $0.$ | $0.$ |

Le funzioni $r$, $w_0$ e $\frac{h_0}{h}$ sono state controllate insieme come segue:

La (56) § II, Venturi l. c., è

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h}\left(\frac{1}{(1+r)^2}\right).$$

Svolgendo colla serie del binomio ed arrestandoci al 2$^{do}$ ordine, coll'osservare che $r$ è di 1° ordine, abbiamo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} - 2r$$

giacchè il fattore $\frac{h_0}{h}$ che dovrebbe moltiplicare $2r$, uguagliando l'unità più termini di 1° ordine almeno, deve sostituirsi con 1. Dalla (61) l. c. risulta poi che sino al 2$^{do}$ ordine è:

$$\frac{dz}{dt} = w_0 .$$

Quindi la precedente diviene

$$w_0 = \frac{h_0}{h} - 2r$$

che costituisce la formula di controllo; il quale è il controllo generale di tutto il calcolo perchè basato sulle relazioni generali che hanno gl'integrali del moto. Ecco la tavola dei risultati:

Tav. XXII.

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $\frac{h_0}{h} - 2\nu$ | | $w_0$ | | Differenza | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| 0, 0 | + 0″,0515$\varepsilon$ | | + 0″,0515$\varepsilon$ | | 0,000 | |
| 1, 0 | —214,770 | + 88″,155 | —214,774 | + 88″,154 | 4 | + 1 |
| 1, 0 | + 0,8528 | + 3,7001 | + 0,8528 | + 3,7001 | 0 | 0 |
| 2, 0 | — 0,326 | — 0,120 | — 0,326 | — 0,120 | 0 | 0 |
| 3, 0 | + 0,019 | — 0,006 | + 0,017 | — 0,003 | + 2 | — 3 |
| — 2, — 1 | 0,00 | + 0,03 | 0,00 | + 0,04 | 0,00 | — 0,01 |
| — 1 | — 1,32 | — 0,55 | — 1,34 | — 0,57 | + 0,02 | + 2 |
| 0 | — 3,30 | + 0,73 | — 3,30 | + 0,73 | 0. | 0. |
| 1 | — 27,87 | — 64,59 | — 27,87 | — 64,58 | 0 | — 1 |
| 2 | — 0,22 | — 3,22 | — 0,21 | — 3,21 | — 1 | — 1 |
| 3 | — 0,04 | — 0,10 | — 0,04 | — 0,11 | 0. | + 1 |
| — 1, — 2 | — 0,19 | + 0,14 | — 0,20 | + 0,15 | + 0,01 | — 0,01 |
| 0 | — 2,85 | + 3,94 | — 2,86 | + 3,96 | + 1 | — 2 |
| 1 | — 49,21 | + 48,68 | — 49,22 | + 48,68 | + 1 | 0 |
| 2 | — 93,73 | +112,40 | — 93,72 | +112,39 | — 1 | + 1 |
| 3 | + 1,26 | — 0,55 | + 1,27 | — 0,57 | — 1 | + 2 |
| 4 | 0,04 | — 0,05 | + 0,04 | — 0,06 | 0 | + 1 |
| — 1, — 3 | 0,00 | + 0,03 | 0,00 | + 0,02 | 0,00 | + 0,01 |
| 0 | + 0,37 | + 1,93 | + 0,38 | + 1,92 | — 1 | + 1 |
| 1 | + 0,17 | + 24,73 | + 0,15 | + 24,72 | + 2 | + 1 |
| 2 | + 49,11 | + 99,62 | + 49,12 | + 99,64 | — 0,01 | — 0,02 |
| 3 | — 21,86 | — 5,82 | — 21,85 | — 5,82 | — 1 | 0 |
| 4 | + 0,21 | + 0,34 | + 0,20 | + 0,34 | + 1 | 0 |
| 5 | + 0,01 | 0. | + 0,03 | 0,00 | + 1 | 0 |
| 0, — 4 | — 0,18 | — 0,06 | — 0,18 | — 0,06 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | — 1,88 | — 1,05 | — 1,90 | — 1,08 | + 2 | + 3 |
| 2 | — 20,22 | + 0,42 | — 20,23 | + 0,42 | + 1 | 0 |
| 3 | — 6,18 | + 6,83 | — 6,16 | + 6,83 | — 2 | 0 |
| 4 | — 1,05 | — 5,91 | — 1,06 | — 5,90 | + 1 | — 1 |
| 5 | — 0,12 | + 0,06 | — 0,11 | + 0,08 | — 1 | — 2 |
| 1, — 5 | — 0,06 | + 0,09 | — 0,05 | + 0,08 | — 0,01 | + 0,01 |
| 2 | — 0,58 | + 1,28 | — 0,59 | + 1,27 | + 1 | + 1 |
| 3 | + 1,03 | + 2,75 | + 1,04 | + 2,75 | — 1 | 0 |
| 4 | — 2,48 | — 0,84 | — 2,48 | — 0,85 | 0 | + 1 |
| 5 | + 1,55 | — 1,09 | + 1,54 | — 1,09 | + 1 | 0 |
| 6 | — 0,04 | — 0,04 | — 0,04 | — 0,04 | 0 | 0 |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $\frac{h_0}{h} - 2\nu$ | | $w_0$ | | Differenza | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| | $''$ | $''$ | $''$ | $''$ | | |
| 1, — 6 | + 0,02 | + 0,02 | + 0,02 | + 0,01 | 0,00 | + 0,01 |
| 2 | + 0,13 | + 0,17 | + 0,14 | + 0,18 | — 1 | — 1 |
| 3 | + 1,10 | + 0,14 | + 1,10 | + 0,13 | 0 | + 1 |
| 4 | — 0,58 | + 0,51 | — 0,57 | + 0,52 | — 1 | — 1 |
| 5 | — 0,08 | — 0,94 | — 0,08 | — 0,94 | 0 | 0 |
| 6 | + 0,56 | + 0,32 | + 0,57 | + 0,31 | — 1 | + 1 |
| 3, — 7 | — 2,43 | + 3,38 | — 2,42 | + 3,36 | — 1 | + 2 |
| 4 | + 0,05 | + 0,20 | + 0,05 | + 0,19 | 0 | + 1 |
| 5 | — 0,27 | — 0,12 | — 0,26 | — 0,12 | — 1 | 0 |
| 6 | + 0,31 | — 0,17 | + 0,32 | — 0,18 | — 1 | + 1 |
| 7 | — 0,01 | + 0,22 | — 0,01 | + 0,23 | 0 | — 1 |
| 3, — 8 | 0. | + 0,02 | 0. | + 0,03 | 0,00 | — 0,01 |
| 4 | + 0,05 | + 0,02 | + 0,04 | + 0,02 | + 1 | 0 |
| 5 | — 0,06 | + 0,04 | — 0,06 | + 0,04 | 0 | 0 |
| 6 | 0. | — 0,12 | 0. | — 0,12 | 0 | 0 |
| 7 | + 0,11 | + 0,09 | + 0,12 | + 0,09 | — 1 | 0 |
| 8 | — 0,07 | + 0,02 | — 0,08 | + 0,03 | + 1 | — 1 |

Quanto alle costanti di queste tre ultime funzioni, osserviamo che quella di $\frac{h_0}{h}$ cioè $h_0\gamma'_2$, fu già determinata indietro: quella di $nz$ fu calcolata colla solita condizione che per $t = 0$ sia $nz = 0$ (Venturi, l. c. pag. 19. § III). La costante, infine, di $\nu$ può calcolarsi in due modi; o direttamente, notando che per $t = 0$, è $\nu = 0$, o per mezzo della relazione che già servì all'ultimo controllo, cioè:

$$w = \frac{h_0}{h} - 2\nu .$$

Io ho calcolato direttamente tale costante di $\nu$ che è chiamata $c'_1$ (Venturi, l. c. pag. 40) per potere, col mezzo della formula precedente, ottenere un esatto e rapido controllo delle costanti $c'_2$ $c'_3$ $\gamma'_1$ già calcolate e della stessa $c'_1$. Ho direttamente trovato:

$$c'_1 = + 27'', 87 .$$

Quindi adoperando la solita formula come controllo delle costanti sinora trovate, tranne $\gamma'_3$ $\gamma'_4$, ho avuto:

$$\text{costante di } \left(\frac{h_0}{h} - 2\nu\right) = 1 - 40'', 31$$

$$\text{costante di } w = 1 - 40 , 36$$

$$\text{Differenza} = + 0 , 05 .$$

Dopo di ciò fu determinata la costante di $nz$ colla condizione sopra ricordata, cioè che per $t = 0$ dev'essere $nz = 0$, e si trovò, ricordando che tal costante è chiamata $c'_4$:

$$c'_4 = -59^\circ, 29', 32'', 09 .$$

Rimane per ultimo a fare il controllo delle tre costanti $c'_4$, $\gamma'_3$ e $\gamma'_4$.

Ciò si ottenne in questo modo semplicissimo, per sezioni. Detti A, B, C, i coefficienti della stessa sezione respettiva di $nz$, $\Xi$, e $\Lambda$, i termini che formano le costanti arbitrarie hanno, per quella sezione, la forma $A_i \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega)$, $A_{i+1} \cos[(i+1)\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega]$ ecc. Ora prendendo i termini corrispondenti agli stessi valori di $i$, $i'$ nelle tre funzioni e sommando si ha, evidentemente:

$$A_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + B_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + C_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) =$$
$$= \left[A_i^{(c)} + B_i^{(c)} + C_i^{(c)}\right] \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega)$$

che controlla, termine per termine le tre costanti in discorso. Per controllare anche le somme di tali termini, si diedero nella formula precedente ad $i$ tutti i valori che son combinati con un dato $i'$ e si sommarono le eguaglianze ottenute fra loro. Così si ottennero dei controlli per sezione, che sono quelli qui riportati, in base alla formula:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_i A_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i B_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i C_i^{(c)} \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i A_i^{(s)} \operatorname{sen}(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i B_i^{(s)} \operatorname{sen}(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i C_i^{(s)} \operatorname{sen}(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega)
\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned}
&\Sigma_i \left[A_i^{(c)} + B_i^{(c)} + C_i^{(c)}\right] \cos(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) + \\
&+ \Sigma_i \left[A_i^{(s)} + B_i^{(s)} + C_i^{(s)}\right] \operatorname{sen}(i\varepsilon_0 - i'\mu\varepsilon_0 + \omega) .
\end{aligned}\right.$$

*Tavola dei controlli delle* $c'_4, \gamma'_3, \gamma'_4$.

| | $i' = 0$ | $i' = 1$ | $i' = 2$ | $i' = 3$ | $i' = 4$ | $i' = 5$ | $i' = 6$ | $i' = 7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° membro della $\mu\varepsilon$ | $+59^\circ,27',5'',17$ | $-18'',39$ | $+1'',56$ | $+158'',06$ | $+29'',19$ | $+0'',40$ | $-1'',24$ | $-26'',32$ |
| 2° membro della $\mu\varepsilon$ | $+59^\circ,27',5'',16$ | $-18'',37$ | $+1'',59$ | $+158'',04$ | $+29'',21$ | $+0'',41$ | $-1'',22$ | $-26'',30$ |
| Differenza | $+0'',01$ | $-0'',02$ | $-0'',03$ | $+0'',02$ | $-0'',02$ | $-0'',01$ | $-0'',02$ | $-0'',02$ |

Così sono completamente determinate in prima approssimazione le 6 variabili del moto $nz$, $a\varphi$, $a\cos\lambda\psi$, $\frac{h_0}{h}$, $\Xi$, $\Lambda$. Riunendone qui la sola prima sezione $i' = 0$ ed aggiungendovi le relative costanti, si ebbe:

*Tavola per le variabili delle perturbazioni.*

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $n_0 z$ | | $a\varphi$ | | $a \cos \lambda\psi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| | $-59°,29',32'',1$ | | $-217'',75$ | | $+88'',73$ | |
| | $[1-27'',393]\varepsilon$ | | $+0'',85284\varepsilon$ | | $+3'',70014\varepsilon$ | |
| 1, 0 | $-87'',31$ | $-25111'',261$ | $-20'',84$ | $-0'',300$ | $-0'',09$ | $-19'',86$ |
| 1, 0 | $-3,70014\varepsilon$ | $+0,84684\varepsilon$ | | | | |
| 2, 0 | $+2,71$ | $+6,26$ | $+0,90$ | $-0,12$ | $+0,10$ | $+0,84$ |
| 2, 0 | $+0,11170\varepsilon$ | $-0,02575\varepsilon$ | | | | |
| 3, 0 | 0,00 | $+0,01$ | $-0,05$ | $+0,01$ | 0,00 | $-0,06$ |
| | (continua a tav. XXI) | | (continua a tav. XVIII) | | (continua a tav. XVIII) | |

| $\varepsilon$ , $\mu\varepsilon$ | $\frac{h_0}{h}$ | | $\Xi$ | | $A$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sen | cos | sen | cos | sen |
| | $1+15'',43$ | | $+4'',23$ | | $-0'',52$ | |
| | $-0'',05150\varepsilon$ | | $-0'',04231\varepsilon$ | | $-2'',02362\varepsilon$ | |
| 1, 0 | $+0'',14$ | $+0'',17$ | $-0'',62$ | $-0'',06$ | $+0'',05$ | $+1'',45$ |
| 1, 0 | | | | | | |
| 2, 0 | $-0,11$ | $-0,02$ | $+0,96$ | $+0,03$ | $+0,01$ | $-0,99$ |
| 2, 0 | | | | | | |
| 3, 0 | $+0,01$ | 0,00 | $-0,06$ | $+0,02$ | $+0,02$ | $+0,06$ |
| | (continua a tav. XXI) | | (continua a tav. XVIII) | | (continua a tav. XVIII) | |

Per le altre sezioni vedi le tavole relative XVIII, XXI.

## Paragone del calcolo colle osservazioni.

Per provare l'esattezza degli sviluppi precedenti, prendo un sistema di elementi di Feronia calcolati per quadrature dallo scopritore, prof. C. F. Peters ed inseriti nel « Berliner Jahrbuch » del 1885. Essi sono i seguenti:

Feronia (72)

Epoca dei movimenti e dell'osculazione: 1883 Dicembre 19, 0 t. m. Berlino.
Equinozio medio di riferimento: 1880 Gennaio 1, 0.
Anomalia media . . . . . $c = 127°,18',40'',1$
Longitudine perielio . . . . . $\varpi = 307, 44, 47, 0$
Longitudine nodo ascendente $\theta = 207, 47, 44, 0$
Inclinazione. . . . . $i = 5, 23, 58, 3$
Angolo eccentrico . . . . . $\varphi = 6, 52, 59, 3$
Movimento medio . . . . . $n = 1039''.89172$.

Ricordando che l'epoca degli elementi posti a base del calcolo è 1879 Novembre 30, 0, si vede che la differenza fra le epoche è di precisi giorni medî 1480. La longitudine media non perturbata di Feronia è per 1883, Dicembre 19, 0 :

$$n_0 t + c_0 = 487^\circ, 07', 13''$$

e dall'equazione di Keplero si deduce il valore seguente di $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = 492^\circ, 14', 30''$$

e in questi archi si ritiene l'intiera circonferenza che contengono, perchè $\varepsilon$ entra anche senza i segni di seno e coseno, e viene anche moltiplicata per $\mu$.

Per formare la parte $c'_0 + \mu(\varepsilon - c_0)$ degli argomenti, si ricordi che si trovò:

$$c'_0 = 336^\circ, 04', 28'', 7 \qquad c_0 = 59^\circ, 31', 21'', 4$$

$$\log \mu = \bar{1},4587815 .$$

Valutando con questi valori e col valore precedente di $\varepsilon$ la funzione precedente, si trova :

$$c'_0 + \mu(\varepsilon - c_0) = 100^\circ, 30', 33''.$$

Ricordando poi che l'espressione generale degli argomenti è :

$$i\varepsilon - i'[c'_0 + \mu(\varepsilon - c_0)]$$

coi valori precedenti si formarono tutti gli archi e i rispettivi seni e coseni, come per la determinazione delle costanti arbitrarie, si formò poi il valore di $\varepsilon$ in parti di raggio che risultò :

$$\log \varepsilon = 0,9340791 .$$

Si calcolarono infine le serie dell'ultima tavola, che diedero :

$$nz + c_0 = 127^\circ, 04', 23'', 3$$
$$\varphi''_1 = -364'', 36$$
$$\psi''_1 = -119'', 48$$
$$\frac{h_0}{h} = 1 + 34'', 9$$
$$\Xi'' = +2'', 01$$
$$\Lambda'' = -4'', 00 .$$

Le formule da cui si dedussero i valori degli elementi per l'epoca 1883 Dicembre 19, 0 sono quelle, molto più semplici di quelle adoperate da Hansen, che si trovano nel Venturi l. c. pag. 100 e segg. ove fu cambiato $\varpi$ e $\varpi_0$ in $-\varpi$ e $-\varpi_0$ per contare la longitudine del perielio come si usa nella pratica. — Riducendole al 1° ordine coll'osservare che $\frac{h_0}{h} = 1 + \delta \frac{h_0}{h}$, il quale ultimo termine essendo di 1° ordine come $\varphi$, $\psi$ può trascurarsi, e ponendo :

$$\varphi_1 = a_0 \varphi \qquad \psi_1 = a_0 \cos \lambda_0 \psi$$

tali formule divengono :

$$\pi = \pi_0 + \frac{\xi''}{\operatorname{sen} \lambda_0} \qquad \lambda = \lambda_0 + \frac{\eta''}{\cos \lambda_0}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{p''}{\operatorname{sen} i_0} \qquad i = i_0 + \frac{q''}{\cos i_0}$$

ove è

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos^2 \lambda_0 \varphi_1 \qquad p = \Xi \cos(\theta_0 - \pi_0) - \Lambda \operatorname{sen}(\theta_0 - \pi_0)$$
$$\xi = \tfrac{1}{2} \cos \lambda_0 \psi_1 \qquad q = \Xi \operatorname{sen}(\theta_0 - \pi_0) + \Lambda \cos(\theta_0 - \pi_0) .$$

Pel moto medio si ha:

$$\log n = \log n_0 - 1{,}30287 \left( \delta \frac{h_0}{h} + \eta \frac{\operatorname{sen} \lambda_0}{\cos^2 \lambda_0} \right)$$

Per l'anomalia media infine

$$c = \varepsilon - e_0 \operatorname{sen} \varepsilon$$

ove $\varepsilon$ è data dalla catena seguente di formule: (l. c. pag. 101)

$$\bar{\varepsilon} - e_0 \operatorname{sen} \bar{\varepsilon} = n_0 z + c_0 \; ; \quad \operatorname{tg} (v - \pi_0) = \frac{\cos \lambda_0 \operatorname{sen} \bar{\varepsilon}}{\cos \bar{\varepsilon} - \operatorname{sen} \lambda_0} \; ; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\cos \lambda \operatorname{sen} (v - \pi)}{\operatorname{sen} \lambda + \cos (v - \pi)} .$$

Nelle precedenti, $\xi''$ $\eta''$ ecc. idicano le stesse quantità $\xi$ $\eta$ ridotte in secondi, e $\delta \frac{h_0}{h}$ indica $\frac{h_0}{h} - 1$.

Da queste formule si dedusse

Feronia (72) per 1883. Dicembre 19, 0.

| | | |
|---|---|---|
| Anomalia media . . | $c = 127°,18',50''$ | |
| Longitudine perielio | $\varpi = 307, 44, 16, 0$ | Equinozio medio di 1880, 0. |
| Longitudine nodo. . | $\theta = 207, 47, 55, 1$ | |
| Inclinazione. . . . . | $i = 5, 23, 58, 5$ | |
| Angolo eccentrico. . | $\lambda = 6, 53, 05, 2$ | |
| Medio movimento . | $\mu = 1039'', 9036$. | |

Le differenze fra questi elementi e quelli di Peters, sono nel quadro seguente:

$$\Delta\, c = -0°,0',10''$$
$$\Delta\, \varpi = +0, 0, 31$$
$$\Delta\, \theta = -0, 0, 11$$
$$\Delta\, i = -0, 0, 0, 2$$
$$\Delta\, \lambda = -0, 0, 05, 8$$
$$\Delta\, n = -0'', 0119 .$$

# RELAZIONE

presentata al PRESIDENTE durante le ferie accademiche 1885-86, dai Socî BIZZOZERO (relatore) e TOMMASI-CRUDELI, sulla Memoria del dott. UGOLINO MOSSO, intitolata: *Sull'azione fisiologica della cocaina.*

« Questo lavoro, frutto di numerose esperienze istituite nel Laboratorio Fisiologico di Torino, tratta dell'azione della cocaina sul sistema nervoso degli animali a sangue freddo e caldo, sulla respirazione, sul cuore, sui vasi sanguigni, sul calore animale. Dai risultati ottenuti in questo studio analitico l'autore venne condotto a formulare delle conclusioni importanti assai per l'applicazione terapeutica di questa sostanza, conclusioni che possono essere riepilogate nella sentenza: che la cocaina è destinata a sostituire la stricnina in tutte le sue applicazioni terapeutiche fisiche, perchè pur avendo la medesima azione, ha il vantaggio di esser meno velenosa.

« Considerato il modo con cui vennero condotte le esperienze, la forma con cui venne redatta la Memoria, e le deduzioni che ne vennero tratte, noi proponiamo che il lavoro del dott. U. Mosso venga pubblicato colle figure annesse negli Atti dell' Accademia ».

# Sull' azione fisiologica della Cocaina.
## Memoria del dott. UGOLINO MOSSO

Malgrado le importanti applicazioni terapeutiche della cocaina manca fino ad ora nella farmacologia uno studio nel quale sia minutamente analizzata l'azione fisiologica di questa sostanza. Sono specialmente le dosi tossiche quelle che vennero meno studiate nei loro effetti sull'organismo. Per non ripetere cose che sono già note, prenderò come punto di partenza il lavoro pregevolissimo sulla cocaina che B. v. Anrep [1] pubblicò nel 1879 sotto la direzione del prof. Rossbach: ed in questa Memoria pubblicherò delle mie esperienze ed osservazioni solo quelle che mi sembrano utili a completare questo primo lavoro di Anrep, prendendo nello stesso tempo in considerazione le ricerche che vennero fatte successivamente dagli altri esperimentatori sull'azione fisiologica della cocaina.

### I.

### Azione della cocaina sul sistema nervoso degli animali a sangue freddo.

Ho ripetuto le esperienze di Anrep sulle rane e ottenni dei risultati che non si accordano completamente colle sue conclusioni. Egli dice che la cocaina [2] « in « prima linea paralizza completamente le terminazioni dei nervi sensibili. E che dimi- « nuisce considerevolmente l'eccitabilità dei nervi motori, senza però paralizzare com- « pletamente nè queste fibre motrici, nè il midollo ».

Servendomi del metodo di G. Müller per impedire al veleno di penetrare in una estremità del corpo di una rana, ho isolato il nervo sciatico di un lato, vi passai sotto un filo e feci una legatura in massa dei muscoli e dei vasi della coscia escluso il nervo.

*Esperienza I.*

Ad una rana del peso di 30 gr. preparata in questo modo, inietto alle ore 4,35 nella cavità dell'addome con uno schizzetto Pravaz gr. 0,008 di cocaina (soluzione 2 %) [3].

[1] B. v. Anrep, *Ueber die physiologische Wirkung des Cocaïns.* Pflüger's Archiv, Bd. XXI, s. 38. 1879.

[2] Op. cit., p. 57.

[3] In queste mie ricerche adoperai specialmente la cocaina della fabbrica Böhringer di Mamheim. La cocaina sintetica di Merk, che ho paragonato colla cocaina di altre provenienze mi diede eguali risultati. Avverto che mi sono servito unicamente del cloridrato di cocaina e quando dirò semplicemente cocaina intendo parlare di questo sale.

4h36′. Sono cessati i movimenti respiratori; la rana si lascia mettere sul dorso e in tutti gli atteggiamenti: è però ancora sensibile.

4 37. Muscoli rilasciati, occhi non più sporgenti: gli eccitamenti meccanici producono una leggera contrazione che si manifesta con un tremolìo nei muscoli dell'estremità opposta.

4 38. Qualunque eccitamento meccanico venga applicato sulle estremità posteriori ed anteriori, non riesce a produrre un movimento riflesso. Anche eccitando la gamba dove non è penetrato il veleno, per mezzo di correnti indotte così forti che non possono sopportarsi sulla lingua, si produce una contrazione locale del gastrocnemio, ma non si produce un movimento riflesso nelle altre parti del corpo. Eccitando con correnti forti le altre parti del corpo rimane egualmente immobile la gamba isolata. Tagliando dai due lati i nervi alla regione lombare e irritandoli metodicamente in modo da paragonare la loro eccitabilità ho trovato per correnti debolissime che i muscoli delle due gambe si contraggono con uguale forza per lo stesso eccitamento.

Da questa esperienza risulta: che la cocaina non produce una paralisi delle terminazioni periferiche dei nervi sensibili, che la paralisi è centrale e non periferica: e l'eccitabilità del nervo sciatico, quando mancano già i movimenti riflessi, non differisce in modo apprezzabile nel lato sano e nel lato dove agì il veleno. Ho ripetuto questa esperienza isolando col metodo di Cl. Bernard i nervi lombari, e legando in massa l'addome e la pelle in modo che la cocaina non potesse venire in contatto coi nervi delle estremità posteriori; ottenni il medesimo risultato, cioè mancanza completa di movimenti riflessi per qualunque eccitamento meccanico ed elettrico fatto agire su qualunque parte del corpo. Delle correnti fortissime applicate sopra la colonna vertebrale in corrispondenza delle braccia, facevano contrarre fortemente queste estremità che si stringevano contro al torace, ma non producevano alcun movimento nelle estremità posteriori. In una rana, avvelenata con forti dosi di cocaina, tagliando la testa e mettendo gli elettrodi in contatto colla sostanza del midollo, si producono delle contrazioni nei muscoli vicini, ma non comparisce alcun movimento nelle estremità posteriori anche per forti eccitamenti elettrici.

In base a queste osservazioni si deve conchiudere che la cocaina a dosi elevate paralizza il midollo, mentre sono ancora intatti i nervi di moto ed i nervi sensibili nella loro parte periferica. La conducibilità del midollo è sospesa ed è impedita la funzione delle cellule nervose che prendono parte alla produzione dei movimenti riflessi.

Il meccanismo di azione della cocaina è differente da quello del curaro e della stricnina: e solo nell'ultimo periodo di avvelenamento per dosi elevate essa diminuisce l'eccitabilità dei nervi motori.

Devo avvertire riguardo alle dosi, che nelle rane io ottenni degli effetti alquanto più energici per le medesime quantità di cocaina di quanto non abbia ottenuto Anrep. Le dosi di 0,005 — 0,01 che egli considera come medie, io devo invece considerarle come forti. Questa differenza dipende probabilmente dalla temperatura più elevata alla quale io ho fatto le mie esperienze e forse anche dal peso delle rane, perchè le mie non superavano i 30 grammi, mentre che le rane che si adoperano nei laboratorî tedeschi sono generalmente più grosse. Non credo che la cocaina da me adoperata fosse più attiva di quella di Anrep perchè non ho osservato che nei cani vi fosse un' eguale differenza per le dosi della cocaina.

Le rane colle dosi medie e forti prendono l'aspetto caratteristico delle rane che sono avvelenate con le sostanze che inceppano gravemente ed aboliscono le funzioni del sistema nervoso. Cessano i movimenti del respiro; gli occhi sono infossati, la testa si piega in basso per proprio peso e la bocca tocca il piano su cui riposa l'animale, i muscoli sono rilasciati flaccidi e senza tonicità.

---

*Cuori linfatici.* — I cuori linfatici cessano quasi immediatamente di pulsare. Per assicurarmi che questo arresto dipende dalla cessata funzione del midollo spinale e non dall'azione locale della cocaina sulle fibre muscolari dei cuori linfatici, ho iniettato 0,002 di cocaina nel muscolo gastrocnemio di una rana, mentre osservavo i movimenti dei due cuori linfatici in vicinanza del coccige. Nel momento in cui per mezzo del massaggio una parte della cocaina passò nel cuore linfatico destro, osservai un rallentamento e poi un arresto dei suoi movimenti, ma poco dopo esso ricominciò a pulsare e la dose amministrata alla rana essendo incapace di produrre una paralisi del midollo, i cuori linfatici continuarono a pulsare indefinitamente.

## II.

## Fenomeni generali dell'avvelenamento per cocaina negli animali a sangue caldo.

### *Differenze individuali per le dosi.*

Pei cani le dosi di gr. 0,015 a 0,02 producono già degli effetti abbastanza gravi di avvelenamento: si osservano però delle differenze individuali tanto considerevoli, che riesce impossibile stabilire con esattezza dei dati precisi riguardo alle dosi. In alcuni cani dosi minime (0,005 per chilogr.) producono già degli effetti manifesti di avvelenamento. L'animale cambia di fisionomia ed è come spaventato: ha delle allucinazioni, non obbedisce più, fa dei movimenti anormali colla bocca, corre intorno senza scopo, ha la pupilla dilatata e la schiuma alla bocca. In queste condizioni di eccitabilità esagerata, cresce notevolmente la temperatura del corpo.

Ho trovato invece alcuni cani che avevano una grande resistenza per la cocaina; ricorderò fra questi l'esempio di un cane nel quale una dose di cocaina sei volte maggiore (0,03 per chilogr.) produsse quasi nessun effetto. La dose mortale per i cani, secondo le mie esperienze, sarebbe di circa 0,03 per chilogr. Ora riferisco due esempi, che sono il minimo ed il massimo di sensibilità per la cocaina, che io abbia osservato.

### *Esperienza II. — 20 maggio 1886.*

Cane barboncino del peso di 8570. Ore 3,4 pom. Temperatura rettale = 39°,5 (1); polso = 85; respiro = 24. L'animale è molto tranquillo.

3h10′. Iniezione sotto la pelle di gr. 0,17 di cocaina (0,02 per chilogr.). Poco dopo l'animale si sdraia in terra.

3 16. Pupilla alquanto dilatata.

3 28. L'animale non si è mai mosso dalla posizione che aveva preso. Eccitabilità normale pel dolore.

(1) Tutte le determinazioni della temperatura contenute in questa Memoria vennero fatte nel retto.

4h L'animale cambia spontaneamente di posizione; cammina come un cane normale, gli si mette il termometro nel retto senza che reagisca. Temperatura = 40°,0; polso = 94; respiro = 26.

4 45. Succedono di quando in quando delle espirazioni rumorose che rassomigliano ad un leggero sforzo di vomito. L'animale cammina pel laboratorio, e non presenta alcun fenomeno di avvelenamento. Nel mattino del giorno successivo trovo che sta bene e ripeto l'esperienza con una dose maggiore di cocaina per vedere se proprio era refrattario all'azione di questo veleno.

9 33. antim. Temperatura = 40°,2; polso = 90; respiro = 25.

9 38. Iniezione di 0,24 di cocaina in varî punti sotto la pelle. Poco dopo l'animale si sdraia e prende la posizione di ieri, stando appoggiato sopra le zampe col torace e l'addome che toccano il suolo.

9 40. Non osservo alcuno dei fenomeni caratteristici dell'avvelenamento per cocaina, solo la pupilla è dilatata; il cane è meno allegro, non viene vicino quando lo si chiama, rifiuta il cibo.

9 45. Si lecca continuamente le labbra.

10 15. L'animale è meno tranquillo di prima; gira per la stanza leccandosi continuamente le labbra. Ho veduto ripetersi spesso questo fenomeno per le piccole dosi (0,015 — 0,02) nei cani. È una impressione soggettiva ed un' allucinazione del gusto; e vedremo fra poco in questo medesimo cane un' altra allucinazione per il senso dell'olfatto. In questa ed in altre esperienze fatte per constatare queste allucinazioni dei sensi, si metteva ogni cura per escludere il dubbio che l' animale si leccasse perchè sentiva il gusto amaro della cocaina di cui si fosse per avventura perduta qualche gocciola, fra i peli, e introdotta quindi nella bocca.

10 25. L'animale si è alzato, non è più tranquillo come prima, gira per la stanza leccandosi continuamente le labbra e portando la lingua contro le narici. Nel voltarsi qualche volta barcolla.

10 30. Gira intorno fiutando in tutti gli angoli come se fosse in preda ad un' allucinazione. Corre intorno alla tavola fiutando il pavimento che rasenta col muso e continua a leccarsi il naso. È difficile contare il respiro ed il polso perchè appena lo si prende, il cane cerca di svincolarsi.

10 40. L'animale è più tranquillo. Temperatura = 40°,7.

11 25. Temperatura = 41°,0. L'animale non presenta più i fenomeni delle allucinazioni del gusto e dell'olfatto; è però sempre molto irrequieto; obbedisce alla voce che lo chiama.

7 30. Temperatura = 40°,6. Aspetto normale; nei giorni successivi non presentò più nulla.

In questo esempio abbiamo constatato che una dose forte di cocaina (0,02 —, e 0,03 per chilog.) produsse in due giorni successivi effetti poco considerevoli; riferisco ora un' altra esperienza dove, come succede generalmente, si ebbero invece degli effetti mortali per un' eguale dose di cocaina.

### *Esperienza III. — 20 maggio 1886.*

Cagnetta inglese vispa ed allegra, pesa 3930 gr. Ore 4 pom. Temperatura = 39°,3; polso = 120 nel minuto; il respiro è difficile a contarsi perchè l'animale è troppo irrequieto e si muove continuamente.

4h 9′. Si iniettano 0,12 gr. di cocaina sotto la pelle in due punti differenti. È una dose di 0,03 per chilogr. Un minuto dopo è già alterata la fisonomia dell'animale, la pupilla è molto dilatata e l'animale irrequieto.

4 11. Messo in terra non si regge bene sulle gambe, non cammina, sta colle gambe larghe, ha l'aspetto di un animale che abbia paura, e trema.

4 12. Comprimo colle unghie la membrana interdigitale nelle estremità posteriori; l' animale non reagisce. Respiro affannoso; cominciano le convulsioni che diventano subito fortissime. Le estremità stanno rigide per 4, o 5 secondi. Il capo e il collo si rovesciano fortemente indietro durante le convulsioni; polso = 120.

4 13. Un altro accesso di tetano; sforzi di vomito ripetuti; schiuma alla bocca; negli accessi apre e chiude la bocca rapidamente, ma non grida. Gli accessi si ripetono ogni 10 secondi circa; qualche volta sono delle semplici scosse che durano poco più di un secondo; altre volte durano 4, o 5 secondi.

4 16. Gli accessi sono più frequenti, si ripetono ogni 6 a 7 secondi.

4 17. Temperatura = 40°,20.

4 20. Le estremità sono insensibili, anche comprimendole fortemente il cane non reagisce; le convulsioni si ripetono ogni 10 secondi, durano circa 2 secondi per ogni accesso, si estendono fortemente le estremità; negli intervalli di riposo respira regolarmente facendo circa 12 a 15 movimenti respiratorî per ogni 5 secondi. Le inspirazioni sono poco profonde, ma il respiro è sufficiente perchè la lingua è rossa.

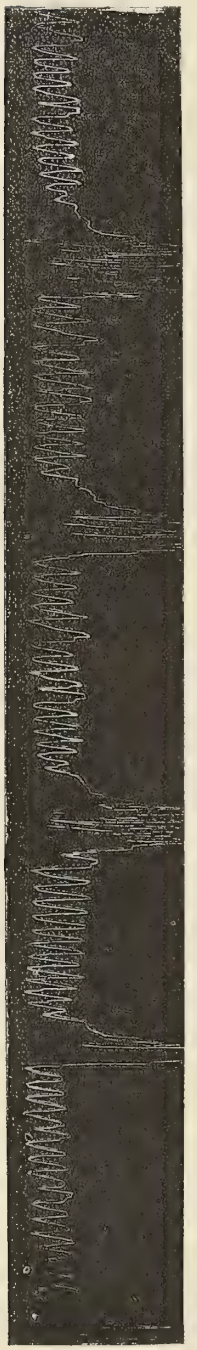



Fig. 1. — Respirazione toracica di un cane. In *A*, *B*, *C*, *D*, *E* succedono degli accessi di convulsioni.

4 25. Gli accessi si ripetono regolarmente circa 10 volte al minuto e durano un poco più di prima.

4 35. Temperatura = 41°,7.

4 36. Succede un fortissimo accesso di convulsioni tetaniche; il torace si ferma nella inspirazione e poco dopo anche il cuore si ferma, e l'animale è morto.

4 38. Due minuti dopo il termometro nel retto segna 42° 10

alle ore 4 39 = 42° 25

4 40 = 42° 35

4 42 = 42° 40

Dopo incomincia a raffreddarsi.

Uno dei fenomeni più interessanti che osservai in questa esperienza è la regolarità con cui si ripetono i periodi delle convulsioni. Riferisco un tracciato della respirazione toracica che ho scritto con il pneumografo Marey alle ore 4, 24. Il tracciato della fig. 1 abbraccia circa 30 secondi, da ciò si comprende che il respiro era molto accelerato.

Cominciando da sinistra (come del resto sono scritti tutti i tracciati successivi) si vede che l'animale fa circa 16 movimenti respiratorî e poi succede un accesso di tetano; in esso il torace compie una profonda inspirazione e resta dilatato mentre fa dei movimenti respiratorî irregolari. Le convulsioni continuano a ripetersi col medesimo ritmo per 4, o 5 minuti di seguito. Questa regolarità nella ripetizione degli accessi basta per sè sola a dimostrarci che le convulsioni prodotte dalla cocaina non sono di natura riflessa come gli accessi stricnici. L'animale era disteso sul pavimento, o sulla tavola; io prendevo ogni precauzione perchè nessuna causa esterna potesse dar luogo a dei fenomeni riflessi, e ciò nulla meno le convulsioni si ripetevano regolarmente col ritmo indicato nella figura 1. Però non in tutti i cani gli accessi di convulsioni succedono colla stessa regolarità. Questi casi sebbene siano abbastanza frequenti non formano la regola. Anche quando le convulsioni si ripetono con dei periodi irregolari è facile distinguerle da quelle che produce la stricnina. Manca spesso il trisma, l'animale ad ogni accesso apre e chiude ripetutamente la bocca, fa continuamente dei movimenti di deglutizione e il tetano non si estende a tutti i muscoli e non è così forte come nell'avvelenamento per stricnina.

Gli accessi convulsivi prodotti dalla cocaina non sono movimenti riflessi esagerati, perchè non dipendono da cause esterne.

Gli stimoli nervosi che producono questi accessi hanno la loro origine nei centri, e siccome ci è affatto ignota la natura intima di queste convulsioni, possiamo supporre che dipendano da disturbi di nutrizione, i quali raggiungono con periodi più o meno rapidi tale intensità da produrre una contrazione spasmodica dei muscoli. Questa supposizione viene confermata dal fatto che nei cani e nei porcellini d'India quando sono divenuti insensibili per gli eccitamenti esterni, succedono ancora con eguale intensità e spontaneamente gli accessi.

L'esistenza di convulsioni quando sono cessati i movimenti riflessi e l'animale non reagisce più a nessun stimolo esterno, dimostrerebbe che il midollo è ancora capace di condurre nei muscoli gli stimoli che si sviluppano nei centri motori, quando è incapace di reagire per gli stimoli che vengono dai nervi sensibili; oppure proverebbe che gli stimoli che si producono nei centri nervosi per l'azione della cocaina, sono più forti di qualunque azione esterna, che venga trasmessa al midollo per mezzo dei nervi centripeti.

## III.

## Azione della cocaina sul sistema nervoso degli animali a sangue caldo.

Vi è una differenza caratteristica fra l'azione della cocaina sugli animali a sangue freddo e quelli a sangue caldo: perchè nelle rane qualunque sia la dose non può constatarsi una azione convulsivante, mentre che negli animali a sangue caldo questa è la sua azione caratteristica. Se però le dosi sono eccessivamente grandi, od è esagerata la sensibilità dell'animale per la cocaina, può succedere la morte senza forte tetano con fenomeni di paralisi generale, scomparsa della sensibilità, cessazione dei movimenti riflessi, arresto del respiro, indebolimento grande della funzione cardiaca e paralisi dei vasi sanguigni.

I centri nervosi sono così profondamente alterati dalle dosi forti (0,03 — 0,04 per chilogr.) che la respirazione artificiale fatta in queste condizioni quando sta per fermarsi il respiro, non basta più a mantenere in vita l'animale, e Anrep ha già descritto con molta esattezza i fenomeni caratteristici dell'avvelenamento per cocaina colle piccole dosi; non mi fermerò quindi su questa parte, riferendomi perciò alla Memoria di Anrep. Tratterò invece in modo speciale i fenomeni che si producono per dosi elevate e mortali di cocaina: essendo questo un argomento che Anrep non ha toccato, e nessuno che io mi sappia l'ha fino ad ora sottoposto ad una analisi particolareggiata.

Amministrando la cocaina a dosi elevate il periodo di eccitamento può essere più o meno lungo. Qualche volta mentre l'animale è in uno stato di grande eccitamento psichico si può già osservare una diminuzione nella sensibilità tattile. L'animale non ritira subito le gambe, se vengono compresse leggermente. In questo primo periodo non si vede che vi esista contemporaneamente una modificazione nei movimenti delle estremità. In un periodo più avanzato l'animale si lascia divaricare le gambe senza reagire; oppure si ferma tenendo le gambe posteriori distese indietro, ed altri fenomeni

rendono manifesto che è scomparsa la sensibilità tattile nelle estremità posteriori: mentre le anteriori sono ancora eccitabili quasi come nello stato normale.

Dopo questo periodo, o durante il medesimo, appaiono i primi disturbi nella motilità. L'animale cammina con disagio, le gambe posteriori tratto tratto si piegano, e se l'animale cerca di voltarsi cedono, ed esso barcolla.

Le modificazioni della sensibilità precedono le modificazioni della motilità. Il cane nel muoversi cerca di sorreggere il peso del corpo colle gambe anteriori e perciò cammina ingobbito. Spesso l'animale si regge ancora sulle gambe, quando è già scomparsa la sensibilità nelle dita su cui comprimendo forte (come ad esempio reggendosi coll'intero peso del corpo sulle dita delle estremità posteriori) esso non fugge, non grida e spesso non ritira neppure la gamba compressa.

Nel principio i riflessi rotulei sembrano esagerati e dopo scompaiono completamente, quando il cane è ancora capace di eseguire dei movimenti volontarî. Gli accessi convulsivi colle dosi elevate scoppiano improvvisamente come nel tetano stricnico. Qualche volta precedono leggere scosse nei muscoli delle estremità e nei muscoli pelliciai, ma nel maggior numero dei casi fin dal primo accesso il cane resta parecchi secondi colle estremità rigide, mentre apre e chiude con forza ripetutamente la bocca. Ho visto dei cani che agitavano le gambe come se nuotassero, o rotolavano sul pavimento girando intorno all'asse longitudinale del corpo. Quando gli accessi si ripetono con molta violenza, vi prendono parte tutti i muscoli del corpo; le estremità si estendono con forza e tremano come nel tetano: i muscoli dell'addome sono contratti, il torace si ferma nella posizione inspiratoria, e la testa si rovescia indietro: spesso in questo momento succede pure una contrazione dei muscoli della vescica e dell'intestino, e gli animali perdono l'orina e le feci (1).

Quando si taglia il nervo sciatico ad un cane mentre esistono delle forti convulsioni per effetto della cocaina, queste cessano immediatamente nell'estremità corrispondente, mentre continuano fortissime nelle altri parti che stanno in rapporto coi centri nervosi. Questa esperienza prova che le contrazioni muscolari prodotte dalla cocaina non dipendono da un'azione locale sulle terminazioni nervose o sulla sostanza dei muscoli, ma da un fatto nervoso centrale che ha la sua sede nel midollo spinale o nel cervello.

Riferisco un'esperienza per far conoscere meglio i fenomeni che osservansi nell'avvelenamento con dosi mortali e mi riserbo di analizzare meglio in un capitolo speciale il meccanismo della morte.

*Esperienza IV — 15 luglio 1886.*

Ad un piccolo cane del peso di 5450 gr. che soffriva di tosse nervosa, inietto gr. 0,10 di cocaina nella cavità addominale alle ore 2 pom. Temperatura rettale = 39° 10.

(1) Ho fatto delle esperienze sulle modificazioni della pressione endovescicale sotto l'influenza locale e generale della cocaina. Io non riferisco ora queste esperienze perchè desidero estendere le mie ricerche sopra questo importante argomento.

Nelle *ricerche sopra la fisiologia del gusto* che il dott. Aducco ed io abbiamo comunicato alla R. Accademia di Medicina di Torino e pubblicate nel giornale (gennaio 1886) abbiamo fatto noto che le soluzioni di cloridrato di cocaina tenute in bocca *sopprimono la sensibilità per i sapori amari*, il che sarebbe la prova sperimentale dell'*energia specifica* dei nervi del gusto.

$2^h$ 5′. Sforzi di vomito.

2 6. Punzecchiando le estremità posteriori per conoscere se la sensibilità è cambiata non riscontriamo alcuna differenza.

2 8. L'animale è molto irrequieto; salta giù dalla tavola e cade male battendo la testa contro il pavimento, perchè le gambe non lo hanno sorretto nella caduta.

2 9. Le estremità posteriori sono meno sensibili delle anteriori, comprimendole o punzecchiandole leggermente non le ritira: ma quando si comprimono forte l'animale grida e le muove.

2 10. Continua la tosse come prima. Questa dose di cocaina non ha punto modificato questo disturbo nervoso. Respiro più celere.

2 11. Non si regge bene sulle gambe posteriori; tenta di portare il centro di gravità sul treno anteriore e cammina ingobbito; la colonna vertebrale fa una curva con forte convessità superiore. Cammina male sollevando molto le gambe.

2 13. Tenendo il cane sospeso per la pelle del collo si vede che i riflessi rotulei sono ancora normali o leggermente più forti del solito.

2 14. Cade e si solleva subito. Quando vuole voltarsi, il treno posteriore si flette e il cane cade. Schiuma abbondante alla bocca.

2 15. Esistono i riflessi per le cause meccaniche che producono forti dolori.

2 16. Si iniettano altri 0,04 gr. di cocaina sotto la pelle.

2 17. Succede un forte accesso di convulsioni che probabilmente non deve attribuirsi a quest'ultima dose perchè non ebbe tempo di assorbirsi. La sensibilità è molto diminuita.

2 18. Altro accesso di convulsioni con forte trisma. L'aspetto dell'animale durante le convulsioni ha una grande analogia col tetano stricnico.

2 20. Si fa la tracheotomia e si comincia la respirazione artificiale. L'animale è rigido per il tetano fortissimo. La sensibilità non è scomparsa. Comprimendo forte colle unghie la membrana interdigitale nei periodi di pausa il cane ritira la zampa del lato che si eccita, ma non muove l'altra.

2 23. La respirazione artificiale non fa cessare gli accessi convulsivi; manca l'asma, anche quando si eseguisce con grande attività la respirazione artificiale.

2 32. Temperatura = 41°7. Malgrado questo forte aumento della temperatura la respirazione non è affannosa o molto frequente. Si prepara la carotide e si levano 10 cc. di sangue per farne l'esame.

2 38. Temperatura = 41° 9. Continuano gli accessi di convulsione. Mancano i riflessi rotulei, ed esistono ancora i movimenti riflessi delle palpebre quando si tocca la congiuntiva. Nelle estremità gli eccitamenti fortissimi producono una ritrazione della gamba solo nel lato che si irrita; manca ogni reazione negli altri muscoli del corpo.

2 44. Tetano fortissimo e continuo. Temperatura = 42° 3. Respirazione = 32 in 1 minuto. La congiuntiva è ancora sempre sensibile. Continua il tetano.

4 50. Si uccide l'animale per dissanguamento.

---

### *Azione della cocaina sui cani col midollo tagliato.*

Per conoscere dove hanno origine le convulsioni caratteristiche della cocaina ho fatto una serie di esperienze sui cani tagliando il midollo fra l'atlante e l'occipite. Nell'esperienza che riferisco ho pure scritto la pressione del sangue.

### *Esperienza V — 6 luglio 1886.*

Ad un cane del peso di 10 kilog. scopro la membrana atlanto occipitale ed alle ore 3 20 taglio il midollo. Respirazione artificiale, polso 18 in 15″ — pressione 260 mm. di mercurio.

$3^h$ 27′. Taglio dei nervi vaghi al collo.

3 30. Polso 40 in 15″. La pressione oscilla fra 200 e 220 mm.

3 33. Da due minuti la pressione è costante fra 110 e 120 mm. Si inietta 0,04 di cocaina nella giugulare.

3 34. Pressione 150 a 160 mm. polso 35 in 15″, si iniettano altri 0,04 di cocaina, la pressione sale a 160 e 180 mm. Pupilla dilatata.

3 35. Mancano i riflessi toccando la congiuntiva; polso 30 in 15 .

3 36. Altri 0,04 di cocaina. La pressione non aumenta più dopo quest'ultima iniezione.

3 39. Si sospende il respiro per circa 20 secondi per vedere se i vasi reagiscono all'asfissia, ma la pressione non aumenta.

3 40. Dando dei leggeri colpi col manico del bistori sul muso del cane esso chiude sempre le palpebre. Mi assicuro che la congiuntiva è insensibile e che mancano i riflessi, toccando la cornea, mentre invece esistono dando un colpo sopra il naso del cane. La pupilla è dilatata, ma sensibile alla luce; riflettendo un raggio di sole sopra gli occhi la pupilla si restringe.

3 41. Muove gli occhi e le palpebre; l'eccitabilità dell'animale nella testa evidentemente è aumentata. Minacciando l'animale come per mettergli le dita negli occhi, esso chiude le palpebre. La cornea che prima era secca ora è divenuta umida per la secrezione più abbondante delle lacrime. La pupilla è sempre dilatata; chiudendo gli occhi si dilata di più, ed aprendoli alla luce si restringe. Muove la bocca e fa come dei movimenti inspiratorî. Salivazione abbondante.

3 43. Comprimendo la membrana interdigitale delle estremità posteriori colle unghie, l'animale ritira la gamba con forza; esso compie quest'atto in due tempi; prima ritira la gamba e poscia la flette sulla coscia. Fa continui movimenti colla testa.

3 45. Riflessi rotulei esagerati, la sensibilità delle gambe è ristabilita, ma i movimenti riflessi si producono solo nella gamba che viene eccitata meccanicamente: salivazione abbondante.

3 49. Si irrita con una corrente indotta dell'apparecchio a slitta. L' intensità della corrente è tale che appena può resistersi sulla lingua. L'animale quando si mettono gli elettrodi in contatto colla membrana interdigitale cerca ritirare la zampa, poi mette la coda fra le gambe; i muscoli dell'addome si contraggono e quindi la gamba irritata si estende in una contrazione tetanica. Si estende l'estremità del lato opposto, e poi si estendono anche le due estremità anteriori. Questa osservazione dimostra che l'eccitabilità del midollo è aumentata.

3 55. Scuotendo la gamba con dei colpi questa si irrigidisce; comprimendo il nervo crurale, succede pure il tetano. Questa osservazione che ho ripetuto parecchie volte dimostra che l'eccitabilità del midollo è aumentata. Eccitando il nervo crurale di un lato la contrazione compare anche nel lato opposto. Ma non è un tetano improvviso come per la stricnina; dopo l'eccitamento trascorrono alcuni secondi in cui non si vede nulla, poi la gamba comincia a distendersi, e diviene poco per volta rigida, ma non così rigida che non si possa piegare la gamba esercitando uno sforzo colle mani. È uno stato di catalessi simile a quello che si produce in alcune isteriche comprimendo i nervi [1].

4 7. Si fa un'altra iniezione di 0,04 di cocaina.

4 8. La pressione diminuisce subito e dopo aumenta ed oscilla fra 50 mm. Comprimendo la membrana interdigitale ritira la zampa; comprimendo il nervo crurale la gamba del medesimo lato diventa rigida. Questo fatto dipende da un'azione centrale riflessa e non da un'azione periferica perchè tagliando il nervo sciatico e subito dopo irritando meccanicamente il nervo non si ottiene più la contrazione muscolare di prima.

4 11. Muove spontaneamente le estremità anteriori. Questa osservazione ci mostra che, malgrado il trauma subito, sotto l' influenza della cocaina il midollo basta da sè per produrre delle contrazioni, senza che vi partecipi il cervello.

4 15. Si sospende il respiro; la pressione del sangue diminuisce da 40 m. a 30 m. Si riprende poco dopo il respiro, la pressione sale nuovamente. L'animale ha un accesso di tetano; pressione 60 mm.

4 17. Si sospende definitivamente il respiro artificiale. Il cuore batte bene: temperatura del retto = 40° 30.

4 18. Comincia il tetano dell'asfissia che dalla coda si propaga a tutto il corpo.

4 20. Pressione 0. L'animale è morto. All'autopsia constato che il taglio del midollo fu completo.

[1] Non ho più constatato questo fenomeno in altri cani; invece osservai i sintomi caratteristici della catalessi colla rigidità dei muscoli in due cani ai quali amministrai delle piccole dosi di cocaina essendo intatto il midollo. Trattandosi di fenomeni intorno ai quali non ha la fisiologia nessuna esperienza per spiegare i fatti patologici di stati analoghi che si osservano nell'isterismo, mi riserbo di studiare meglio quest'argomento.

Anrep aveva già fatto delle esperienze per mezzo del taglio del midollo al disotto del midollo allungato; e vedendo che le convulsioni cessavano immediatamente ne conchiuse che esse dipendevano da un eccitamento della cocaina sopra il midollo allungato. Anrep dice che a questo medesimo risultato era giunto prima di lui Danini, ma che egli contrariamente alle osservazioni di Danini avrebbe osservato un aumento della eccitabilità nelle estremità posteriori dell'animale dopo il taglio del midollo alla 6ª vertebra dorsale. In seguito a queste osservazioni Anrep conchiude che la cocaina esagera il potere riflesso del midollo spinale.

Le mie esperienze hanno confermato questa conclusione di Anrep e hanno dimostrato che il midollo spinale può di per sè, senza che vi concorra il cervello, o il midollo allungato, produrre delle forti contrazioni nelle estremità, che rassomigliano agli accessi di convulsioni caratteristici per l'azione della cocaina nell'animale illeso.

Nella interpretazione di questi fatti io devo tener calcolo che nelle mie esperienze la cocaina veniva amministrata subito dopo il taglio del midollo, o alla distanza di pochi minuti, senza aspettare che fossero scomparsi gli effetti del trauma.

Ripeterò queste esperienze aspettando che l'animale si ristabilisca dopo il taglio del midollo alla regione dorsale, e spero di poter vedere più chiaramente che le convulsioni dell'avvelenamento per cocaina non dipendono dal cervello o dal midollo allungato.

L'attività maggiore del midollo spinale che produce la cocaina, anche quando questo è separato con un taglio dalla midolla allungata, appare con non minore chiarezza dalle osservazioni che ho fatto sulla temperatura. In questo medesimo cane la temperatura rettale poco prima dell'esperienza era 38°,9: salì a 39°2 durante l'osservazione. Dopo il taglio del midollo discese a 38° 6 e per effetto della cocaina salì malgrado il taglio del midollo fino a 40° 50 alle ore 3,48. Quindi cominciò a diminuire e quando si uccise il cane era ancora 40° 30. Ho raccolto altre osservazioni analoghe ma di queste parlerò in un prossimo capitolo.

## IV.

## Azione della cocaina sulla respirazione.

È nota l'azione locale della cocaina che applicata sulle muccose toglie loro la sensibilità. Io ho tentato se potevo produrre con essa l'anestesia del nervo-vago dentro ai polmoni per studiare alcuni importanti questioni riguardanti il meccanismo nervoso dei movimenti respiratorî. Invece di versare la soluzione di cocaina nella trachea, mi servii di un polverizzatore per mandare uniformemente sotto forma di nube la cocaina nei bronchi.

*Esperienza VI. — 13 gennajo 1886.*

Ad un vecchio cane del peso di 7400 gr. faccio la tracheotomia alle ore 2, 45 e scrivo il tracciato della respirazione, applicando sopra il torace un timpano con un bottone di sughero nel mezzo della membrana elastica. Per maggior comodo fisso il timpano in una pinzetta saldata all'estremità di un tubo di piombo, il quale viene a sua volta portato da un sostegno comune ed abbastanza pesante,

così che si può piegare il tubo di piombo, applicare il timpano sul punto del torace del quale si vogliono scrivere i movimenti senza che l'apparecchio subisca alcuna trasposizione durante l'esperienza.

La figura 2ª rappresenta la respirazione iniziale di questo cane. Si vede che è abbastanza tranquilla e regolare.

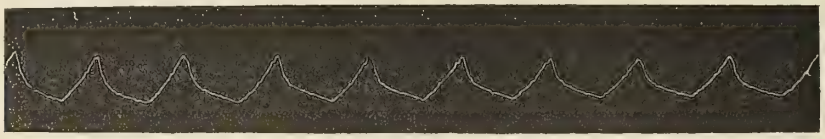


Fig. 2. — Respirazione normale di un cane prima che si amministrî la cocaina.

Introduco il becco del polverizzatore nella trachea e faccio prima una esperienza con dell'acqua semplice per vedere che effetto produca l' introduzione dell'acqua polverizzata. I movimenti del respiro, diventano subito più forti e circa due volte più frequenti del normale. Non riferisco questa parte dell'esperienza che serve solo di prova e non ha importanza per il nostro scopo.

Dopo aver polverizzato circa 15 cc. di acqua sospendo l'operazione. I movimenti del respiro che sono sempre molto forti vanno gradatamente diminuendo di ampiezza e di frequenza. Alle ore 3, quando il respiro sembra ritornato presso a poco allo stato di prima faccio la polverizzazione di 6 cc. di soluzione che contengono gr. 0,08 di cocaina. Già durante la polverizzazione della soluzione di cocaina appare una differenza nel respiro; perchè mentre coll'acqua il respiro aveva continuato ad essere più forte e più frequente anche un minuto dopo che era cessata la polverizzazione, qui vediamo che già durante l' amministrazione della cocaina, succede una notevole diminuzione nell'ampiezza dei movimenti respiratorî, e una minore frequenza dei medesimi.

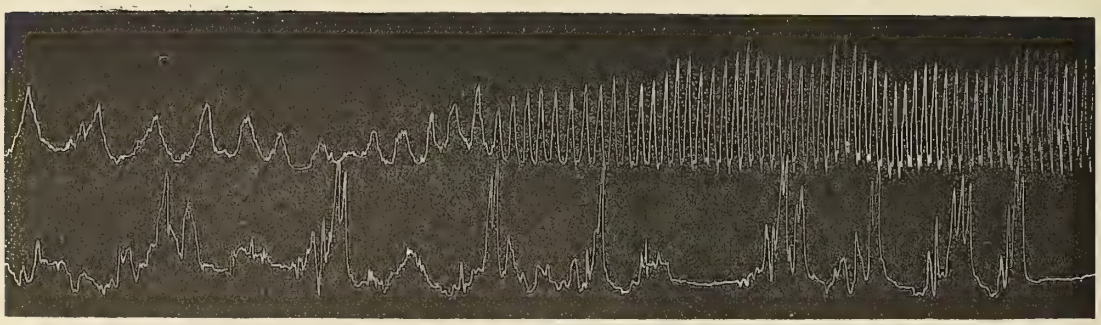


Fig. 3. — Continuazione dell'osservazione precedente dopo che si amministrò la cocaina.
Nella linea superiore è rappresentato un periodo di grande frequenza respiratoria
dopo una polverizzazione di cocaina.
La linea inferiore rappresenta la respirazione toracica durante gli accessi convulsivi.

Nella figura 3ª dopo la prima respirazione della linea superiore si sospende la polverizzazione della cocaina. Il respiro va diminuendo per circa 30′ e poi incomincia un periodo di attività maggiore nel quale i movimenti respiratorî diventano più forti e frequentissimi con dei periodi che si vedono nella parte superiore del tracciato all'apice delle ispirazioni. La pupilla è molto dilatata. I movimenti del respiro continuano ad essere frequentissimi per circa un minuto, diventando successivamente meno ampî. Dopo un minuto si rallentano e divengono irregolari. L'animale è irrequieto e si agita; quindi incominciano le convulsioni. La linea inferiore della fig. 3ª rappresenta il tracciato scritto durante questo periodo. Si vede che il respiro è profondamente alterato, e che manca il ritmo ordinario. Il torace segue nei movimenti gli accessi di convulsioni che si manifestano a periodi irregolari. A misura che gli accessi di convulsioni diventano più frequenti e più forti, diviene anche più irregolare il tracciato del respiro, perchè nei muscoli del torace e dell'addome si ripetono le medesime scosse che agitano le estremità.

Dopo 5 minuti vedendo che gli accessi tetanici non diminuiscono di intensità, faccio una seconda polverizzazione per dare al cane una dose mortale di cocaina. Gli polverizzo nella trachea una quantità di soluzione che corrisponde a 0,15 di cocaina. Malgrado che questa dose sia doppia della prima non succede per questo alcun mutamento nella forma del respiro e delle convulsioni.

È questo un fatto che vedremo ripetersi in altre esperienze. Esso dimostra che una piccola dose di cocaina basta a produrre delle modificazioni profonde, e dopo di esse anche delle dosi maggiori non riescono a modificare sensibilmente il quadro dei fenomeni.

Trisma e schiuma abbondante nella bocca; pupilla dilatatissima. Respirazione irregolare con dei lunghi periodi di arresto che corrispondono alle pause delle convulsioni. Polso 205 al minuto, temper. 39°,7. La lingua cianotica. Si fa la respirazione artificiale: la lingua diventa alquanto più rossa, ma non cessano le convulsioni. L'animale fa dei continui movimenti colla bocca e deglutisce. Il cane è insensibile; comprimendo colle unghie la membrana interdigitale non reagisce. Solo comprimendo con le tanaglie le dita delle estremità posteriori reagisce con deboli movimenti riflessi. Si nota però che questi movimenti compaiono con grande ritardo.

4$^{h}$ 15′. Le condizioni dell'animale sembrando migliori viene slegato e messo in terra; non si regge sulle gambe; si ripetono con minore frequenza le convulsioni cloniche; di quando in quando gira rotolandosi sul pavimento intorno al suo asse longitudinale.

4 20. Vomita. La sensibilità è molto diminuita; premendo le sue zampe col mio piede, anche reggendosi sopra con tutto il peso del corpo, non dà segni di reazione. Solo più tardi appare una reazione, ma con un ritardo molto notevole. L'animale quantunque insensibile si muove e cerca sollevarsi sulle zampe.

4 50. Vomita una seconda volta.

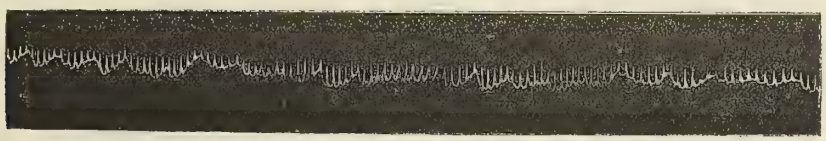


Fig. 4. — Tracciato toracico della respirazione e del battito cardiaco nell'avvelenamento per cocaina mentre sono intatti i vaghi.

5 30. L'animale sembra ristabilito; sono cessate le convulsioni e il cane cammina spontaneamente benchè sia molto abbattuto. Il cuore ed il respiro sono però sempre molto più frequenti del normale come si vede nella figura 4$^{a}$, scritta per mezzo di un timpano a membrana elastica col bottone applicato in corrispondenza del cuore.

Per conoscere il meccanismo di azione della cocaina e la natura intima delle modificazioni che essa reca nella frequenza del respiro e del polso, taglio in questo medesimo cane il nervo vago ai due lati del collo.

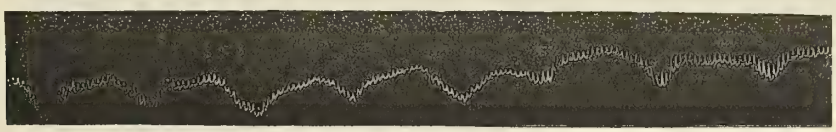


Fig. 5. — Continuazione dell'esperienza precedente: tracciato scritto due minuti dopo il taglio dei vaghi.

La fig. 5$^{a}$ scritta due minuti dopo dimostra che la frequenza dei battiti cardiaci è aumentata per questa operazione; e la frequenza era anche maggiore subito dopo.

È noto che dopo il taglio dei nervi vaghi al collo il respiro prende una forma caratteristica; si producono cioè delle lunghe pause fra l'espirazione e l'inspirazione successiva e mentre l'inspirazione cambia poco nella sua forma divenendo solo più profonda del normale, l'espirazione invece diventa rapida e leggermente rumorosa e nel maggior numero dei casi l'espirazione diviene attiva e si compie con tale forza che rassomiglia ad un colpo di tosse.

Nessuno di tali fenomeni si presenta in questo caso dopo il taglio dei vaghi. Fra l'una respirazione e l'altra non esiste una pausa e l'espirazione non è molto differente dal normale. Il solo fatto notevole si è, che è cessato l'acceleramento del respiro che esisteva quando i vaghi erano intatti.

Ripetendo questa esperienza in altri cani ai quali tagliavo prima i vaghi, e amministravo dopo la cocaina, ho pure constatato un acceleramento notevole del respiro. Questo risultato è interessante per lo studio che ora facciamo, perchè esso dimostra che l'aumento della frequenza del respiro nell'avvelenamento per cocaina è dovuto ad un eccitamento del centro respiratorio.

### *Esperienza VII. — 10 luglio 1886.*

Un cane del peso di 9550 gr. mentre respira tranquillo dà il tracciato della fig. 6ª scritto con un pneumografo di Marey messo intorno al torace.

$10^h,17'$. Si tagliano i due vaghi al collo. Succede immediatamente una profonda modificazione del respiro come ho già accennato precedentemente. Questa modificazione è persistente come lo mostra il tracciato fig. 7 scritto alle ore 10,37.

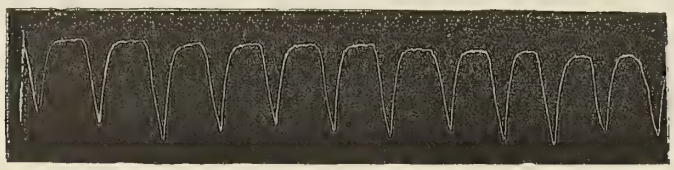


Fig. 6. — Respirazione toracica normale di un cane.

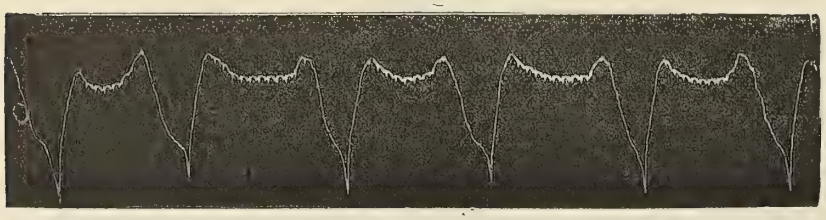


Fig. 7. — Continuazione del tracciato precedente. Dopo il taglio dei vaghi.

Subito dopo questo tracciato incomincia la polverizzazione di cocaina nella trachea. In due volte gliene amministro gr. 0,10. I movimenti respiratorî diventano più frequenti. Non si modifica la forma e la forza della inspirazione e della espirazione, solo scompare la pausa che prima esisteva fra ogni singola respirazione.

$11^h$. Si fa un'altra polverizzazione di circa 0,05 di cocaina. Non sono ancora comparse le convulsioni e il cane sembra essere poco sensibile all'azione della cocaina.

11 10. Altra polverizzazione di 0,05, e un' altra alle ore 11,15. Il cane diventa irrequieto e compaiono le convulsioni.

11 25. Si fa un'altra polverizzazione di 0,033 di cocaina.

11 27. L'animale emette l'orina e subito dopo scoppia un accesso violento di convulsioni: il cuore batte molto rapido, ma il polso è debole. Il respiro dopo queste forti dosi è divenuto più rapido, e negli intervalli di riposo che vi sono fra gli accessi è molto regolare e più frequente del normale, come si vede nel tracciato 8 scritto alle 11,29. Si è modificata la forma della espirazione che presenta a metà una specie di dicrotismo dovuto alla partecipazione attiva dei muscoli espiratorî dell'addome.

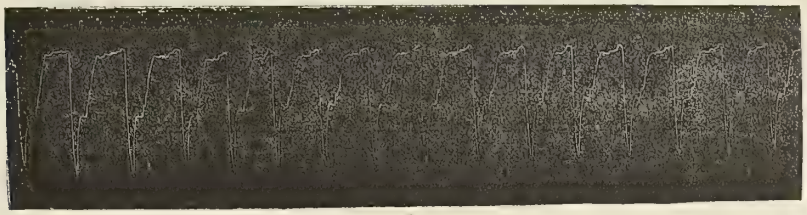


Fig. 8. — Aumento di frequenza del respiro per mezzo della cocaina amministrata dopo il taglio dei vaghi.

11 35. Si amministrano altri 0,033 di cocaina, dopo succede un arresto del respiro: facciamo la respirazione artificiale per circa un minuto e dopo l'animale riprende spontaneamente a respirare.

11 40. Facciamo un'altra polverizzazione di 0,033 per veder ripetersi l'arresto del respiro. Questo succede ancora, ma dopo non si riesce più colla respirazione artificiale a conservarlo in vita. La morte succede senza convulsioni. Il respiro cessa di funzionare prima del cuore. Sembra che la morte sia prodotta da paralisi dei centri nervosi.

Qualunque sia la ragione fisiologica per la quale dopo il taglio del vago succede una diminuzione di frequenza del respiro, noi vediamo in queste esperienze che la cocaina modifica le condizioni dell' organismo in modo da aumentare la frequenza del respiro malgrado che i vaghi siano tagliati.

Vedremo fra poco rendersi anche meglio evidente il fatto che la respirazione nell'animale avvelenato colla cocaina non sta più in diretto rapporto coi bisogni chimici dell'organismo. Sembra che questo veleno agisca sui centri nervosi del respiro e ne renda maggiore la loro attività funzionale, alterando i rapporti che esistono fisiologicamente fra la funzione respiratoria e la composizione del sangue.

Le ricerche fatte colla polverizzazione della cocaina nei polmoni, le avevo istituite colla speranza di produrre l'anestesia di questi organi, e di ottenere dei risultati analoghi alla paralisi dei nervi vaghi e di osservare un rallentamento dei movimenti respiratorî. Questo tentativo andò fallito: perchè nei polmoni la cocaina viene assorbita con troppa rapidità e si manifesta l'azione sui centri nervosi, prima che possa manifestarsi un effetto locale anestetico sul vago.

Visto che la cocaina produce un aumento notevole nella frequenza dei movimenti respiratorî mi sono domandato se questo fenomeno dipendeva da ciò che la sensibilità per l'acido carbonico era cresciuta. In tal caso l'aumento della frequenza del respiro era semplicemente un fenomeno riflesso, dovuto a ciò che l'organismo cercava di purificare meglio il sangue venoso con una respirazione più attiva.

Questa ricerca aveva per me un grande interesse perchè secondo le ricerche di mio fratello (1) si poteva benissimo supporre che la cocaina facesse funzionare con maggiore attività i centri nervosi del respiro, senza che vi esistesse una sensibilità maggiore per l'acido carbonico, ed anche senza dover supporre che fossero più attivi i processi chimici.

Per risolvere questo problema ho cercato di conoscere la resistenza che i cani presentano all'asfissia, prima di essere avvelenati colla cocaina, e dopo. A tale scopo scrivevo la respirazione toracica e addominale dopo aver preparata la trachea legandovi bene dentro un tubo di vetro. Chiudevo ermeticamente con un tappo di gomma la cannula tracheale per un tempo variabile, e dall'esame dei tracciati giudicavo come si modificasse il respiro nello stato normale e nell'avvelenamento per una chiusura più o meno lunga della trachea. Le ricerche fatte con questo metodo non mi lasciarono scorgere una differenza apprezzabile. Per le piccole dosi i cani reagiscono nello stesso modo con una respirazione affannosa che cessa presto dopo che si è aperta la trachea. Anche le convulsioni prodotte dall'asfissia non mi parve che comparissero prima e fossero più forti: se si tiene calcolo del fatto che la cocaina produce già di per sè delle convulsioni fortissime.

Per le grandi dosi vi è un grave inconveniente perchè gli accessi continui delle contrazioni tetaniche alterano i tracciati. Scegliendo ciò nullameno le osservazioni dove i cani si mantennero più tranquilli ho potuto osservare che colle forti dosi essi reagiscono meno intensamente ad un' asfissia prolungata. Che realmente in questa condizione i cani sentano meno la venosità del sangue lo si può dedurre dal fatto che il loro sangue ha un colore più scuro, e ciò malgrado non diviene più frequente il respiro.

Parecchie volte mi capitò vedendo la lingua cianotica di dover soccorrere gli animali colla respirazione artificiale, perchè i movimenti respiratorî, benchè più frequenti del normale, non bastavano a purgare il sangue reso rapidamente venoso dalle incessanti contrazioni tetaniche.

In questo caso si aveva la prova che la frequenza maggiore del respiro nell'avvelenamento per la cocaina non è prodotto da una sensibilità maggiore per l'acido carbonico, perchè tale acceleramento non è sufficiente al bisogno, quando essendo depressa la funzione dei centri nervosi ed abbondante il consumo chimico dei tessuti per il continuo tetano, l'animale minaccia di soccombere per una venosità eccessiva del sangue.

Dopo queste osservazioni credo di poter conchiudere che l'aumento di frequenza del respiro nell'avvelenamento per cocaina non è prodotto in via riflessa da ciò che l'animale senta meglio la venosità del sangue. Le osservazioni fatte per la cocaina a forti dosi verrebbero invece a confermare che i movimenti respiratorî non si trovano in stretto rapporto collo stato di venosità del sangue; e l'aumento di frequenza sarebbe un fatto puramente nervoso dovuto all'azione della cocaina, che malgrado l'attività maggiore dei centri respiratorî, li mette in condizione di non poter più provvedere convenientemente ai bisogni chimici dell'organismo, lasciando che la ventilazione dei polmoni divenga insufficiente.

---

(1) A. Mosso, *La respirazione periodica e la respirazione superflua o di lusso.* Atti della R. Accademia dei Lincei. Vol. I, serie 4ª, gennaio 1885.

Per ispiegare in che modo la respirazione artificiale sospenda gli accessi di convulsioni prodotte dalla stricnina Pauschinger (1) ammise che il sangue saturo di ossigeno metta in riposo il centro respiratorio, e diminuisca l'eccitabilità dei gangli dai quali dipendono i movimenti riflessi. In questo modo egli spiegò insieme a Rosenthal perchè la respirazione artificiale diminuisca e sospenda i movimenti riflessi, ed impedisca l'azione degli eccitamenti sensibili sulle vie dei movimenti riflessi.

Siccome per nessuna dose di cocaina ho potuto osservare che la respirazione artificiale sospenda le convulsioni e abbia un effetto come quello che l'apnea produce nell'avvelenamento colla stricnina, resta anche in questo modo evidente che la cocaina e la stricnina non hanno un' azione analoga sui centri nervosi.

Nel somministrare ai cani la cocaina per mezzo del polverizzatore dentro i polmoni, mi capitò in tre esperienze di seguito di osservare un fortissimo aumento nella frequenza del respiro come lo si vede nella figura 3. Questo fatto mi sorprese perchè non l'avevo osservato prima con eguale intensità amministrando la cocaina nelle vene o sotto la pelle. Nel dubbio che si trattasse di una differenza dovuta all'azione locale della cocaina, ho dovuto ripetere una serie di esperienze nelle quali davo la medesima dose di cocaina a varî cani, amministrandola ora per la via dei polmoni ora nelle vene ed ora sotto la pelle.

Il risultato di queste indagini mi mostrò che vi sono delle differenze individuali fortissime. Una prima complicazione deriva da ciò che i cani anche quando sono apparentemente tranquilli possono, massime a temperatura elevata, presentare delle variazioni fortissime nella forma e nella frequenza del respiro. Un' altra causa di errore sta in ciò che i medicamenti nel primo periodo della loro azione, danno effetti diversi da quelli che sono caratteristici della loro azione. Citerò in proposito le osservazioni che mi occorse di fare col laudano, mentre ne studiavo il suo antagonismo colla cocaina. Mi capitò spesso che dopo l' iniezione di 0,5 o di 1 gr. di laudano nelle vene, il respiro diventasse subito frequentissimo dando un tracciato poco differente da quello della fig. 3ª per le inalazioni di cocaina, e che dopo 15 minuti fosse già completamente cambiato il ritmo del respiro divenuto lento ed uniforme.

Anche facendo questa distinzione fra l'azione primitiva in cui vi è un eccitamento maggiore del centro respiratorio e l'azione finale, si deve ammettere, che la cocaina produce sempre una frequenza maggiore del respiro, perchè in nessun caso ho constatato una depressione nell'attività del centro respiratorio, fino a che non fosse vicina la morte.

Mi è stato facile ripetendo un numero considerevole di esperienze di trovare dei cani che per le stesse dosi, amministrate nello stesso modo, presentarono ora un fortissimo acceleramento del respiro, ed ora un aumento poco considerevole. È evidente che nel paragone si deve tener conto dello stato psichico in cui si trova l'animale. Anzi per tali ricerche ritengo poco sicuro di giudicare tenendo come termine di paragone il primo tracciato scritto prima di amministrare la cocaina appena legato l'animale.

A questo modo è facile riferire delle esperienze dove la cocaina avrebbe poco o

(1) L. Pauschinger, *Der Einfluss der Apnoë auf die durch Strychnin hervorgerufenen Krämpfe*, Archiv für Physiologie von du Bois Reymond 1878 Phys. Abth. 1878, pag. 400.

punto modificato il respiro. Ma se invece prendiamo come punto di partenza lo stato del respiro nell'animale tranquillo, vediamo che tanto le piccole dosi che aumentano la eccitabilità dei centri nervosi, quanto le massime che diminuiscono questa eccitabilità, producono una frequenza del respiro che è sempre superiore al normale. Da ciò conchiudiamo che: la cocaina è un rimedio eccitante della respirazione.

Nei cani dove mancava il forte aumento della frequenza del respiro non è a dire che fosse minore l'intensità dell'avvelenamento, che anzi forse era maggiore perchè erano fortissime le convulsioni, rapidissimo il battito del cuore e molto elevata la temperatura con tutti gli altri fenomeni caratteristici che è inutile ricordare.

## V.

## Azione della cocaina sul cuore delle rane.

Le ricerche di Anrep [1] hanno già dimostrato che nelle rane le dosi piccole di cocaina (0,0005 — 0,0015) non modificano la forza e la frequenza dei battiti cardiaci. Le dosi di 0,003 diminuiscono la frequenza del polso e rendono più deboli le singole contrazioni del cuore. Dosi maggiori e mortali arrestano il cuore solo dopo alcune ore. Anrep osservò pure che le dosi medie (0,007 — 0,01) paralizzano completamente il nervo vago.

Ho voluto ripetere queste osservazioni e analizzare meglio l'azione della cocaina studiandola nel cuore isolato per mezzo della circolazione artificiale col metodo grafico. Mi servii a tale scopo dell'apparecchio di Roy. Per la circolazione artificiale impiegai il sangue di rana allungato con soluzione di cloruro sodico al 0,75 %, oppure di sangue defibrinato di coniglio che allungavo per due terzi colla medesima soluzione di cloruro sodico al 0,75 %.

Nel cuore isolato per mezzo della circolazione artificiale si vedono già degli effetti per delle dosi di cocaina che non superano il decimo di milligramma come lo prova la seguente esperienza.

*Esperienza VIII. — 10 giugno.*

Un cuore di rana esculenta è messo in posto nell'apparecchio di Roy e si fa la circolazione artificiale. Si scrive un minuto circa di tracciato normale e poi nel punto segnato con una freccia fig. 9

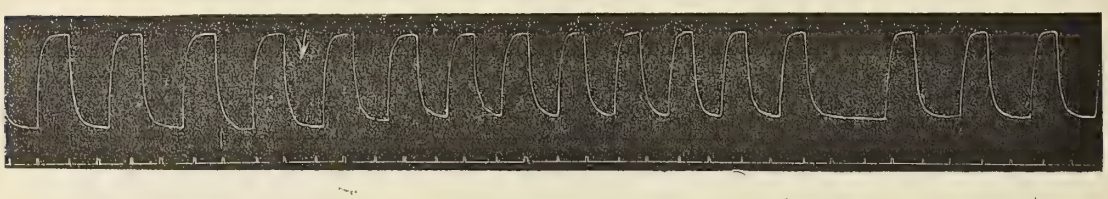


Fig. 9. — Cuore di rana, circolazione artificiale in ↓ incomincia l'azione della cocaina a dose debolissima.

si fa passare il sangue che contiene 0,04 % di cocaina: sono passate appena 10 gocciole circa di questo liquido, che già vediamo divenire più celeri i battiti del cuore e poco dopo comparisce un

(1) Anrep, Pflüger's Archiv, Bd. XXI s. 49.

rallentamento notevole. Per produrre questi effetti era passata a traverso il cuore una dose di cocaina non maggiore di 0,0002. Dopo la frequenza dei battiti cardiaci diventa maggiore di prima.

L'effetto eccitante della cocaina dura un certo tempo dopo che è cessato il passaggio del sangue avvelenato.

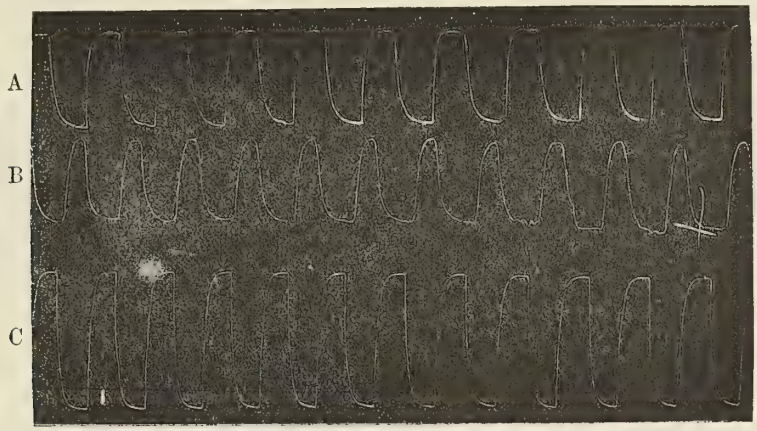



Fig. 10. — *A* Pulsazioni del cuore di rana durante la circolazione con sangue normale. *B* con la cocaina. *C* dopo la cocaina.

Nella figura 10 la linea A rappresenta le sistoli del cuore della medesima rana prima che venisse amministrata la cocaina, la seconda linea B è scritta mentre passa la cocaina ed è maggiore la frequenza dei battiti cardiaci. La terza linea C mentre passa il sangue normale per lavare il cuore. Avendo osservato ripetutamente questo fatto che le sistoli del cuore staccato aumentano di frequenza e di forza durante e specialmente dopo l'amministrazione della cocaina a dosi minime, mi credo autorizzato a conchiudere che la cocaina per piccole dosi è un eccitante del cuore.

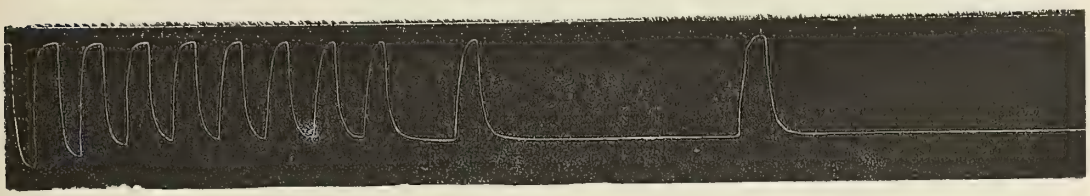


Fig. 11. — Aumento nella tonicità del cuore ed arresto prodotto dalla cocaina.

Per dosi più forti la cocaina produce un arresto del cuore come si vede nel tracciato 11 preso dopo l'ultima linea della fig. 10. Il tracciato comincia col momento nel quale passa il sangue avvelenato con una soluzione doppia cioè 0,08 % di cocaina. Noi vediamo che nella seconda contrazione il cuore si dilata meno e successivamente fino alla 4ª e alla 5ª dove l'ampiezza delle diastole non cambia più. Questo fenomeno non è dovuto ad un cambiamento di pressione del liquido circolante, perchè la pressione è regolata con due boccie di Mariotte. Questo fatto che si ripete in tutte le esperienze dipende da un'azione della cocaina, che produce una tonicità maggiore

del ventricolo. Colle dosi maggiori vedremo fra poco questo fenomeno raggiungere il grado di una sistole persistente.

Anche in questo tracciato, fig. 11, si nota che la cocaina produce prima un leggero acceleramento al quale segue, dopo alcune sistoli isolate, un arresto completo del cuore.

La sospensione dei battiti cardiaci non è un effetto passeggero, perchè il cuore non batte più fino a che esso rimane pieno di sangue avvelenato. Bisogna lavare il cuore con sangue normale o con la soluzione di cloruro di sodio, e rimuovere la presenza del farmaco, perchè si ristabiliscano i movimenti del cuore.

In questo medesimo cuore facendo di nuovo circolare il sangue normale cessò l'effetto della cocaina e ricominciarono le pulsazioni: dapprima lente e poi grado grado più frequenti e più forti. Non do la figura di questa parte dell' osservazione perchè è facile immaginarsi come sia il tracciato.

Non è però da credersi che l'avvelenamento con tali dosi di cocaina passi senza lasciare alcuna modificazione, benchè le sue contrazioni siano più forti di ciò che fossero nella prima linea. Infatti facendo passare una seconda volta il sangue avvelenato colla medesima dose (0,08 %) noi vediamo nella fig. 12 che sono meno pronti gli effetti e che è meno notevole l'acceleramento e più tardo l'arresto del cuore.

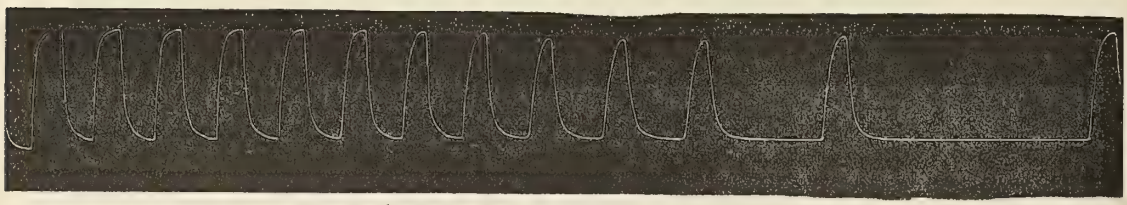


Fig. 12. — Nella prima pulsazione di questo tracciato ricomincia a passare il sangue avvelenato per mezzo della cocaina nella stessa dose del tracciato precedente.

Anche qui il cuore si ferma in diastole. Si ripete un'altra volta questa esperienza col medesimo risultato.

Con soluzioni fortissime di cocaina il cuore si arresta in sistole.

Riferisco un esempio per constatare questo fatto. La fig. 13 mostra il tracciato del cuore di una rana che batte con maggiore frequenza degli esempi che ho dato fin qui; ma le sistoli sono meno ampie e meno forti. Colla prima sistole del tracciato

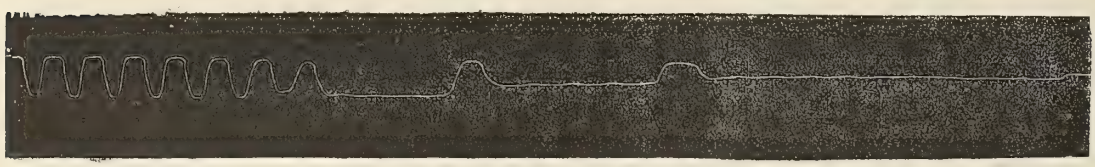


Fig. 13. — Azione della cocaina a dosi forti sul cuore della rana.

incomincia la circolazione del sangue con la cocaina. Basta che passino poche gocciole di sangue avvelenato con 0,1 %, perchè il cuore si arresti. Manca il periodo della maggiore frequenza e subito comparisce la sistole persistente.

Si ripete la circolazione col sangue normale. Le sistoli diventano sempre più forti. Nella figura 14 si vede quest'aumento che è succeduto nell'altezza delle sistoli. Nel punto segnato con una ↓ sospendo il passaggio del sangue normale e faccio passare quello colla cocaina (0,1 %). Bastano poche gocciole che attraversino la cavità del cuore per arrestarne i movimenti.

↓

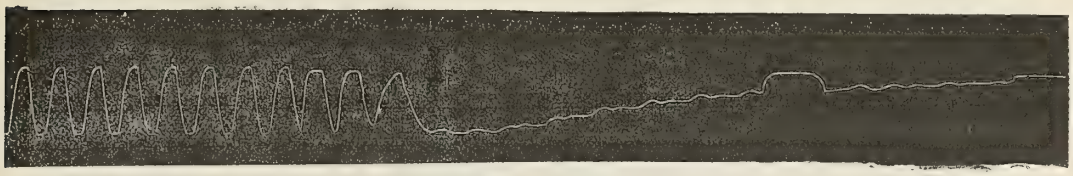


Fig. 14. — Continuazione dell'esperienza precedente.
Seconda circolazione artificiale di sangue avvelenato con forte dose di cocaina.

Qui osserviamo contrariamente all'esperienza della fig. 12, che per il secondo avvelenamento l'effetto è più intenso del primo. Chiunque siasi occupato di simili ricerche conosce quanto sia difficile per le differenze individuali delle rane di ottenere sempre dei risultati uguali. Spesso vi sono dei cuori che presentano delle differenze senza che sappiamo dare alcuna ragione. In questo caso succedono appena tre sistoli e poi il cuore si arresta e va lentamente contraendosi; succede ancora un movimento sistolico appena accennato verso il finire del tracciato e dopo continua una lenta contrazione fino a che il cuore si arresta in stato sistolico.

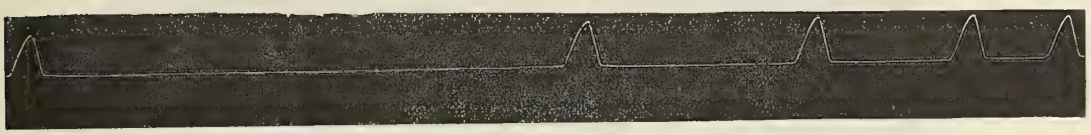


Fig. 15. — Continuazione dell'esperienza precedente:
dove si vede come si ristabiliscono i movimenti del cuore per mezzo della circolazione artificiale con sangue normale.

La figura 15 dimostra come fa il cuore a riprendere poco per volta i suoi movimenti quando lo si lava con sangue normale. Per brevità non riferisco tutta la serie delle pulsazioni che durò circa un minuto, prima che il cuore riacquistasse la forza delle sistoli e la frequenza paragonabile a quella che trovasi nel principio della fig. 14.

Ho avvelenato spesso quattro o cinque volte un cuore di rana con dosi forti di cocaina (0,1 %) e sempre lavandolo con sangue normale esso ha ripreso i suoi movimenti: benchè in ultimo diminuisse la forza e la frequenza delle sistoli quando si ripeteva quattro o cinque volte l'avvelenamento.

È probabile che la cocaina non agisca direttamente sulla fibra muscolare e sui nervi del cuore, ma semplicemente sui gangli dai quali dipendono i suoi movimenti.

## VI.

## Azione della cocaina sul cuore degli animali a sangue caldo.

Mantegazza (1) esperimentando sopra se stesso l'azione della coca masticandone le foglie, aveva già notato un notevole aumento delle pulsazioni del cuore che raggiungevano fino 134 al minuto.

Anrep aveva già detto che le piccole dosi di cocaina non modificano l'attività del cuore, e che le dosi medie producono un forte acceleramento delle contrazioni cardiache specialmente nei cani dove la frequenza può diventare tre volte maggiore di prima. Ho confermato queste conclusioni di Anrep (2) e tentai di conoscere meglio i rapporti che esistono fra gli accessi delle convulsioni, e i movimenti del cuore. A tale scopo scrissi il polso per mezzo di un dito di guanto elastico e con un timpano a leva messo in comunicazione coll'arteria, secondo il metodo di Marey.

Vediamo prima un caso tipico di azione della cocaina sul cuore e i rapporti del polso colle convulsioni.

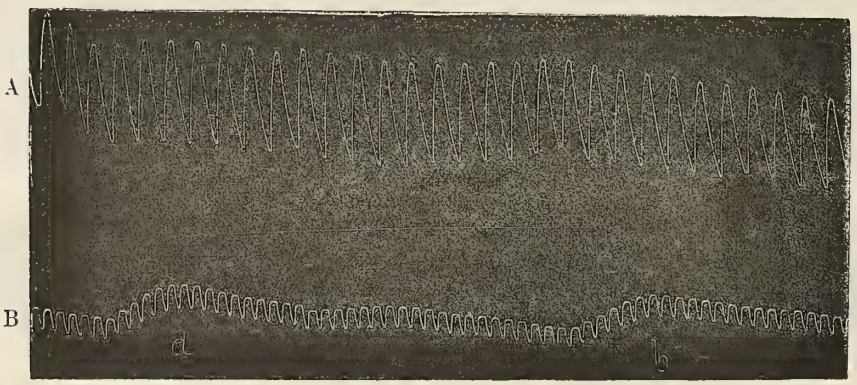



Fig. 16. — Cane. *A* polso scritto nella carotide allo stato normale. *B* polso dopo la cocaina.

Nella fig. 16 la linea superiore è il tracciato della carotide scritto col metodo del dito di guanto. Dopo si fanno due polverizzazioni di cocaina nella trachea, che corrispondono ad una dose media. L'azione sul cuore è prontissima; in meno di un minuto, dopo la seconda polverizzazione il tracciato prende la forma che ha nella linea *B* fig. 16, e conserva per lungo tempo questa grande frequenza e questa minore altezza delle sue sistoli.

In *a* e in *b* sono segnati due accessi di convulsioni: appena si distendono le

(1) P. Mantegazza, *Sulle virtù igieniche e medicinali della coca.* — Annali universali di medicina. Volume CLXVII. Marzo 1859.

P. Mantegazza ha il gran merito di essere stato il primo a studiare ed a far conoscere in Europa le virtù della coca.

(2) Opera citata, pag. 67.

estremità ed incomincia l'accesso, subito la pressione del sangue aumenta: ma il cuore non modifica il ritmo dei suoi battiti. Anche quando gli accessi sono più forti come si vede nella figura 18, si modifica solo la pressione del sangue e non la frequenza delle sistoli.

Per dosi maggiori e per accessi più forti si modifica la frequenza dei battiti cardiaci anche durante l'accesso come si vede nella seguente esperienza, fig. 17 e 18

*Esperienza IX. — 20 luglio.*

Prendo un cane del peso di 8000 gr., fatta la tracheotomia, scrivo il respiro ed il polso, e poi faccio una polverizzazione di acqua nella trachea. Il tracciato fig. 17 linea superiore A rappre-

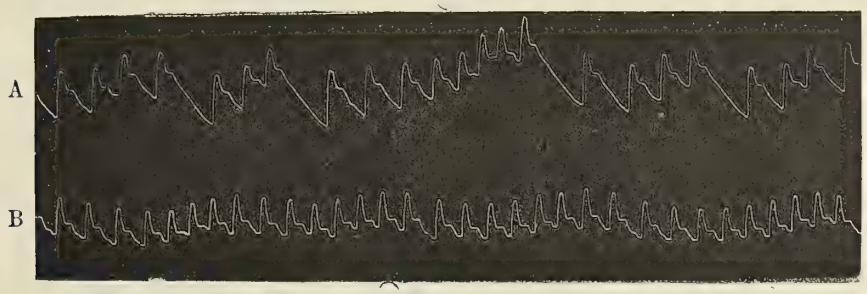



Fig. 17. — Cane, polso della carotide. *A* normale *B* dopo la polverizzazione di 0,10 di cocaina.

senta le pulsazioni del cuore dopo questa operazione, quando l'animale cessata l'agitazione si è ristabilito nelle sue condizioni relativamente normali. Il polso è irregolare, come lo è generalmente nei cani prima che si taglino i nervi vaghi.

Ho fatto questa esperienza in bianco collo scopo di procedere con maggior cautela, sapendo che è molto facile errare in tali studi sul cuore dove i fatti psichici sono sufficienti per alterare più di molti farmaci la frequenza del polso, e spontaneamente si producono dei mutamenti profondi nella frequenza del respiro e del polso anche quando gli animali sembrano tranquilli e nulla viene ad agire sopra di loro.

Alle ore 9,8 ant. si amministrano nella trachea 0,10 di cocaina in soluzione per mezzo del polverizzatore. Il respiro si modifica assai poco, ma il polso diventa subito più piccolo regolare e più frequente come si osserva nella linea B della figura 17. Fin qui l'animale è tranquillo; la sola azione che constatiamo è quella sul cuore. Poi scoppia il tetano dopo 4 minuti.

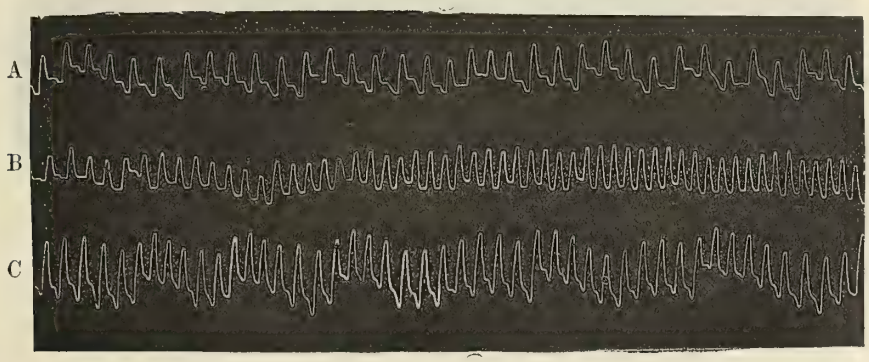


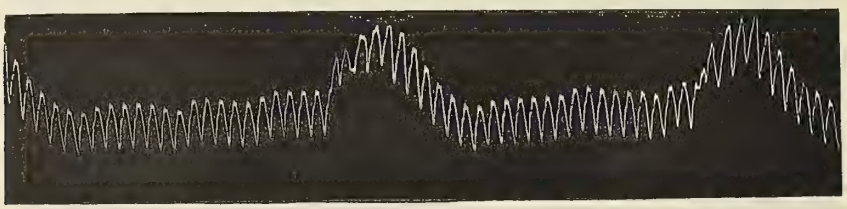

Fig. 18. — Polso della carotide nel cane. *A* prima del tetano. *B* durante un accesso di tetano. *C* un minuto dopo.

La figura 18 mostra la forma e la frequenza del polso in tre minuti successivi: in A un minuto prima del tetano; in B durante il primo scoppio di convulsioni, che cominciano dove c'è il segno ↓. La linea C venne scritta un minuto dopo l'accesso.

Finito questo primo accesso di convulsioni non se ne ripetono più per lo spazio di cinque minuti. Il polso in questo frattempo diviene più lento di ciò che fosse nella linea C.

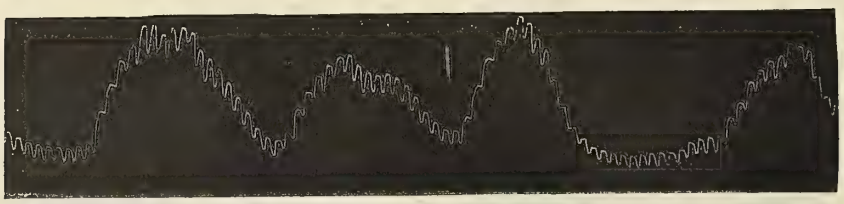
In questa esperienza noi vediamo che il polso già prima che scoppiasse il tetano era diventato più frequente e lo divenne ancora più durante l'accesso. È alla maggiore frequenza del polso che deve attribuirsi la scomparsa del dicrotismo durante l'accesso. Questa osservazione, che ho confermato con altre, dimostra come sia inesatta l'affermazione di Anrep, il quale disse che il polso non cambia di forma; paragonando anche la linea C della fig. 18 colla linea A della fig. 17 si vede che sono differenti. Questa trasformazione nel profilo del polso è dovuta molto probabilmente ad una diminuzione di tonicità nelle pareti dei vasi sanguigni.

Le difficoltà per determinare come si comporti il cuore durante gli accessi convulsivi sono maggiori assai di quelle che si incontrano per lo studio della respirazione; prima di tutto perchè il cuore è un organo dotato di una innervazione assai più complessa e in secondo luogo perchè le modificazioni che succedono nella pressione del sangue durante gli accessi tendono ad alterare il ritmo del cuore. Posso però affermare in base alle mie esperienze che di regola non si produce una modificazione nella frequenza delle sistoli cardiache durante gli accessi convulsivi da cocaina.



A B

Fig. 19. — Mutamenti della pressione sanguigna durante due accessi di convulsioni in *A* e *B* per azione della cocaina.



a b c d

Fig. 20. — Mutamenti della pressione sanguigna durante gli accessi di convulsioni in *a b c d* per azione della cocaina.

Le figure 19 e 20 che riferisco come esempi sono tracciati presi in due esperienze, mentre si scriveva il polso e la pressione del sangue nella carotide per mezzo di un dito di guanto e di un timpano a leva secondo il metodo Marey. In questi tracciati si vede che nel cane durante gli accessi di convulsione prodotti dalla cocaina,

cresce molto la pressione, ma non si modifica la frequenza dei battiti cardiaci. Questo fatto è interessante per la dottrina ancora sempre controversa dei rapporti fra la pressione sanguigna e la frequenza dei battiti cardiaci.

---

### *Azione della cocaina sul nervo vago.*

Avendo osservato che la cocaina aumenta la frequenza delle sistoli cardiache, dobbiamo cercare di conoscere con quale meccanismo si produce questo aumento. Se cioè si tratti di una paralisi del nervo vago o di un fenomeno più complesso. Anrep affermò che negli animali a sangue caldo le piccole dosi di cocaina diminuiscono l'eccitabilità delle fibre arrestatrici del nervo vago e che le dosi medie le paralizzano completamente e durevolmente.

Nelle mie esperienze osservai che qualche volta anche dopo dosi fortissime il vago non era paralizzato e che ciò nulla meno il cuore batteva rapidamente. In questi casi certo la frequenza maggiore delle sistoli non era prodotta da una paralisi dei nervi arrestatori.

Per conoscere l'azione della cocaina sul nervo vago ho sacrificato esclusivamente per tale studio sei cani, e i risultati di queste esperienze non si accordano pienamente colle conclusioni di Anrep perchè dimostrano che vi è già un aumento di frequenza nel polso quando le fibre del vago non sono ancora paralizzate.

Riferisco qualche esperienza per far conoscere i particolari di questo fatto:

#### *Esperienza X. — 12 agosto.*

Ad un cane del peso di 3570 gr. si prepara la carotide. Si scrive il polso col metodo anzidetto: il cuore ha la frequenza prima di 54 e dopo di 42 pulsazioni ogni 20″.

4ʰ48′. Si amministra 0,08 di cocaina nella vena giugulare; la frequenza aumenta ed abbiamo 60 pulsazioni in 20″. Una irritazione dei due vaghi al collo, fatta subito dopo alle 4 49 con una corrente indotta appena sensibile sulla lingua, non produce alcun effetto. Nel minuto successivo il polso è più frequente 65 in 20″, e più alto.

4ʰ52. Una irritazione più forte dei nervi vaghi non produce effetto. Vi sono già le convulsioni. Nel minuto successivo cresce ancora la frequenza e la forza del polso 74 in 20″. L'eccitamento del vago rallenta il polso di più della metà, da 37 che era prima a 18 in 10″. Le pulsazioni si rinforzano durante l'eccitamento del vago.

4 57. Una irritazione ancora più forte del vago arresta il cuore, perchè esso faceva prima dell'eccitamento 32 contrazioni in 10″ e subito dopo durante l'eccitamento solo 8.

5 00. Si ripete l'irritazione dei vaghi collo stesso eccitamento e si ottiene nuovamente un arresto del cuore. Questo prova che malgrado una dose di 0,023 per chilogrammo il vago non ha ancora perduta la sua eccitabilità.

5 4. Iniezione di 0,04 nella giugulare: il cuore fa durante l'iniezione 27 pulsazioni: prima ne faceva 38; subito dopo irritando i vaghi con una corrente forte non ottengo più una modificazione della frequenza delle sistoli che restano 28 in 10″. Si fa dopo un minuto un'altra irritazione senza effetto, e dopo l'animale muore.

#### *Esperienza XI. — 14 agosto.*

Cane del peso di 3550 gr. Si scrive il polso col metodo anzidetto.

5ʰ40′. Frequenza del polso 29 e 27 in 10″. Nel tracciato si osservano delle forti oscillazioni regolari che dipendono dai movimenti dei vasi sanguigni.

5 44. Iniezione di 0,08 = 0,023 per chilogr. di cocaina nella giugulare; cessano immediatamente le oscillazioni della pressione e il tracciato diventa orizzontale, la frequenza del polso è 38 in 10″.

5 46. Irritazione dei vaghi con l'eccitamento di una corrente indotta che si sente appena sulla punta della lingua; il cuore rallenta le sistoli.

5 48. Schiuma alla bocca, pupilla dilatatissima, convulsioni continue, animale insensibile al dolore; polso 41 in 10″. Faccio una irritazione più forte del vago, che non può più resistersi sulla lingua; arresto completo del cuore. L'eccitamento dura come il primo 12 secondi, in questo frattempo il cuore fa una sola sistole. Appena cessato l'eccitamento batte con maggiore frequenza di prima e dopo 10 secondi si rallenta spontaneamente durante quasi 10 secondi e poi ritorna a 41 pulsazioni in 10 secondi.

5 49. Ricompaiono le oscillazioni respiratorie. Faccio una irritazione dei vaghi con eguale eccitamento, si rallenta la frequenza dei battiti, ma il cuore non si arresta più come prima. Dopo cessato l'eccitamento il cuore ha la frequenza di 42 in 10″.

6 7. Si irrita il vago collo stesso eccitamento e succede un arresto completo del battito cardiaco. Questa differenza dipende probabilmente da ciò, che essendo trascorsi 18 minuti dall'ultimo eccitamento, è già diventata meno intensa l'azione della cocaina. Finita l'eccitazione i battiti del cuore continuano ad essere più lenti, 12 pulsazioni in 10 secondi. Un minuto dopo il cuore ha nuovamente la frequenza di 38 in 10″.

6 14. Faccio un'altra iniezione di 0,04 di cocaina: la pressione diminuisce già durante l'iniezione, la frequenza da 31 in 10″ scende a 24 appena cessata l'iniezione; mezzo minuto dopo le pulsazioni sono così deboli che non possono più contarsi nel tracciato. Il cane muore senza che si constati un rallentamento sotto la frequenza normale; temperatura rettale = 42°, 50.

In questo cane che si mostrò molto sensibile per l'azione della cocaina è dunque mancata la paralisi del vago per la dose di gr. 0,023 per chilogrammo.

### *Esperienza XII. — 17 agosto.*

Cane del peso di 14,150 gr.

Riferisco anche la temperatura per dimostrare che la cocaina ebbe un'azione fortissima sebbene il vago abbia conservato sino alla fine la facoltà di arrestare i movimenti cardiaci. Contemporaneamente ho pure scritto i movimenti del respiro con un pneumografo di Marey perchè fosse più completa la osservazione. Per brevità non do nessun tracciato neanche quelli del polso perchè mi sembra che i risultati di tali esperienze possono comprendersi anche senza figure.

3$^h$ 7′. Scrivo il tracciato normale 51 in 30″; temperatura rettale = 38°,7.

3 18. Iniezione di 0,20 di cocaina nella giugulare, osservo un rapido aumento della frequenza delle sistoli, da 51 in 30″ che era nel normale fino a 66 in 30″; e una diminuzione di più della metà nella loro altezza sul tracciato; scoppiano le convulsioni 2 minuti dopo.

3 29. Il polso è 87 ogni 30″, e l'altezza delle sistoli nel tracciato quasi il doppio di ciò che fosse nel tracciato normale.

3 32. Inietto 0,12 di cocaina, il cuore non aumenta per questo la frequenza, che anzi diminuisce a 79 per 30 secondi.

3 40. Si fa un eccitamento dei vaghi con una corrente indotta che si sente appena sulla lingua. Il cuore rallenta molto i suoi battiti.

3 49. Iniezione di 0,12 di cocaina.

3 51. Irritazione con lo stesso eccitamento; si ottiene un rallentamento del cuore appena visibile, cessato il quale segue un acceleramento notevole.

4 7. Si fa un eccitamento dei vaghi che produce un forte rallentamento, in questo frattempo il respiro diviene regolare e profondo, e cessato l'eccitamento ritorna subito irregolare; la temperatura del retto è 40°,2.

4 18. Si iniettano altri 0,12 di cocaina.

In un'ora questo cane ha dunque ricevuto 0,56 di cocaina cioè 0,04 per chilogr., e malgrado

questa dose fortissima alle ore 4 24 mentre la temperatura rettale è 41° i vaghi sono ancora eccitabili, e irritandoli si produce un rallentamento dei battiti cardiaci. Anche questa volta il respiro diventa più regolare durante l'irritazione del nervo vago. Succede un forte accesso di convulsioni durante l'eccitamento dei vaghi.

4h 41′. Temperatura del retto = 42°,40, eccito il vago e ottengo ancora un rallentamento. Gli accessi di convulsioni si ripetono ad intervalli regolari di circa 30 secondi negli intermezzi di riposo i movimenti del respiro sono irregolari.

Queste esperienze dimostrano:

1° Che il cuore per effetto della cocaina aumenta non solo la frequenza, ma anche la forza delle sue sistoli;

2° Che la frequenza maggiore dei battiti cardiaci per azione della cocaina non dipende da una paralisi dei vaghi; perchè questi sono ancora eccitabili per correnti indotte anche quando vengono amministrate dosi fortissime di cocaina;

3° Che la cocaina agisce sul vago e lo rende meno sensibile agli eccitamenti elettrici, ma questa azione è poco durevole ed anche per dosi fortissime può cessare se non si rinnovano le amministrazioni del farmaco;

4° Una prova che i vaghi non hanno perduta la loro eccitabilità si ha pure nel fatto che qualche volta, anche dopo dosi fortissime, il respiro durante l'eccitamento cambia di forma e diviene regolare;

5° Non ho mai osservato anche per le dosi fortissime un rallentamento dei battiti cardiaci.

Richiamo l'attenzione del lettore su questa ultima conclusione perchè essa contraddice l'affermazione di Anrep (1), cioè: che dopo grandi dosi compare un rallentamento del polso, il quale è prodotto da pause che durano più a lungo come anche da contrazioni più lente del cuore. In nessuna delle mie esperienze, che furono oltre 50 solo sui cani, ho potuto riscontrare questa diminuzione di frequenza neanche nei momenti che precedono la morte.

## VII.

## Azione della cocaina sui vasi sanguigni.

### *Ricerche sulla pressione sanguigna.*

Gli autori non erano fino ad oggi d'accordo riguardo all'influenza che la cocaina esercita sulla pressione del sangue. Anrep e Laborde affermarono per i primi che in seguito a dosi medie si ha un notevole aumento della pressione e che per dosi forti la pressione, dopo un passeggero aumento, va diminuendo fino a zero. Vennero dopo le esperienze di Vulpian (2) il quale osservò che negli animali curarizzati le piccole dosi di cocaina diminuiscono la pressione e che questa dopo si alza sopra il normale; e

(1) Opera citata, pag. 67.

(2) Vulpian, *Experiences sur le Clorhydrate de cocaïne.* Comptes rendus Ac. des sciences, 1884 n 20 e 21, pag. 836 e 885.

finalmente le ricerche di Grünhagen e Berthold (1) i quali ammisero che l'aumento passeggero che produce la cocaina sia dovuto all'eccitamento del centro vasomotorio, mentre dopo il taglio del midollo questo verrebbe a mancare.

Lo studio dell'influenza che la cocaina esercita sui vasi sanguigni presenta delle grandi difficoltà perchè si devono tenere distinti i seguenti fattori:

1° L'azione che la cocaina esercita sull'energia del cuore;
2° L'azione sui centri vaso-motori;
3° L'azione locale sulle pareti dei vasi sanguigni;
4° Le dosi del rimedio;
5° Le disposizioni individuali dei cani.

Nessuno degli autori che ho sopra ricordato tenne sufficiente calcolo di questi fattori, ed è perciò che i loro risultati sembrano in apparenza contradittori.

Il metodo adoperato primieramente da Vulpian, Berthold e Grünhagen di curarizzare il cane per impedire che le contrazioni dei muscoli alterino i risultati che dà il manometro, non è sufficiente per giungere a dei risultati sicuri.

Noi vedremo nel capitolo sui controveleni della cocaina che il curaro paralizza gli effetti di questa sostanza, ed abbiamo ragione di credere che nell'animale curarizzato non sia possibile di ottenere dei risultati attendibili per riguardo agli effetti che possono produrre le piccole e le grandi dosi di cocaina.

Nello studio dell'influenza della cocaina sulla pressione, deve badarsi essenzialmente alla energia del cuore; infatti in alcuni casi ho veduto che dopo l'iniezione di gr. 0,01 a 0,02 di cocaina per chilogr., diminuiva la forza delle sistoli cardiache e la pressione poteva scendere fino a 20 o 30 mm. di mercurio sopra lo zero, e dopo ripigliando il cuore la sua funzione, mentre i battiti cardiaci andavano successivamente crescendo, la pressione poteva salire fino a 160 o 200 mm. Evidentemente in questi casi è assai difficile poter stabilire quale parte abbiano preso i vasi sanguigni nel cambiamento della pressione.

La diminuzione della pressione ed il successivo aumento osservato da Vulpian nei cani curarizzati si potrebbe, a mio credere, spiegare coll'azione della cocaina sul cuore.

Nelle mie esperienze che per brevità non riferisco in tutti i loro particolari, ho veduto che in media bastano gr. 0,01, 0,02 per chilogr. per produrre un aumento durevole della pressione nel cane; solo quando la cocaina viene amministrata a dosi più forti si produce un abbassamento della pressione.

Una prova che le dosi medie non agiscono con molta energia sui vasi sanguigni, l'abbiamo nelle oscillazioni respiratorie dei vasi sanguigni. Berthold aveva già osservato, che queste qualche volta si rendono più forti nell'avvelenamento per cocaina.

Le oscillazioni respiratorie dei vasi, quali si vedono nei tracciati della pressione, essendo un indizio sicuro delle variazioni nell'attività del centro vasomotorio, ho fatto attenzione per quali dosi si riuscisse a farle scomparire: e trovai che solo quando l'animale aveva da 0,03 a 0,04 per chilog. di cocaina, nel tracciato della pressione mancavano le oscillazioni respiratorie. Tale osservazione ci condurrebbe a conchiudere

(1) E. Berthold e Grünhagen, Centralblatt f. med. Wissenschaften 1885 n. 9, 25, 36.

che le dosi medie 0,01 a 0,02 per chilogr. lasciano persistere la funzione dei centri vaso-motori e le oscillazioni rispettive nella tonicità dei vasi sangnigni.

*Differenze individuali.*

Ho già avvertito che i cani presentano delle grandi differenze individuali riguardo alla resistenza che essi oppongono alla cocaina. Nelle esperienze che ho fatto intorno alla pressione mi occorse due volte di osservare che le dosi relativamente piccole di 0,01 per chilogr. produssero una diminuzione progressiva della pressione fino alla morte. Benchè io consideri questi casi come eccezionali, perchè la maggioranza dei cani non muore per dosi così piccole di cocaina, riferisco ciò nulla meno per sommi capi queste osservazioni.

*Esperienze sulla pressione sanguigna nei cani.*

*Esperienza XIII. — 6 luglio.*

Ad un cane del peso di 7930 gr. preparo la vena giugulare per fare l'iniezione di cocaina, e la carotide per prendere la pressione col manometro a mercurio: e sullo stesso cane scrivo la respirazione toracica con un pneumografo di Marey.

$9^h$ 6′. La pressione sanguigna oscilla fra 80 e 120 mm., la temperatura rettale è 39°. 50.

9 10. La pressione oscilla fra 120 e 160 mm.

9 13. La pressione è andata successivamente crescendo e raggiunse il suo massimo in questo istante mentre l'animale si mostra molto irrequieto e la pressione oscilla fra 140 e 180 mm.

9 16. Possiamo considerare la pressione come nello stato normale oscillando fra 120 e 160 mm., la temperatura è 39°. 30, il respiro è normale.

9 30. Si inietta poco per volta 0,08 di cocaina pari a 0,01 per chilogr.; la pressione va successivamente aumentando prima che compaiano le convulsioni.

9 31. Appena finita l'iniezione la pressione oscilla già fra 200 e 220 mm.

9 32. La pressione oscilla fra 200 e 240 mm., il respiro è calmo e regolare.

9 33. Compaiono i primi accessi di convulsioni, la pupilla è dilatata. Finito il primo accesso convulsivo la pressione oscilla fra 140 e 200 mm.; la temperatura rettale è 39° 06.

9 39. Respirazione irregolare e debole.

9 40. La pressione oscilla fra 170 e 200 mm.; sono cessate le convulsioni; il cane è molto irrequieto.

9 43. La temperatura rettale è 40°, 30.

9 46. La temperatura 41°, la pressione si mantiene costante oscillando fra 190 e 210 mm. Esaminando i tracciati dell'esperienza si vede che la dose di 0,01 per chilogrammo per la spazio di 20 minuti mantiene la pressione da 50 a 60 mm. superiore al normale.

9 48. Gli accessi di convulsioni divengono più frequenti e più forti e la pressione, a seconda che si misura nei periodi di accessi o di riposo, oscilla fra 120 e 105 mm. oppure fra 190 e 210. Di grado in grado che si ripetono le convulsioni la pressione diminuisce.

9 54. Alle 9 56. La pressione oscilla nei limiti della pressione normale.

9 57. Succedono altri accessi e dopo la pressione discende a 80 mm.; la temperatura è 43°.

10. Dopo un accesso di convulsioni si arresta il respiro, la pressione sale a 100 mm., il polso diviene successivamente più debole e la pressione scende fino a zero.

10 7. Temperatura — 43°. 06.

*Esperienze sulla pressione negli animali col midollo tagliato.*

Per riconoscere l'azione della cocaina sulle pareti dei vasi sanguigni indipendentemente dai nervi e dai centri vasomotori, ho scritto la pressione nei cani col midollo tagliato fra l'atlante e l'occipite ai quali amministravo delle forti dosi di cocaina.

*Esperienza XIV. — 19 luglio.*

Ad un cane del peso di 7580 gr. si scopre la membrana atlanto-occipitale dopo aver preparato la carotide, la giugulare e la trachea.

3h53′. Prima del taglio del midollo temperatura rettale 39° 90.
3 54. Taglio del midollo.
3 58. La pressione sanguigna presa col manometro a mercurio oscilla fra 70 e 90 mm.
3 59. Temperatura 39°. 70.
4 00. Prima del taglio dei vaghi la pressione oscilla fra 50 e 100 mm. polso 25 in 30″.
4 3. Taglio dei vaghi; la pressione aumenta considerevolmente ed oscilla fra i 100 e 160 mm. per 4 minuti; il polso è così frequente che non si può contare.
4 7. Comincia a diminuire la pressione mentre il cuore è ancora frequentissimo.
4 9. La pressione oscilla intorno a 50 mm.; la temperatura è 39°. 60.
4 10. Si iniettano nella giugulare 0,08 di cocaina, la pressione aumenta immediatamente ed oscilla fra 70 e 90 mm. Compaiono dei movimenti convulsivi; dopo il cuore si rallenta e la pressione comincia ad abbassarsi.
4 12. La pressione oscilla fra 10 e 15 mm. Incomincia un rapido aumento della pressione che si deve attribuire alla forza ed al numero delle contrazioni cardiache perchè la frequenza delle sistoli cardiache aumenta grandemente.
4 12 30″. Pulsazioni 50 in 30″.
4 14. Pulsazioni 64 in 30″, la pressione oscilla fra 50 e 60 mm.
4 16. Polso 92 in 30″, pressione fra 150 e 170.
4 18. Per vedere se è veramente l'azione della cocaina sul cuore che fa abbassare la pressione, faccio una nuova iniezione metà della prima 0,04. Il battito del cuore diventa più debole, la pressione diminuisce.
4 20. La pressione è quasi zero ed il cuore non si sente quasi a battere.
4 21. Il cuore si ristabilisce, pulsazioni 54 in 30″, pressione oscilla tra 10 e 20 mm., temperatura 39°. 70.
4 23. Polso 90 in 30″ molto forte, pressione fra 190 e 200 mm.; dopo la pressione diminuisce spontaneamente ed in cinque secondi con delle oscillazioni considerevoli dovute agli accessi di tetano fino ad un minimo di 60 a 70 mm., dopo il quale si innalza spontaneamente ed oscilla fra 170 e 190.
4 42. Si sospende la respirazione artificiale; in questo frattempo la temperatura si conserva a 39°. 65 e l'animale muore. L'autossia ha dimostrato che il taglio del midollo era completo.

In questa esperienza vediamo che per mezzo della cocaina si è impedito l'abbassamento della pressione ed il raffreddamento che si ottiene dopo il taglio del midollo spinale.

La cocaina amministrata a forti dosi ha prodotto prima un abbassamento della pressione per la sua azione deprimente sul cuore e dopo la pressione si è sollevata.

L'aver osservato che la pressione nell'ultimo periodo di quest'esperienza si è conservata per oltre un quarto d'ora ad un'altezza superiore al normale permette di conchiudere: che la cocaina ha una azione diretta sui vasi sanguigni.

*Esperienze colla circolazione artificiale negli organi estirpati.*

Siccome l'esperimento più decisivo per determinare l'influenza di un farmaco sui vasi sanguigni è quella della circolazione artificiale negli organi separati dal corpo, dovetti tentare delle esperienze anche con questo metodo. A tale scopo facevo la circolazione artificiale con sangue defibrinato normale e con sangue defibrinato avvelenato con cocaina in un rene di cane tolto dall'animale appena ucciso.

La pressione era tenuta costante a metri 1,70 di acqua per mezzo di una boccia di Mariotte e misuravo la quantità di sangue in centim. cubici che usciva dalla vena renale (1).

Per stabilire le dosi che dovevo amministrare ad un rene per mettermi in condizioni analoghe a quelle delle esperienze precedenti, ho fatto il seguente ragionamento: se aggiungo 0,04 di cocaina a 100 cc. di sangue defibrinato che deve servire alla circolazione artificiale nel rene è come se amministrassi presso a poco la stessa dose di cocaina ad un cane del peso di 1400 gr.: infatti possiamo ritenere in media che il sangue sia $^1/_{14}$ del peso totale dell'animale; ossia è come se io somministrassi grammi 0,0285 di cocaina per chilogrammo di animale.

Riferisco come esempio delle ricerche fatte con questo metodo due sole esperienze.

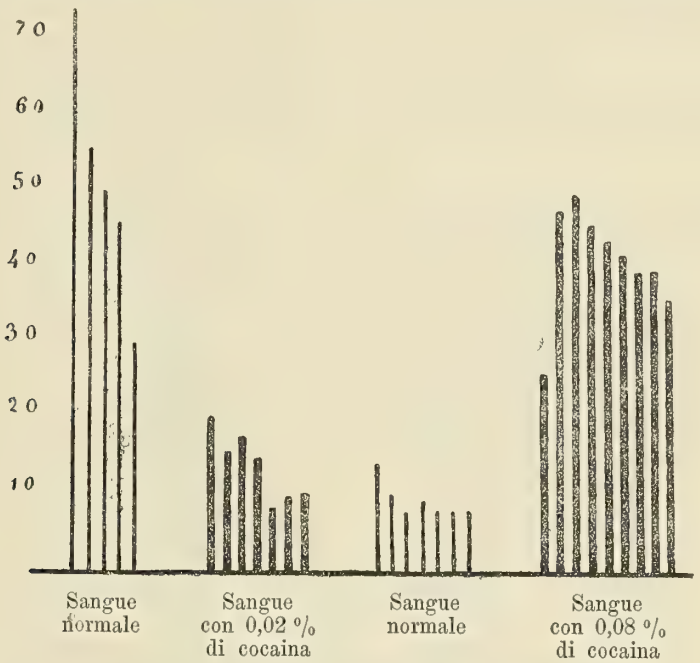



Fig. 21. — Circolazione artificiale nel rene di cane.
Quantità di sangue in cc. uscito dalla vena renale ogni due minuti.

*Esperienza XV. — 3 luglio.*

Si dissangua un grosso cane che dà 800 cc. di sangue defibrinato. Si stacca subito il rene e lo si prepara per la circolazione artificiale. Faccio dapprima circolare del sangue defibrinato normale sotto una pressione costante di 1,70 metri di acqua.

5h 39′. Stabilita la comunicazione, ogni due minuti passano successivamente cc. 74. 56. 50. 46. 30. Subito dopo circola il sangue avvelenato alla dose di 0,0142 per chilogramma di animale (cioè una soluzione al 0,02 per 100 cc. di sangue), ogni due minuti passano successivamente 20. 16. 18. 15. 8. 10. 10. cc. di sangue.

(1) Per la disposizione dell'apparecchio e il metodo vedi la Memoria di mio fratello. A. Mosso, *Sopra alcune nuove proprietà delle pareti dei vasi sanguigni.* Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, 1875.

È noto che quando si fa circolare del sangue defibrinato sotto una pressione costante in un organo estirpato, la velocità dell'efflusso sangnigno va successivamente diminuendo. Questo fatto costituisce una difficoltà ed una grave incertezza quando si deve giudicare se un rimedio a piccole dosi produca una contrazione dei vasi sanguigni. Esaminando la fig. 21 che rappresenta il decorso di questa esperienza, è difficile stabilire se le dosi di 0,02 % abbiano fatto contrarre i vasi più di quanto sarebbe succeduto naturalmente col solo sangue normale.

Nello stesso rene faccio nuovamente circolare del sangue normale; ogni due minuti passano successivamente 14. 10. 8. 9. 8. 8. 8. cc.

Subito dopo passa il sangue con 0,0570 di cocaina per chilog. (cioè una soluzione al 0,08 per 100 cc. di sangue), ogni due minuti passano 26. 48. 50. 46. 44. 42. 40. 40. 36 cc.

In questa parte dell'esperienza non vi è più alcun dubbio che la cocaina alla dose di 0,08 % pari a 0,057 per chilog. di animale, abbia prodotto una forte paralisi dei vasi sanguigni.

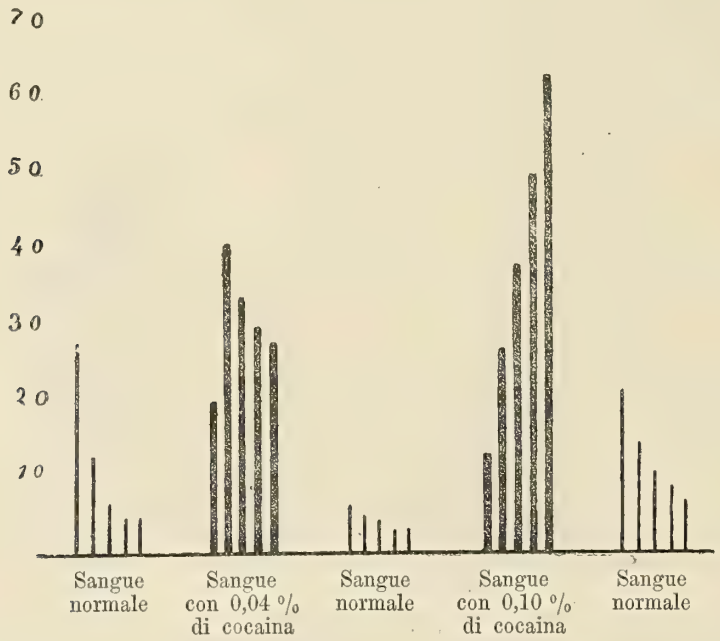



Fig. 22. — Circolazione artificiale nel rene di cane.
Quantità di sangue in cc. uscito dalla vena renale ogni minuto.

### *Esperienza XVI. — 9 giugno.*

Un cane da 600 cc. di sangue defibrinato: si prepara il rene come nella esperienza precedente, 4h 2. Avviata la circolazione artificiale ad ogni minuto, sotto la pressione di 1 m. 70 d'acqua, passano successivamente cc. 28. 13. 7. 5. 5. di sangue normale.

Subito dopo si fa circolare il sangue avvelenato 0,04 % di cocaina pari a 0,0285 per chilogrammo, ogni minuto passano cc. 20. 41. 34. 30. 28.

Si fa nuovamente la circolazione con sangue normale e passano solamente 6. 5. 4. 3. 3. cc.

Nello stesso rene faccio nuovamente circolare del sangue avvelenato con 0,0712 per chilog. (cioè una soluzione al 0,10 per 100 cc. di sangue), ogni minuto passano 13. 27. 38. 50. 63, cc.

Subito dopo il sangue normale passa colla velocità di 21. 15. 11. 9. 7. cc. al minuto.

In questa esperienza si vede che la paralisi prodotta dalla cocaina alla dose di 0,04 % scompare quando ritorna a circolare il sangue normale; ma ricompare anche più forte, colla circolazione di sangue avvelenato al 0,10 %. Questo fatto che ho pure confermato per dosi maggiori cioè di gr. 0,2 % ed anche di 0,4 %, dimostra che l'azione della cocaina non altera durevolmente le fibre muscolari dei vasi: essa produce una paralisi, ma come abbiamo già veduto nel cuore appena si rimuove il veleno con la circolazione del sangue normale, i vasi sanguigni riacquistano la loro tonicità normale.

Le precedenti esperienze fatte colla circolazione artificiale nei reni estirpati dimostrano che le piccole dosi di cocaina 0,02 % (pari a 0,0142 per chilogrammo di animale) non producono un effetto sensibile sui vasi sanguigni. Le dosi di 0,04 % 0,08 % 0,10 % (pari a 0,028-0,0570-0,0712 per chilogrammo di animale) producono una forte paralisi dei vasi sanguigni negli organi estirpati.

Noi vediamo riprodursi nella circolazione del rene estirpato gli stessi fenomeni che abbiamo veduto nell'animale vivo dove le dosi piccole non producono alcuna azione sui vasi e danno un leggero restringimento, mentre che le dosi forti producono una dilatazione dei vasi sanguigni.

Il dott. C. Sighicelli in un lavoro fatto sotto la direzione del prof. Albertoni [1] trovò che questo alcaloide produce una paralisi completa dei muscoli motori del bulbo oculare e dei muscoli striati in genere, purchè molto sottili: e che una eguale azione paralizzante la cocaina l'esercita pure sulle fibre muscolari liscie dell' intestino. Benchè le dosi adoperate dal Sighicelli per stabilire un azione locale della cocaina siano molto più considerevoli di quelle che io adoperai nelle circolazioni artificiali del rene, devo tuttavia ricordare le sue esperienze perchè hanno un nesso evidente coi risultati delle mie esperienze.

## VIII.

### Azione della cocaina sulla funzione del respiro e meccanismo della morte.

Lo studio dell' influenza che la cocaina esercita sui movimenti respiratorî presenta delle gravi difficoltà perchè le piccole dosi rendono gli animali tanto irrequieti che è difficile scrivere i movimenti del respiro, e le dosi maggiori producono delle convulsioni che alterano i tracciati. Per evitare questi inconvenienti ho pensato di assopire gli animali per mezzo dell' idrato di cloralio. Questo metodo di impedire le convulsioni e studiare l'azione della cocaina durante il sonno cloralico diede buoni risultati.

*Esperienza XVII. 11 marzo 1886.*

Ad un cane del peso di 3870 gr. inietto ad intervalli tre grammi di idrato di cloralio nella cavità dell'addome. Dopo 15 minuti il cane è profondamente assopito ed insensibile al dolore. La

[1] Sighicelli, *Contributo allo studio della azione fisiologica della cocaina.* Annali di chimica, medico farmaceutica e di Farmacologia, 1885, pag. 350.

temperatura rettale da 38° 25 è discesa a 38° 15. Scrivo contemporaneamente il respiro del torace e quello dell'addome per mezzo di due timpani.

Il respiro si rallenta per effetto di cloralio. La figura 23 rappresenta colla linea superiore T i movimenti del torace e coll'inferiore A quelli dell'addome.

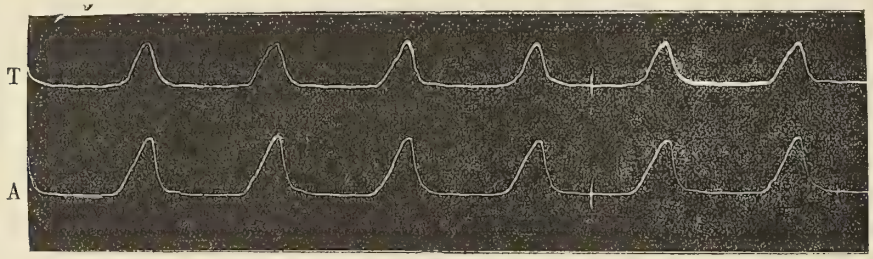



Fig. 23. — Cane. T respirazione toracica; A respirazione addominale scritte contemporaneamente.

Inietto lentamente 0,04 di cocaina nella safena: durante l'iniezione compare un rallentamento nella frequenza del respiro che dura meno di un minuto e dopo il respiro diventa più frequente. Questo fatto di un rallentamento dei movimenti respiratorî durante e dopo l'amministrazione della

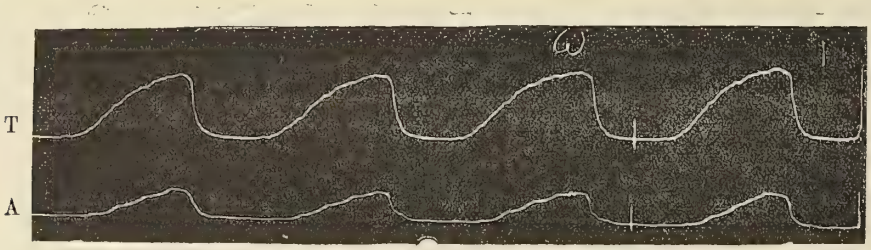



Fig. 24. — Modificazioni del tracciato precedente in seguito all'amministrazione della cocaina.

cocaina l'ho veduto ripetersi più volte di seguito, come lo si vede nella fig. 24 dove in $\omega$ cessa l'iniezione di 0,04 di cocaina. — È notevole in questo tracciato il cambiamento di forma che è successo nella inspirazione che divenne più lunga e nella espirazione che divenne più rapida. Questo tipo di respirazione rassomiglia a quello che osservasi nel sonno profondo. — Questo assopimento maggiore del centro respiratorio è però un effetto che dura pochi secondi, e subito dopo compare l'acceleramento del respiro che deve ritenersi come l'azione definitiva della cocaina.

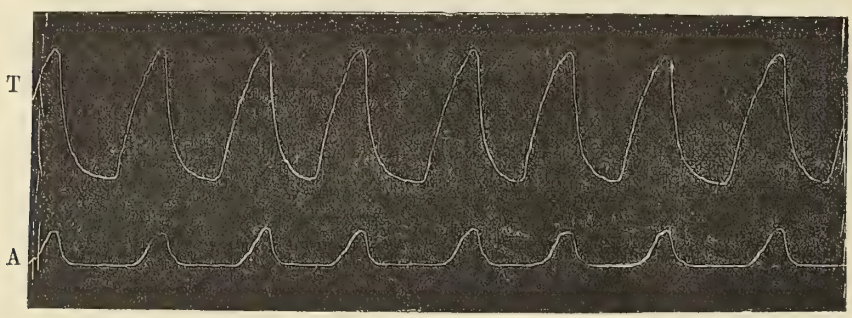



Fig. 25. — Continuazione dell'osservazione precedente.

La fig. 25 rappresenta il respiro scritto due minuti dopo. La maggiore ampiezza dei movimenti toracici che vediamo in questa figura facendomi temere che l'animale fosse vicino a svegliarsi

gli amministro un altro grammo di cloralio perchè non prevalesse l'azione della cocaina. Questo è il quarto grammo di cloralio che ha ricevuto l'animale.

Finita l'iniezione del cloralio, il cane fa ancora un'inspirazione normale, ma l'espirazione non è più completa. Il torace rimane dunque leggermente dilatato. La seconda inspirazione raggiunge quasi l'altezza di prima, ma la terza rimane considerevolmente al di sotto. Anche il diaframma si è fermato; anzi nell'addome non appare più alcuna traccia di movimento inspiratorio mentre il torace si muove ancora. Questo arresto dura fino all'istante nel quale il torace ricomincia a muoversi, facendo delle inspirazioni necessariamente più forti e dopo due ispirazioni anche il diaframma riprende la sua funzione.

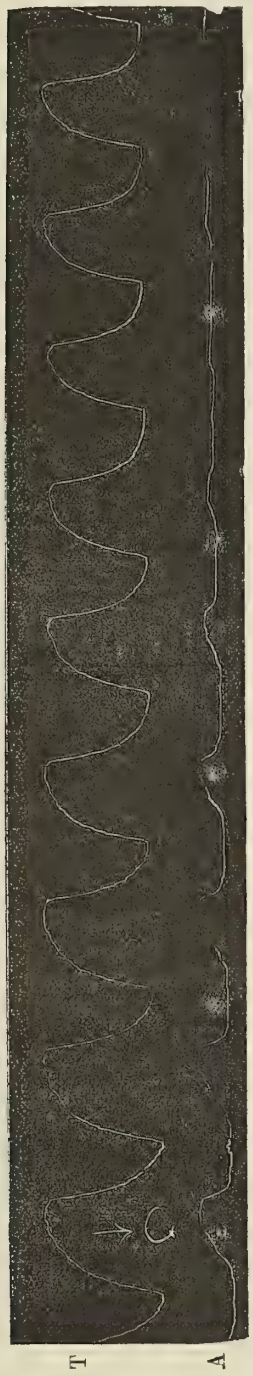



Fig. 26. — Arresto dei movimenti del diaframma, linea A, in seguito ad amministrazione della cocaina. La linea T rappresenta i moti respiratorî del torace scritti contemporaneamente.

Aspetto cinque minuti finchè la respirazione sia diventata nuovamente regolare e poi faccio una iniezione di 0,05 di cocaina nella safena e non si vede alcun effetto. Faccio un'altra iniezione di cocaina (0,05) nella safena un minuto e mezzo dopo, e si produce un rallentamento assai considerevole del respiro ed un arresto completo del diaframma, mentre il torace continua a funzionare con movimenti meno ampi e più frequenti come si vede nella figura 26.

L'animale è ancora sempre addormentato ed insensibile. Comprimendo forte la membrana interdigitale colle unghie non reagisce. La sua temperatura è discesa a 36°, 9.

Negli animali ai quali si amministra semplicemente la cocaina si osservano, benchè in modo meno evidente, le stesse trasformazioni del respiro che abbiamo constatato in questo capitolo per mezzo del cloralio.

L'arresto del diaframma osservato in questa esperienza, fig. 26, non è però un' azione caratteristica della cocaina: e potrei riferire l'esempio di altri cani nei quali il medesimo farmaco amministrato a dosi elevate nelle vene arrestò i movimenti del torace, e lasciò persistere benchè assai deboli quelli del diaframma. Si riscontrano qui le stesse differenze individuali che mio fratello ha già indicato per l'azione del cloralio nella sua Memoria, *Sulla respirazione periodica e di lusso.*

In seguito a queste esperienze si può ritenere che la cocaina amministrata nelle vene o nei polmoni produce una diminuzione passeggera nella frequenza del respiro, e dopo come effetto persistente e caratteristico un acceleramento dei moti respiratorî. Le dosi più forti arrestano isolatamente ora il diaframma ed ora il torace.

Vedremo che le dosi fortissime fanno cessare completamente per un tempo più o meno lungo i movimenti respiratorî del torace e del diaframma.

*Arresto dei movimenti respiratorî.*

La cocaina quando agisce colla massima intensità arresta i movimenti del respiro. Analizziamo le varie gradazioni con cui si produce questo fenomeno.

Fig. 27. — Movimenti respiratorî del torace prima e dopo un accesso di convulsioni per cocaina.

Il primo e il più semplice dei casi è quello dato nella fig. 1 dove gli accessi convulsivi si ripetono ad intervalli più o meno regolari, senza essere preceduti o seguiti da alcuna modificazione del respiro. È facile se si scrive il respiro prima che scoppino gli accessi di convulsioni di ottenere dei tracciati come quello della figura prima, quando la dose di cocaina non sia troppo forte. Queste operazioni sono importanti perchè ci dimostrano che in un primo periodo la cocaina agisce già nel midollo spinale fino alla regione cervicale, producendo dei forti accessi di convulsioni senza che il midollo allungato o almeno i centri del respiro partecipino a questi disordini funzionali.

Resta così confermata la mia supposizione che gli accessi convulsivi non hanno origine nel midollo allungato.

Per dare un esempio in cui si vedano meglio tutti i particolari, riferisco un altro tracciato come quello della fig. 1 preso da un cane che faceva dei movimenti respiratorî più profondi, e nel quale il cilindro girava con maggiore velocità fig. 27. Ogni 9 o 10 respirazioni succede un forte accesso tetanico, al quale prendono parte anche i muscoli del torace. L'accesso dura circa 10 secondi e appena cessano le convulsioni il ritmo del respiro continua inalterato colla stessa forma e frequenza che aveva prima.

In questi casi è evidente che il centro respiratorio non prende parte come sede della respirazione all'accesso di convulsioni, perchè non si altera il suo ritmo funzionale. La sede di queste convulsioni molto probabilmente non è nel midollo allungato ma bensì nel midollo spinale.

Il fatto che in un accesso violento di contrazioni spasmodiche dei muscoli di tutto il corpo manchi ogni modificazione del respiro è anche interessante, perchè viene a confermare l'indipendenza dei centri respiratorî dalla composizione chimica del sangue. Se dopo un lavoro intenso dei muscoli che dura 10 secondi l'acido carbonico prodottosi non basta ad accelerare i movimenti del respiro, è segno che l'accumularsi dell'acido carbonico nel sangue non è sufficiente a produrre un mutamento nella funzione dei centri respiratorî. Queste

osservazioni vengono a dare una nuova conferma alla dottrina sostenuta da mio fratello nel lavoro sulla respirazione periodica e di lusso.

Quando l'azione della cocaina si diffonde al midollo allungato, si osserva una modificazione del ritmo respiratorio che precede gli accessi accelerandone la frequenza.

Fig. 28. — Aumento nella frequenza dei movimenti respiratorî che precede gli accessi di convulsioni per cocaina.

Riferisco un esempio dei moltissimi che potrei citare a prova di questa affermazione. — Il tracciato 28 rappresenta la respirazione toracica di un piccolo cane al quale amministrai 0,02 di cocaina per chilogr. Anche in quest'animale si è ripetuto il fatto che nel primo periodo la cocaina produsse un forte aumento nell'ampiezza dei movimenti respiratorî. Dopo comparvero gli accessi, prima nei muscoli delle estremità posteriori e poscia in tutto il corpo; gli accessi si ripetevano ed erano fortissimi senza essere preceduti o seguiti da alcun mutamento del respiro. Dopo tre minuti gli accessi diventarono più lunghi e il respiro cominciò a modificarsi.

La fig. 28 rappresenta l'acceleramento del respiro che precede un accesso di convulsioni. Noi vediamo che in A finisce un accesso di convulsioni, subito dopo il respiro comincia col suo ritmo come se fosse normale e dopo si accelera gradatamente. Non è la forza delle inspirazioni che si modifica, ma la frequenza con cui si compiono esse diventano rapidissime, e poi scoppia in B un altro accesso di tetano.

In questo caso io ritengo che il midollo allungato partecipi alle convulsioni. Potrebbe supporsi che sia un effetto psichico e che l'animale senta un malessere che precede l'accesso, e che perciò diventi affannoso il respiro; per eliminare questo dubbio mi basterebbe ricordare che in questo momento l'animale non reagisce ed è insensibile al dolore; ma un'altra prova l'abbiamo nella seguente osservazione che rappresenta l'ultimo accesso di convulsioni, quello che produsse la morte, fig. 29. Il respiro andò gradatamente aumentando di frequenza fino a che scoppiò un accesso fortissimo di convulsioni; il diaframma entrò esso pure in tetano; e non essendo

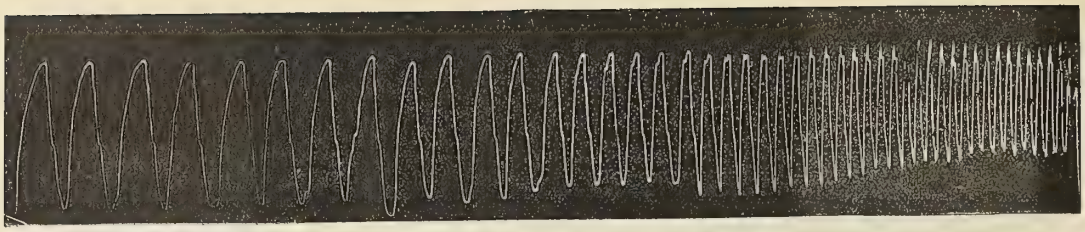


Fig. 29. — Aumento nella frequenza del respiro seguito da un accesso di convulsioni dopo il quale il cane muore.

Fig. 30. — Aumento di frequenza e successiva diminuzione nell'ampiezza dei movimenti respiratori del torace quando la cocaina coll'arresto della respirazione produce la morte.

venuti in soccorso colla respirazione artificiale, l'animale dovette soccombere sotto questo accesso di tetano che arrestò definitivamente il respiro. Qualche volta l'accesso delle convulsioni tetaniche delle estremità e degli altri muscoli, che per brevità chiamerò spinali, è disgiunto dall'accesso del tetano nel centro respiratorio; e la morte si produce mostrando distinti questi due accessi come lo si vede nella figura 30. Una dose mortale di cocaina produsse degli accessi fortissimi di convulsioni ai quali partecipava pure il respiro; in un ultimo accesso quando finirono in A le contrazioni tetaniche delle gambe e di tutti i muscoli del corpo, continuò il torace a fare delle respirazioni sempre più frequenti e più deboli fino ad arrestarsi. Allora i muscoli si rilasciarono e il torace prese in C una posizione di accrescimento come nella espirazione. Il cuore continuò a pulsare inalterato. Le sue contrazioni erano così forti che si trasmettevano al timpano a membrana elastica che toccava lo sterno; poi si manifestò un aumento di tonicità nei muscoli del torace, e la linea si alzò fino al livello della inspirazione. In D si fece la respirazione artificiale e si salvò momentaneamente l'animale dalla morte, il quale poi soccombette in altri accessi successivi nei quali non si venne più in suo aiuto col soffietto. Ora riferisco una esperienza in esteso per mostrare un' altra forma più lunga di tetano respiratorio che precede l'arresto del respiro nell'avvelenamento con forti dosi di cocaina.

*Esperienza XVIII. — 22 gennaio 1886.*

Ad una cagna del peso di 12700 grammi faccio la tracheotomia ed amministro una prima dose di cocaina nei polmoni per mezzo del polverizzatore. Vedendo che l'animale è troppo irrequieto e che le continue convulsioni non mi permettono di scrivere bene i tracciati del respiro, inietto successivamente in 3 volte 5 gr. di cloralio nella cavità addominale. La temperatura era salita per effetto della cocaina da 38° 5 a 41° 5 dalle ore 4,5 alle 4,42.

4$^h$ 40′. L'animale è tranquillo; la sensibilità è così diminuita che anche comprimendo fortemente colle unghie la membrana interdigitale non si producono movimenti riflessi. Sebbene l'animale sia completamente immobile, la temperatura rettale continua a crescere assai rapidamente.

4 41. La temperatura è 41° 35. Si vede che il cloralio ha un'azione sui centri motori perchè impedisce le convulsioni, ma non agisce con eguale intensità sui centri termici in questo primo periodo della sua azione.

4 42. Temperatura = 41° 5. I movimenti del respiro sono molto frequenti ma poco profondi, ed esistono solo nel torace; il diaframma è immobile e si lascia trascinare passivamente insieme alle pareti dell'addome.

4 50. Temperatura = 41° 4. Prevale l'azione del cloralio e la temperatura va continuamente abbassandosi ore 4, 50 = 41°, 4 — ore 4 55 = 41°, 2 — ore 5 = 41°, 0 — ore 5, 5 = 40°, 9. A questo punto si fa una nuova polverizzazione di cocaina. Il respiro non cambia aspetto per qualche minuto e poi incomincia a divenire più frequente e più debole la respirazione toracica; il diaframma fa invece delle contrazioni più forti di quelle che non facesse prima. Dopo un'altra polverizzazione di cocaina cominciano a manifestarsi le convulsioni.

5 24. Temperatura = 40° 2. Le convulsioni diventano più forti e la temperatura non cresce malgrado ciò.

5 29. Si fa un'altra polverizzazione di cocaina per produrre la morte.

5 34. La frequenza del respiro cresce continuamente senza che succedano convulsioni. Sebbene io abbia scritto continuamente il tracciato della respirazione addominale e toracica per mezzo di due timpani, non riferisco per brevità nessuna figura. Possiamo facilmente immaginarsi un aumento rapido e continuo della frequenza respiratoria fino al punto che succedono 7 movimenti debolissimi del torace e dell'addome per minuto secondo. Questa parte dell'esperienza che sarebbe la più interessante a vedere è anche la più difficile a riprodursi col metodo ordinario della zincotipia col quale sono fatte queste figure. Durante l'attività maggiore del centro respiratorio il diaframma non si rilascia più completamente; l'addome rimane sollevato. Quando cessa il tetano respiratorio alle 5 36 si rilasciano i muscoli del torace e del diaframma ma non contemporaneamente. Anche in questa circostanza si vede una differenza fra il diaframma e il torace perchè i loro centri funzionali sono distinti.

Abbiamo già veduto nella figura 30 che il cuore dopo l'arresto del respiro continua a pulsare con un ritmo regolare ed abbastanza frequente. Qui si osserva egualmente che durante gli accessi il cuore non presentava una frequenza esagerata come quella del respiro e da 17 pulsazioni in 10 secondi, ossia 102 pulsazioni al minuto.

Temendo che il cane soccomba durante l'arresto del respiro quando vedo che il cuore comincia a rallentarsi faccio la respirazione artificiale col soffietto.

L'animale non respira di per sè; devo continuare per 10 minuti la respirazione artificiale; il cuore diviene lentissimo. Gli inietto 2,5 gr. di cloralio nella cavità dell'addome per paralizzare gli effetti della cocaina. Alle 5, 45 quando si sospende il respiro l'animale fa qualche movimento respiratorio spontaneo. Si continua ancora la respirazione artificiale. Il cuore batte forte ma lento ed irregolare. Malgrado la respirazione artificiale la lingua non è rossa come dovrebbe essere perchè la circolazione è languente. Alle 2, 47 il respiro può continuare naturalmente di per sè; vediamo che come prima i movimenti del diaframma sono più forti di quelli del torace; ad ogni venti respirazioni circa succede un movimento inspiratorio del torace molto più forte degli altri.

Il cane è affatto insensibile. La respirazione spontanea che incomincia alle 5, 46, dopo circa due minuti diventa più frequente e più piccola fino a che scompare ripetendosi la medesima scala decrescente di prima.

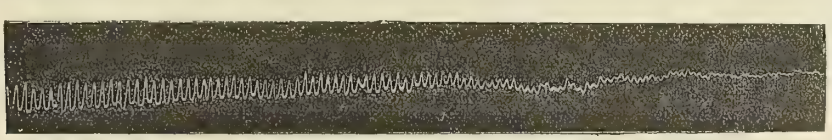


Fig. 31. — Tetano respiratorio del diaframma per azione della cocaina

La figura 31 che abbraccia circa 20 secondi rappresenta il tracciato della respirazione addominale. Non ho riprodotto quella del torace perchè i movimenti erano troppo piccoli. Nell'originale si può constatare con facilità che i movimenti dell'addome e del torace si corrispondevano esattamente. Il fatto che 10 minuti di respirazione artificiale non sono bastati per mettere i centri respiratorî in grado di poter funzionare di per sè, ci dimostra quanto sia intensa l'azione della cocaina sopra il sistema nervoso.

La ripetizione spontanea di questo accesso ci dimostra l'affinità che esso presenta coi fenomeni del tetano respiratorio descritti precedentemente. La differenza riguarda la durata maggiore e la mancanza di tetano spinale, del resto ne è identica la natura.

Dalle esperienze che ho esposto risulta che la cocaina nel suo primo periodo di azione eccita i centri respiratorî perchè produce un aumento nella frequenza e nell'ampiezza dei moti respiratorî.

Ho tenuto calcolo in queste mie ricerche dell' influenza che la temperatura elevata prodotta dalla cocaina può esercitare sulla frequenza del respiro. Quando la temperatura del retto oltrepassa il 41°, non è possibile trascurare questo fattore importantissimo; ma l'aumento nella frequenza del respiro si osserva anche prima di quella temperatura e nel primo periodo di azione questi due fenomeni sono fra loro indipendenti.

Le forti dosi di cocaina producono la morte perchè si arrestano i movimenti del respiro.

La respirazione artificiale è il mezzo più efficace per tenere in vita gli animali quando la cocaina sospende i movimenti del respiro.

Quando per azione della cocaina l'animale cessa di respirare il cuore batte ancora per lungo tempo.

## IX.

### Influenza della cocaina sul calore animale. Applicazioni terapeutiche ed antidoti della cocaina.

La cocaina è fra tutte le sostanze che si conoscono ora, quella che fa crescere più sollecitamente e maggiormente la temperatura dell'organismo. Questa proprietà della coca di aumentare la temperatura del corpo era già nota a P. Mantegazza [1], il quale aveva trovato una temperatura di 38°,75 sotto la propria lingua in seguito a masticazione di foglie di coca.

Ho già trattato quest'argomento in una Memoria, *Sull'azione delle sostanze che per mezzo del sistema nervoso aumentano o diminuiscono la temperatura del corpo* [2], e perciò non riferisco altre esperienze. Quest'azione appare del resto evidente in parecchie delle osservazioni che ho riferito in questa Memoria, come ad esempio nella III. XI. XII. XIII, e dovrò ritornare fra poco su questo argomento parlando dei controveleni della cocaina.

[1] Opera citata pag. 44.

[2] Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino, vol. 21. Seduta 18 aprile 1886.

Un fatto interessante che ho trovato in queste mie ricerche si è che la cocaina per produrre un aumento della temperatura non ha bisogno che siano intatte le vie nervose che uniscono il cervello al midollo spinale. Secondo le idee più recenti si ammette che nel cervello esistano dei centri termici, i quali agiscono sul midollo e sui nervi producendo una attività maggiore dei centri termici. Io osservai che anche nel midollo spinale devono esservi dei centri nervosi capaci di aumentare la quantità di calore che producono i tessuti, perchè tagliando il midollo allungato ed amministrando la cocaina la temperatura del corpo non si abbassa come succede di regola ma anzi presenta un aumento.

Riferisco una esperienza per dimostrare questo fatto.

*Esperienza XIX. — 6 luglio.*

Cane del peso di 10000 gr. Temperatura della stanza 25°.

3h5′. Temperatura del retto 39°,70. Si fa la tracheotomia, si prepara la giugulare e la carotide, e dopo si scopre la membrana atlanto-occipitale. Finite queste operazioni alle ore 3 19 la temperatura rettale è salita a 40°, 40. Quest'aumento della temperatura si deve attribuire alla operazione ed al cloroformio.

3 20. Si taglia il midollo fra l' atlante e l'occipite.

3 23. Temperatura rettale 40°, 35. Polso 20 in 15″.

3 27. Si tagliano i due vaghi al collo.

3 28. » 40°, 30.

3 29. Il polso è così frequente che non si può contare.

3 30. » 40°, 32. Da 36 a 40 pulsazioni in 15″.

3 33. » 40°, 36. Polso 35 in 15″.

3 34. Iniezione di gr. 0,08 di cocaina nella giugulare.

3 35. » 40°, 45. Polso 30 in 15″.

3 36. Iniezione di gr. 0,04 di cocaina nella giugulare.

3 40. » 40°, 50. L'animale apre e chiude le palpebre; muove la bocca, dando dei leggeri colpi sul naso col manico di un bistori chiude le palpebre.

3 45. » 40° 55. Polso 27 in 15″. I riflessi rotulei sono esagerati; l'animale è molto sensibile nel treno posteriore; salivazione abbondante.

3 54. » 40° 40. Contrazioni tetaniche delle estremità anteriori che durano pochi secondi.

4 00. » 40°, 45

4 7. » 40°, 25. Polso 42 in 15″.

4 20. » 40°, 20.

All'autopsia si constata che il taglio del midollo è completo.

Questa esperienza ci dimostra che dopo il taglio del midollo allungato la cocaina è ancora capace di produrre un aumento della temperatura. Prendendo come punto di partenza la temperatura del cane prima dell'operazione vi fu un aumento di 0°, 85 in circa 25 minuti, e dopo un'ora dal taglio del midollo la temperatura del retto era ancora 40° 20 malgrado la respirazione artificiale. Dobbiamo pure tener calcolo che la temperatura iniziale di 39° 70 è superiore al normale, perchè il cane si era riscaldato per l'eccitamento psichico del sentirsi legare. Col taglio del midollo cessò questa causa di eccitamento, e ciò nulla meno la temperatura si mantenne elevata invece di scendere. Per farci un giusto concetto della potenza termica della cocaina, dobbiamo considerare che dopo il taglio del midollo il cane si conservò immobile;

le deboli contrazioni che si produssero spontaneamente non possono certo aver modificato sensibilmente la produzione di calore. È questa una conferma della conclusione alla quale ero giunto colle mie antecedenti esperienze (1), che cioè nell'organismo può svilupparsi una somma considerevole di calore senza che vi prenda parte la contrazione dei muscoli, e che nel midollo vi sono dei centri termici.

Per decidere se in queste esperienze si tratti di una reale produzione di calore, o non piuttosto di una semplice diminuzione della perdita di calore per una azione della cocaina nei vasi sanguigni, ho tenuto calcolo della pressione sanguigna e dello stato della circolazione periferica; ma non ho fatto fino ad ora le esperienze calorimetriche che sole possono risolvere definitivamente tale dubbio.

### *Applicazioni terapeutiche della cocaina.*

Dopo aver osservato che la cocaina agisce sul midollo e sul cervello producendo un'attività maggiore dei centri nervosi, ho voluto tentare se questo rimedio poteva impiegarsi come eccitante nei casi in cui erano molto depresse le funzioni dell'organismo. Non ho fatto delle osservazioni sull'uomo, e trattandosi di ricerche preliminari dovetti limitarmi ad esperimenti sugli animali; spero che i clinici vista l'efficacia incontrastabile della cocaina come eccitante vorranno servirsene a preferenza di altri rimedî ora in uso, che sono pochi sicuri. Feci le prove sui cani che o per malattie spontanee o per operazioni subite si trovavano in condizioni gravi con abbassamento della temperatura, prostrazione della forza e diminuzione della sensibilità.

I risultati che mi diedero questi esperimenti furono così favorevoli che io non esito di affermare che la cocaina è uno dei migliori eccitanti che si conoscano — Per dimostrare questa affermazione riferisco una esperienza.

### *Esperienza XX. — 3 aprile.*

Un cane del peso di 10250 gr., il quale due mesi fa aveva subito una trapanazione del cranio con lesione dell'emisfero destro nella parte corticale per studî sui centri termici, era completamente guarito. Dopo che fu lasciato in cantina cogli altri animali cominciò a deperire rapidamente ed il 9 aprile fu portato nel laboratorio dall'inserviente in uno stato di grande magrezza e così stremato di forze che non poteva più reggersi sulle gambe, rifiutò il pane e anche il latte. Esso aveva una temperatura nel retto di 32° centigradi, il polso debolissimo dava 96 pulsazioni al minuto, e solo 7 movimenti respiratorî assai superficiali.

Vedendo l'animale in condizioni così gravi mi decido a provare su di lui l'azione eccitante della cocaina. L'animale essendo insensibile al dolore, gli preparo, senza legarlo, la vena giugulare per misurare la temperatura del sangue venoso. I tessuti erano pallidi e freddi, la circolazione languente al punto che dai vasi della pelle non uscì una gocciola di sangue; sembrava si operasse sopra un cadavere. Si introduce il termometro nella giugulare fino in prossimità del cuore.

| | Temperatura del sangue venoso | |
|---|---|---|
| 2h 2′. | 32°, 20. | Si prepara la vena safena. |
| » 5 | 32°, 30. | |

(1) U. Mosso, *Influenza del sistema nervoso sulla temperatura animale.* Giornale della R. Accad. di Medicina di Torino n. 10, 11, 12, pag. 851 anno 1885.

2h 9 32°, 40.
» 10 32°, 50.
» 16 32°, 60.
» 17 32°, 60. Iniezione di 0,10 di cocaina nella safena.
» 19 32°, 65. Respirazioni più profonde di prima 16 al minuto. Lo stato dell' animale migliora rapidamente, si agita e grida.
2 29 32°, 70.
2 32 32°, 85. L'animale si muove continuamente, il cuore batte più forte, pupilla molto dilatata.
2 36 33°, 10. Sensibile al dolore, abbondante schiuma alla bocca, respirazione frequente più del normale.
2 42 33°, 40.
2 52 33°, 60. Emette dell'orina leggermente alcalina.
3 2 33°, 70.
3 11 34°, 120 pulsazioni al minuto, 20 respirazioni.
3 20 34°, 50.
3 34 34°, 75. 124 pulsazioni al minuto ad ogni 15″, agita le gambe facendo dei movimenti come se volesse camminare.
3 42 34°, 90.
3 52 35°, 10. È sempre slegato; guaisce più forte e lo si tiene colle mani sul tavolo.
4 30 35°, 90.
4 40 36°, 20. Continua a muoversi collo stesso ritmo 15 o 16 volte al minuto.
4 50 36°, 40.
5 36°, 55.
5 5 36°, 65.
5 16 36°, 80. I movimenti sono più rari, le contrazioni delle estremità si succedono meno frequentemente.
5 25 36° 90.
5 30 37°,
5 40 37°, 10. Si prende la temperatura nel retto con un altro termometro, e questo segna 37°, 30; si leva il termometro dalla giugulare e si mette l'animale in terra.

Temperatura rettale

5 42 37°, 30. Il cane si regge bene sulle gambe e cammina; non ha più l'aspetto sofferente di prima, però barcolla come se fosse ubbriaco. Gli offro un pezzo di grasso che mangia volentieri.
6 20 36°, 70. Dopo essersi riposato, mangia con avidità una buona porzione di grasso e beve del latte; 118 pulsazioni al minuto e 16 respirazioni.
7 36°, 50. Si alza spontaneamente e cammina.
8 37°, 50. L' animale ha defecato una sostanza poltacea nera. 116 pulsazioni e 14 respirazioni al minuto.
10 10 37°, Gira per la stanza e mangia alcune ossa. 110 pulsazioni, 12 respirazioni al minuto.

## *10 aprile.*

7 a. 37°, 70. Durante la notte ha defecato poca sostanza poltacea bianca: orine leggermente acide non contengono albumina, rifiuta il pane, mangia volentieri carne, grasso e latte.
2 15 38°, 30. Polso 120; respirazioni 11 al minuto.
8 10 38°, 30.

## *11 aprile.*

10 a. 38°, 50. Subito dopo mangia del pane inzuppato nell'acqua ed ha buon appetito; passeggia spontaneamente nella stanza interessandosi a tutto e mi segue senza chiamarlo nelle stanze del laboratorio restandomi vicino. Nei giorni successivi migliorò

rapidamente e dopo 10 giorni aveva l'aspetto di un cane normale, eccettuato la lesione del cranio dove si vedeva una leggera depressione quantunque la breccia si fosse chiusa con una cicatrice resistente.

Ho fatto altre esperienze analoghe, ma credo che basti questa sola osservazione per dimostrare che la cocaina avrà in questo riguardo delle utili applicazioni terapeutiche. Quando il sistema nervoso si trovava in uno stato di grande debolezza, la circolazione languente, tardo il respiro, diminuita la temperatura dell'organismo e tutto accennava che era vicina la morte, la cocaina mi diede dei risultati così sorprendenti che non posso dubitare siano per aversi dei grandi vantaggi anche nell'uomo, quando in uno stato di profonda depressione dell'organismo si tratti di produrre un eccitamento durevole del sistema nervoso e di ravvivarne le forze.

*La cocaina e i suoi antagonisti.*

La cocaina troverà ugualmente una applicazione come rimedio eccitante negli avvelenamenti per i narcotici. Abbiamo veduto che gli effetti caratteristici della cocaina sono l'azione eccitante sui centri psichici e motori, l'aumento di frequenza del respiro e dei battiti cardiaci, e la maggiore attività chimica dei tessuti.

Per dosi non elevate si può affermare che la cocaina si trova in completo antagonismo col cloralio, il quale diminuisce l'eccitabilità dei centri nervosi psichici e motori, l'energia del cuore e del respiro, abbassa la temperatura, e paralizza i vasi sanguigni.

Quando un animale riceve una dose mortale di cloralio ed è profondamente addormentato, basta iniettare una dose di cocaina di 0,01 al 0,02 per chilogr. perchè in pochi minuti il sopore diventi meno profondo, aumenti la frequenza del respiro, e dei battiti cardiaci, e l'animale si svegli.

Devo però subito avvertire che il cloralio non agisce con uguale intensità su tutte le funzioni sopra le quali agisce la cocaina; e benchè il cloralio e la cocaina si possano considerare come due degli antagonisti più completi che attualmente si conoscano, non si elidono però in tutto.

Nel capitolo sulla respirazione ho già detto che mi servii del cloralio per eliminare le convulsioni; ed abbiamo veduto che il cloralio lasciava persistere l'azione della cocaina sui centri respiratorî, mentre rendeva completamente immobile l'animale.

Non è questo semplicemente un fatto che dipenda dalle dosi, ma si tratta qui di un'azione fisiologica e direi quasi di una predilezione di queste sostanze, che agiscono con maggior energia sopra certe funzioni del sistema nervoso anche per dosi non troppo elevate.

Infatti ho già dimostrato in un mio precedente lavoro che il cloralio ha un'azione deprimente sui centri termici, che la cocaina non riesce a sospendere anche quando venga amministrata a dosi elevate. Questo potere termico della cocaina (che è certo la sua azione più caratteristica perchè abbiamo veduto qualche volta elevarsi la temperatura di 4 gradi in circa mezz'ora) sarebbe paralizzato per dosi anche moderate di cloralio.

La cosa più interessante in questo studio dell'antagonismo fra due sostanze si è

che l'animale per azione della cocaina può svegliarsi dal sonno cloralico, la respirazione divenire più attiva, dilatarsi la pupilla agitarsi e divenire sensibile, senza che si sospenda contemporaneamente la diminuzione della temperatura prodotta dal cloralio. Vi sarebbe dunque come una graduazione nell'intensità dei fenomeni di avvelenamento, la cocaina sarebbe capace d'impedire il sonno, di accelerare il respiro, ed i battiti cardiaci, di produrre le colvulsioni, dilatare la pupilla, costringere i vasi, produrre schiuma nella bocca, ma non riuscirebbe ad aumentare i processi termici dell'organismo quando vi esiste già il cloralio.

Nei cani avvelenati con cloralio si possono somministrare dosi fortissime di cocaina senza che essi soccombano immediatamente.

Riferisco un'esperienza in proposito per sommi capi.

*Esperienza XXI. — 24 febbraio.*

Cane del peso di 6630 gr.; gli inietto successivamente dalle ore 10 22′ alle 11 18′ quattro grammi di cloralio nella safena; la temperatura da 38°, 40 che era in principio, alle ore 11 30 è solo 36°, 20; il respiro lento e debole il cuore. Alle ore 11 42′ l'animale è profondamente insensibile; inietto 0,10 di cocaina; la temperatura continua ad abbassarsi. Alle ore 12 è già discesa a 35°, 55; il respiro diviene più frequente, e più celere il polso; il cane comincia a gemere e poco per volta a gridare più forte finchè si sveglia e grida.

12′ 30ʰ. Temperatura 35°, 10. L'animale è insensibile; reagisce e grida per ogni leggero dolore.
12 44. Temperatura 34°, 90. Completamente sveglio grida forte e si agita.
12 50. Cloralio 1 gr.
1 7. Cloralio 0,5 gr. Dopo questa amministrazione di cloralio rimane profondamente assopito e insensibile anche per forti eccitamenti. Respirazione lenta e superficiale.
1 22. Temperatura 34°, 88. Si inietta 0,12 di cocaina.
1 58. Vedendo che la temperatura scende continuamente e che è già 34°, 42 gli amministro 0,08 gr. di cocaina. Poco dopo l'animale si sveglia e grida.
2 10. Per calmarlo devo nuovamente amministrargli 1 gr. di cloralio.
2 12. È già profondamente addormentato.
2 40. Continua il sonno profondo.
2 45. Temperatura 34°, 00. Vedendo che non accennava a svegliarsi e che era profondamente insensibile gli amministro 0,12 di cocaina. Il respiro diviene superficiale e più rapido e poi cessa: il cuore continua a battere debolissimo e dopo l'animale muore.

Da questa esperienza risulta che la cocaina ed il cloralio si elidono nei loro effetti: e che una dose di 0,046 per chilogr. di cocaina è completamente paralizzata e resa inattiva da una dose di gr. 1,5 di cloralio per chilogrammo.

Quando un cane è avvelenato col cloralio bisogna essere cauti nell'amministrare la cocaina nelle vene: se le dosi sono forti, come fu in questo caso, si arresta il respiro e l'animale muore. La depressione prodotta dal cloralio nei centri nervosi rende più grave e spesso mortale lo sconcerto che produce la cocaina nel primo momento della sua azione. Questo fatto l'ho veduto ripetersi in parecchi cani che sono morti per dosi di 0,02 di cocaina per chilogr., quando non ho fatto la respirazione artificiale per dar tempo all'animale di superare questo pericolo della morte per un arresto del respiro che di sua natura è solo momentaneo.

Le dosi mortali di cloralio vengono tollerate quando si fa precedere la cocaina, come potrei dimostrare con parecchie esperienze che tralascio per brevità.

*Cloroformio ed etere.*

Due altri farmaci antagonisti della cocaina sono il cloroformio e l'etere, perchè essi sospendono le convulsioni prodotte dalla cocaina e rallentano la frequenza dei movimenti respiratorî e dei battiti cardiaci. Il cloroformio e l'etere riescono pure a diminuire la temperatura dell'organismo quando si prolunghi la loro azione; ma nelle esperienze che ho fatto in proposito fu meno evidente quest'azione antagonista, perchè io mi limitavo a far cessare le convulsioni della cocaina senza prolungare l'azione del cloroformio o dell'etere fino ad ottenere un abbassamento considerevole della temperatura.

Un cane al quale amministrai successivamente 0,042 gr. di cocaina per chilogr., e che presentò nel principio un accesso fortissimo di convulsioni tale che io credevo soccombesse per arresto del respiro, sono riuscito a salvarlo e mantenerlo definitivamente in vita per mezzo del cloroformio. Ripetendo le inalazioni di cloroformio appena comparivano i primi sintomi delle contrazioni muscolari che precedono le convulsioni, e continuando per circa un'ora e mezzo l'animale ebbe tempo di eliminare la cocaina, e si salvò.

Queste esperienze mi hanno convinto che se occorresse di prestare soccorso ad un uomo avvelenato con la cocaina si debba ricorrere immediatamente al cloroformio o all'etere per impedire il tetano e la paralisi successiva dei muscoli respiratorî che è la causa più grave e più frequente della morte. Passato il primo pericolo che è il più grave si può dopo amministrare il cloralio. Nel caso che si arrestasse il respiro si deve immediatamente ricorrere alla respirazione artificiale.

Nei casi di avvelenamento col cloralio, coll'oppio, colla morfina, col laudano e con qualunque sostanza narcotica che produca una depressione profonda dei centri nervosi del respiro e del cuore si deve amministrare la cocaina. Io credo che questo farmaco potrà somministrarsi con successo non solo quando si tratta di avvelenamenti acuti con narcotici, ma anche quando vi sono dei fenomeni di paralisi, dovuti ad un indebolimento dell'attività del midollo, come nei casi di ammalati che dopo l'uso prolungato del bromuro di potassio o del cloralio si trovano in uno stato di grande prostrazione delle forze. Riepilogando dirò che confido la cocaina sia destinata a sostituire la stricnina in tutte le sue applicazioni terapeutiche, perchè essa ha la medesima azione, mentre è meno velenosa della stricnina.

# RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni, nella seduta del 5 dicembre 1886, sopra la Memoria del prof. Augusto Righi, intitolata : *Ricerche sperimentali intorno alla riflessione della luce polarizzata sulla superficie equatoriale d'una calamita.*

« Questa Memoria fa seguito ad altre due del medesimo autore che furono inserite negli Atti accademici. Mentre nelle prime l'autore aveva esaminato quel che avviene del raggio polarizzato incidente sul polo di una calamita riflettente, in questa egli esamina i fenomeni complessi che avvengono, quando lo specchio d' acciajo riflettente è parallelo alle linee di forza del campo magnetico, nel quale è collocato.

« Questi fenomeni erano stati già in parte studiati da Kerr, a cui si deve la prima scoperta dei fatti qui in parola, e da Kundt. L'autore rinforza e perfeziona notevolmente il metodo da essi adoperato, e con una bella serie di esperienze giunge a risultati parte nuovi, parte in appoggio di quelli già da altri descritti.

« Il presente lavoro costituisce una contribuzione interessante allo studio di questi fenomeni, e per il metodo adoperato e per i risultati ottenuti merita di essere pubblicato.

« I commissarî propongono quindi l'inserzione integrale della presente Memoria negli Atti accademici ».

# Ricerche sperimentali intorno alla riflessione della luce polarizzata sulla superficie equatoriale d' una calamita.

Memoria di AUGUSTO RIGHI.

## CAPO I.

### Riassunto dei lavori di Kerr e di Kundt.

1. *Esperienze di Kerr.* Dopo aver studiato i fenomeni prodotti nella riflessione sul polo d' una calamita [1], tanto coll'esperienza che con una teoria appropriata, ho intrapreso lo studio di quelli che hanno luogo allorquando lo specchio d' acciaio riflettente è parallelo alle linee di forza del campo magnetico nel quale è collocato. Il presente mio lavoro su questo soggetto è d' indole affatto sperimentale, non sembrandomi possibile, per ragioni svolte altrove, l'estendere a questo caso la teoria da me sviluppata per spiegare i fenomeni proprî della riflessione sul polo.

Le prime ricerche sull'attuale argomento furono fatte dal sig. Kerr, che ne fece oggetto di studio dopo che ebbe scoperti ed esaminati i fenomeni dovuti alla riflessione polare [2].

I risultati di Kerr si possono riassumere così:

1° Se il piano d'incidenza della luce è perpendicolare alle linee di forza, non si osserva nessun cambiamento percettibile nel raggio riflesso, all'istante della magnetizzazione.

2° Nessun effetto si ottiene del pari, se il raggio cade normalmente sullo specchio.

3° Se l'incidenza è obbliqua, ed il piano d' incidenza è parallelo alle linee di forza, e se dopo di avere orientato il polarizzatore in guisa da dare vibrazioni dirette secondo uno dei due azimut principali (cioè rese o parallele o perpendicolari al piano d' incidenza), e di avere girato l'analizzatore sino all'estinzione, si chiude il circuito della corrente magnetizzante, vedesi apparire della luce nel campo dell'analizzatore. Girandolo opportunamente, la luce può di nuovo estinguersi, od almeno ridursi al minimo, e questa rotazione dell'analizzatore è in senso contrario della corrente magnetizzante, eccettuato il caso in cui le vibrazioni incidenti sieno nel piano

[1] Memorie della r. Accademia dei Lincei, serie 4ª, vol. I e III. — Ann. de Ch. et de Phys. 1885 et 1886.

[2] Phil. Mag. march 1878, p. 161.

d'incidenza, e l'incidenza sia compresa fra 0° e 75°, nel qual caso la rotazione dell'analizzatore, che rende minima la luce, è nel senso stesso della corrente.

4° Invece di compensare l'azione magnetica girando l'analizzatore, si può rendere minima la luce apparsa nell'atto della magnetizzazione girando il polarizzatore. Allora la rotazione si deve fare generalmente nel senso della corrente, salvo il caso in cui le vibrazioni incidenti sieno perpendicolari al piano d'incidenza, e l'incidenza sia compresa fra 0° e 75°, nel qual caso la rotazione del polarizzatore deve farsi in senso opposto della corrente.

Veramente il Kerr enuncia i suoi risultati in termini un poco diversi. Siccome egli mise in opera forze magnetiche piuttosto deboli, ed una luce poco intensa, gli effetti che ottenne furono debolissimi, ed anzi è degno di ammirazione per essere giunto ad onta di ciò a risultati generalmente esatti. Ma per rendere palese l'influenza della magnetizzazione era costretto, non già a compensare l'effetto di essa con un' adeguata rotazione di uno dei due nicol, ma bensì a spostare dapprima di una piccolissima quantità uno di essi in un dato senso, e vedere se la luce cresceva o calava chiudendo il circuito in un senso determinato. Perciò anzichè dire, per esempio, che la rotazione dell'analizzatore è in generale di senso opposto alla corrente, egli dice che una piccola rotazione dell'analizzatore in un dato senso, *cospira* in generale coll'azione d' una corrente di senso eguale, ecc.

È indispensabile il bene intendersi relativamente alle direzioni delle rotazioni dei due nicol, ed alla direzione della corrente magnetizzante. Adotteremo per ciò le stesse convenzioni del Kerr.

Sia $S_1 S_2$ la superficie speculare d'acciaio o di ferro, $R_1$, $R_2$, i rocchetti che percorsi poi da una corrente magnetizzano $S_1 S_2$. Sia A B il raggio incidente, B C il raggio riflesso, $N_1$ il nicol polarizzatore, $N_2$ l'analizzatore.

Supporremo sempre di osservare la rotazione di $N_1$ stando in B e guardando da B verso A, e quella di $N_2$ stando in C e guardando verso B. La direzione della corrente nei rocchetti si supporrà poi osservata stando in un punto O, posto dalla parte dell'analizzatore, e guardando verso i rocchetti nella direzione del loro asse.

Come si vede, queste convenzioni sono le stesse da me adottate in altra Memoria [1] (data alle stampe in pari tempo della presente), allorquando ho studiato gli analoghi fenomeni che si producono quando invece dello specchio $S_1 S_2$, venga messa fra i poli della elettrocalamita una lastra trasparente a faccie parallele, nella seconda superficie della quale si rifletta internamente la luce, il che faciliterà il confronto che dovremo fare fra i due ordini di fenomeni.

Secondo i resultati di Kerr, la rotazione compensatrice dell'analizzatore s'inverte all'incidenza principale (circa 75°), quando le vibrazioni sul raggio incidente giacciono nel piano d'incidenza, e quella del polarizzatore alla stessa incidenza quando le vibrazioni incidenti sono dirette nell'altro azimut principale. Nei due casi a 75° la rotazione è nulla. Essa è del pari nulla in tutti i casi quando l'incidenza è zero o 90°. Alle incidenze intermedie le rotazioni variano passando per uno o due massimi, uno dei quali, secondo Kerr, ha luogo sempre all'incidenza di 60°.

[1] *Studî sulla polarizzazione rotatoria magnetica.* Memorie della r. Accademia di Bologna, 1886-87.

2. *Esperienze di Kundt.* Il sig. Kundt (1) ha fatto esso pure qualche esperienza sul fenomeno di Kerr pel caso della superficie riflettente equatoriale.

I suoi risultati concordano con quelli del Kerr, in quanto ai segni delle rotazioni dell'analizzatore. Quanto a quelle del polarizzatore, il Kundt mai ne ha fatto uso.

L'inversione del senso di rotazione dell'analizzatore avviene, secondo il Kundt, non a 75°, ma fra 80° ed 82°.

Dopo ciò il Kundt, volendo trovare una qualche spiegazione dei fenomeni di Kerr, fa delle esperienze sostituendo allo specchio di ferro una lastra di vetro, nella quale il raggio polarizzato entra per una faccia obbliquamente, si riflette internamente sulla seconda faccia, ed esce dalla prima, passando poi per l'analizzatore. Egli trova rotazioni dell'analizzatore che sono per ogni incidenza nel senso della corrente, eccettuato il caso in cui le vibrazioni incidenti giacciano nel piano d'incidenza, e questa sia compresa fra 0° e quella di polarizzazione. In una parola, gli effetti sono esattamente di senso contrario che col ferro, benchè tanto questo che il vetro facciano girare per trasmissione le vibrazioni nel senso della corrente.

I risultati ottenuti dal Kundt colla luce riflessa dalla seconda superficie del vetro, corrispondono perfettamente a quelli da me recentemente ottenuti nelle stesse condizioni, e sui quali avrò più oltre occasione d' intrattenermi, appunto per esaminare fino a qual limite esiste un' analogia fra i fenomeni prodotti col ferro e quelli ottenuti dal vetro, posti nel campo magnetico.

## CAPO II.

### Apparecchio e misure.

3. *Descrizione dell'apparecchio adoperato.* All'epoca in cui ho fatto le esperienze che devo narrare, l'elettrocalamita descritta nel § 1 della mia Memoria citata, era ancora in costruzione. Perciò adoperai invece l'ordinaria elettrocalamita del Ruhmkorff, applicando ad essa dei pezzi polari di ferro dolce, di forma appropriata allo scopo che volevo ottenere. Questi pezzi polari furono costruiti in vista di evitare piccoli spostamenti angolari dello specchietto d'acciaio, che avvengono facilmente nell'atto di chiudere o d' interrompere il circuito dell'elettrocalamita, come pure in vista di poter far riflettere sullo specchio la luce sotto tutte le incidenze comprese fra 0° e 90°.

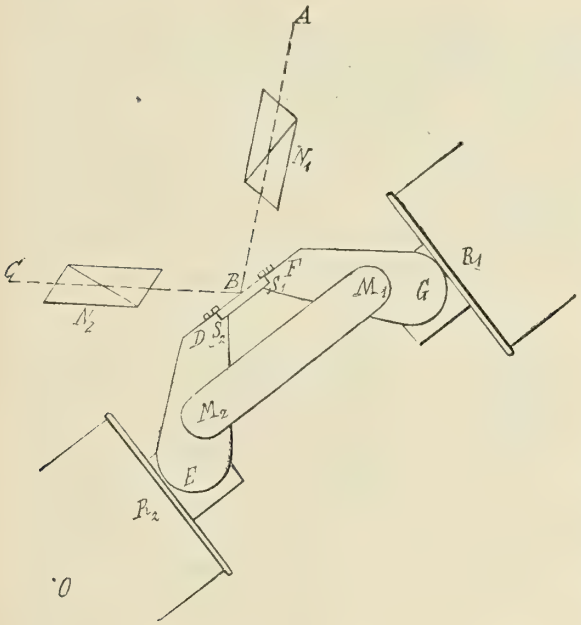
Ai poli dei rocchetti furono avvitati quei due pezzi di ferro dolce, aventi superiormente una faccia piana orizzontale, che servono d'ordinario per mostrare i fenomeni magnetici e diamagnetici nei liquidi. Sulle dette faccie piane collocai due grosse piastre di ferro dolce DE, FG, che avevano appartenuto ad un antico apparecchio in disuso, e le fissai in E e G saldamente con due morsetti. Le due piastre erano state congiunte invariabilmente per mezzo d' una grossa lastra d' ottone $M_1 M_2$ saldata su di esse a stagno.

Come mostra la figura, le estremità delle due piastre di ferro, sporgono lateralmente sui rocchetti, e terminano con due faccie piane verticali, in prolungamento l'una

(1) Wied. Ann. 1884, n. 10.

dell'altra e parallele all'asse dei rocchetti. Lo specchio d'acciaio $S_1 S_2$ è incastrato fra di esse, e fissato con quattro viti d'ottone a larga testa, due in alto e due in basso, in modo che il piano della faccia riflettente sporga appena dal piano delle faccie terminali D ed F delle due piastre.

In tal modo lo specchio, al passaggio della corrente nei rocchetti, si magnetizzerà fortemente, e la faccia riflettente sarà parallela alla direzione della magnetizzazione. Su di essa si potrà liberamente far riflettere un raggio luminoso, sotto tutte le incidenze comprese fra 0° e 90°, ed evidentemente nessun spostamento dello specchio sarà a temersi, al momento in cui il circuito viene chiuso od aperto.




Tutto l' apparecchio fu posto sul tavolo circolare graduato e munito di nonnio, che serve di sostegno alla mia elettrocalamita universale descritta nel lavoro citato in precedenza. La faccia riflettente dello specchio era sul prolungamento dell'asse di rotazione del tavolo, e perciò l'angolo d'incidenza veniva letto sulla graduazione del tavolo girevole.

Un nicol, mobile al centro d'un circolo graduato verticale, collocato sulla mensola del tavolo sulla quale trovasi il nonnio, serviva da polarizzatore. Un' altro nicol, munito di cannocchiale e mobile esso pure al centro d' un circolo graduato verticale, veniva posto saldamente sopra un tavolo indipendente e serviva da analizzatore. I due nicol portavano un nonnio col quale si otteneva la misura dei minuti di grado.

Infine, quasi sempre un vetro rosso era posto davanti al polarizzatore. La luce adoperata fu sempre quella del sole, riflessa in direzione orizzontale da un eliostata di Silbermann.

4. *Preparazione delle esperienze.* Per collocare a dovere le varie parti dell'apparecchio, adottai il metodo seguente.

Reso perfettamente verticale l'asse di rotazione del tavolo circolare, e perfettamente orizzontale il fascio di raggi solari riflesso dall'eliostata (1), ridussi ben verticale lo specchio (ponendolo inoltre in posizione tale da trovarsi sensibilmente sul prolungamento dell' asse di rotazione del tavolo), introducendo dei cunei di

(1) Per rendere orizzontale la luce riflessa dall'eliostata, adoperai un regolo metallico, lungo quasi un metro, portante alle sue estremità due lastrine d'ottone ad esso perpendicolari, munite di aperture eguali ed egualmente alte sul regolo. Quest'ultimo con un livello a bolla d'aria veniva posto orizzontalmente, e si collocava lo specchio dell'eliostata in modo che i raggi solari, passati per l'apertura di una delle lastrine, andassero, per così dire, a passare tutti per l'apertura dell'altra.

legno duro sotto i piedi dell' elettrocalamita. Per raggiungere questo scopo, girai il tavolo finchè la luce uscente dal polarizzatore e riflessa dallo specchio, illuminasse il disco del polarizzatore stesso in un punto posto nello stesso piano verticale dell'apertura del nicol. Per mezzo dei cunei posti sotto i piedi della elettrocalamita si faceva poi coincidere questa regione illuminata dalla luce riflessa sullo specchio, coll'apertura stessa del nicol. Allora lo specchio era certamente verticale, e l'incidenza era di certo normale. Si spostava allora il nonnio sul suo sostegno finchè il suo zero coincidesse collo zero della graduazione, e lo si fissava in questa posizione. Girando allora il tavolo, lo spostamento di questo misurato col nonnio, dava tosto l'angolo d'incidenza della luce sullo specchio.

Ciò fatto, bisognava orientare convenientemente il polarizzatore e l'analizzatore. Dato perciò all' angolo d'incidenza della luce sullo specchio un valore conveniente, per esempio 60°, e ricevuto il raggio riflesso nell'analizzatore, col cannocchiale del quale si osservava la piccola apertura circolare ($3^{mm}$) da cui usciva la luce del polarizzatore, si orientava quest'ultimo ad occhio in modo da dare approssimativamente vibrazioni o orizzontali o verticali, e quindi si rendeva minima la luce girando alternativamente l'analizzatore ed il polarizzatore, fino a trovare pei due nicol orientazioni tali, che la luce crescesse, spostando appena uno qualunque dei due nicol in un senso qualunque.

Siccome però lo specchio conservava, dopo il passaggio della corrente, un certo grado di magnetismo permanente, così, eseguite le descritte operazioni, s'inviava una corrente inversa per un momento nella elettrocalamita, poi si ripetevano le operazioni stesse. La posizione media fra le due raggiunte col polarizzatore alla fine delle due serie di operazioni, era quella che dava vibrazioni esattamente orizzontali o verticali.

Similmente, la posizione dell'analizzatore, media fra le due trovate, era quella nella quale il piano della sua sezione principale era esattamente verticale od orizzontale.

Come si vede, il metodo adoperato non è che quello da me altrove descritto (1).

Qui però esso non era giustificato, giacchè nell'atto in cui cominciai le nuove ricerche, non potevo sapere se esso conducesse a determinazioni esatte anche nel caso della riflessione sulla superficie equatoriale. Devo però far notare che nel caso attuale le due orientazioni dei nicol trovate alla fine delle due serie di operazioni, erano sempre quasi identiche, differendo solo in generale di appena 1′, per cui l'errore che potevo commettere era certo dell'ordine di grandezza dell' errore probabile delle misure. Di più i risultati che ottenni furono sempre regolari e concordanti.

Una volta trovate le orientazioni principali del polarizzatore operando all'incidenza di 60°, esse dovevano naturalmente valere anche per tutte le altre incidenze. Però, per le incidenze di media grandezza, colle quali soltanto le descritte operazioni sono suscettibili di grande precisione, preferii ripeterle ogni volta che il valore dell'incidenza veniva cambiato.

Quando così non facevo, e l'incidenza veniva cambiata, siccome bisognava mutar posto al tavolino sul quale era collocato l'analizzatore, diveniva evidentemente necessario

(1) V. le due Memorie citate al principio di questo scritto.

determinare da capo le orientazioni principali di questo. Par far ciò, davo al polarizzatore una delle due orientazioni principali, e cioè lo collocavo in modo da dare vibrazioni, per esempio, orizzontali e quindi nel piano d' incidenza, poi chiuso il circuito in un senso e nell'altro alternativamente, giravo ogni volta l'analizzatore sino a rendere minima la luce. La media delle due posizioni trovate era evidentemente quella che avrebbe dato l'estinzione, se lo specchio si fosse trovato affatto privo di calamitazione.

Il vetro rosso posto davanti al polarizzatore, evitava le traccie di colorazione che appariscono operando con luce bianca. Colla luce rossa poi, i fenomeni sono più intensi che colle altre luci semplici, poichè anche nel caso attuale esiste una dispersione anomala. Questa fu constatata mediante esperienze fatte con luci spettrali. A questo scopo un prisma a visione diretta veniva collocato fra l'eliostata, che in tal caso era seguìto da una fenditura verticale, ed il polarizzatore.

Infine, si aspettava qualche tempo dopo che le 12 coppie Bunsen adoperate si erano allestite, onde la corrente avesse acquistata una intensità abbastanza costante.

5. *Maniera di far le misure.* Una volta orientati a dovere i due nicol, per un dato valore dell'angolo d'incidenza, misuravo colla massima possibile precisione otto angoli, e cioè:

*a*) L'angolo $\omega_1$ del quale deve girarsi l'analizzatore, per rendere minima la luce, mentre il polarizzatore fornisce vibrazioni nel piano d'incidenza, e quindi orizzontali, e quando l'analizzatore ha inizialmente la sua sezione principale diretta verticalmente, cioè quando è dapprima posto in quella posizione che collo specchio privo di magnetismo darebbe l'estinzione perfetta.

*b*) L'angolo $\omega_2$ del quale devesi girare il polarizzatore per render minima la luce nel campo dell'analizzatore, partendo dalle medesime posizioni iniziali dei due nicol.

*c*) L'angolo $\omega'_1$ del quale va girato l'analizzatore onde rendere minima la luce, quando le vibrazioni incidenti sono verticali, e l'analizzatore ha inizialmente la sua sezione principale diretta orizzontalmente.

*d*) L'angolo $\omega'_2$ del quale va girato il polarizzatore per rendere minima la luce, a partire dalle posizioni iniziali che avevano i nicol nel caso precedente.

*e*) L'angolo $\alpha_0$, e

*f*) l'angolo $\alpha$, dei quali devono girarsi rispettivamente il polarizzatore e l'analizzatore onde raggiungere l'estinzione, partendo dalle stesse orientazioni iniziali dei due nicol come in *a*) e *b*).

*g*) L'angolo $\beta_0$, e

*h*) l'angolo $\beta$, analoghi ai precedenti, ma partendo dalle stesse orientazioni iniziali dei due nicol come in *c*) e *d*).

Gli angoli $\alpha_0$ ed $\alpha$ si ottenevano girando alternativamente i due nicol fino al minimo, e continuando finchè si raggiungesse una posizione tale, che la luce aumentasse ad ogni più lieve spostamento d' uno qualunque dei nicol in un senso qualunque. Lo stesso dicasi per $\beta_0$, $\beta$.

Raggiunte queste orientazioni dei due nicol, per le quali ogni spostamento d' uno di essi fa aumentare la luce, le vibrazioni incidenti sullo specchio hanno orientazione tale che il raggio riflesso ha vibrazioni rettilinee e non elittiche.

Questi ultimi quattro angoli non si possono ottenere con qualche esattezza che alle incidenze medie, mentre alle incidenze piccole ed a quelle prossime a 90° la misura di essi è difficilissima od anche impossibile.

Come si vede, gli angoli misurati ed il modo di fare le misure, sono identici a quelli indicati nelle mie due precedenti Memorie relative al fenomeno di Kerr. Allora però non parlai esplicitamente di $\omega'_1$ ed $\omega'_2$ che in occasione delle prime esperienze, perchè in virtù della legge di reciprocità erano sempre eguali ad $\omega_2$ ed $\omega_1$ rispettivamente.

Come allora, nei risultati tengo nota, non degli angoli $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots$, ma del doppio di questi angoli, quale risulta dall'inversione della corrente. Anzi, per avere la maggior esattezza possibile nelle misure, queste venivano ripetute molte volte, invertendo sempre la corrente, e prendendo la media dei risultati.

Si vede altresì che gli angoli $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$, sono quelli dei quali il Kerr determinò semplicemente il segno nelle sue esperienze, e che $\omega_1, \omega'_1$, sono i due, che soli misurò il Kundt nelle sue.

## CAPO III.

### Risultati delle esperienze.

6. *Misure di* $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$. Nella tavola seguente ho registrate le misure di questi quattro angoli, fatte a diverse incidenze.

| Incidenza | $2\omega_1$ ossia doppia rotazione dell'analizzatore con vibrazioni incidenti orizzontali | $2\omega_2$ ossia doppia rotazione del polarizzatore con vibrazioni incidenti orizzontali | $2\omega'_1$ ossia doppia rotazione dell'analizzatore con vibrazioni incidenti verticali | $2\omega'_2$ ossia doppia rotazione del polarizzatore con vibrazioni incidenti verticali |
|---|---|---|---|---|
| 11° | + 2′,3 | + 2′,7 | — 2′,5 | — 2′,5 |
| 20 | + 4 | + 5 | — 5 | — 4 |
| 30 | + 6, 7 | + 7 | — 6, 6 | — 6, 6 |
| 35 | + 7, 6 | + 7 | | |
| 40 | + 8 | + 7 | — 6, 7 | — 7, 9 |
| 45 | + 9 | + 8 | | |
| 50 | + 10 | + 8, 3 | — 9 | — 10 |
| 55 | + 10, 5 | + 9 | | |
| 60 | + 11 | + 9 | — 9 | — 11 |
| 65 | + 8, 7 | + 8 | | |
| 70 | + 6, 5 | + 8 | — 7, 9 | — 6, 7 |
| 75 | + 4, 5 | + 7 | | |
| 78 54′ | 0 | + 6, 3 | — 6, 7 | 0 |
| 80 | — 1 | + 6 | | |
| 85 | — 3 | + 3 | — 3 | + 3 |

Osservando questa tavola, nella quale il segno + indica una rotazione nel senso

stesso della corrente secondo le convenzioni ammesse, si vede dapprima che i segni delle rotazioni sono precisamente quelli indicati da Kerr, confermati, per ciò che riguarda le rotazioni $\omega_1$ , $\omega'_1$ dell'analizzatore, dal Kundt.

Le mie esperienze si accordano dunque completamente con quelle di Kerr e di Kundt in quanto ai segni delle rotazioni, e con quelle del Kundt anche per l'andamento generale del valore degli angoli $\omega_1$ e $\omega'_1$.

Ma di più si può vedere che sensibilmente si ha

$$\omega_1 = -\omega'_2 \ , \ \omega_2 = -\omega'_1 \ ,$$

e cioè che le rotazioni dell'analizzatore quando le vibrazioni incidenti sono orizzontali o verticali, sono rispettivamente eguali e di segno contrario a quelle del polarizzatore, quando si opera invece con vibrazioni incidenti inizialmente verticali od orizzontali.

Vale dunque anche nel caso della riflessione sulla superficie equatoriale della calamita, quella *legge di reciprocità* che dimostrai e colla teoria e colle esperienze nel caso della riflessione sul polo, se non che si ha nel caso attuale inversione di segni.

È poi a notarsi che il cambiamento di segno di $\omega_1$ (e quindi di $\omega'_2$) avviene ad una incidenza (78° 54′) sensibilmente maggiore dell'incidenza principale (75° o 76°) del ferro non magnetizzato. Secondo Kerr l'inversione avviene a 75°, e secondo Kundt fra 80° ed 82°. Il valore 78° 54′ fu da me determinato a tentativi e colla massima cura. È probabile però che il valore dell'incidenza che dà $\omega_1 = 0$ , dipenda dall'intensità del campo magnetico.

La luce che resta nel campo dell'analizzatore, anche dopo aver girato o l'analizzatore o il polarizzatore sino a renderla minima, è, specialmente alle incidenze lontane da quelle di 0° e di 90°, sensibilmente più intensa, che quando si ottiene la così detta estinzione collo specchio non magnetizzato. La luce riflessa è dunque generalmente elittica, ed il fenomeno non consiste in una semplice rotazione delle vibrazioni. La rotazione compensatrice $\omega_1$ od $\omega'_1$ dell'analizzatore fa conoscere solo l'orientazione degli assi della elisse.

M' ha sembrato poi che l' elitticità sia più pronunciata quando le vibrazioni incidenti sono orizzontali che quando sono verticali, o in altri termini, ho creduto di osservare che la compensazione dell'effetto del magnetismo che si ottiene girando l'analizzatore sia meno perfetto nel primo caso che nel secondo. Ciò è precisamente l'opposto di quanto accade nella riflessione sul polo della calamita.

All'incidenza di 78° 54′, che può dirsi l'*incidenza principale* pel ferro magnetizzato in direzione parallela alla sua superficie, la rotazione dell'analizzatore è zero, se le vibrazioni incidenti sono orizzontali. Tuttavia nell'atto in cui si chiude il circuito, la luce cresce nel campo del cannocchiale. Ciò prova che il raggio riflesso è elittico, ma che l'asse maggiore dell'elisse resta nel piano d'incidenza. In una parola c' è in tal caso elitticità e non rotazione, mentre alle altre incidenze si ha in generale l'uno e l'altro effetto.

I valori dei quattro angoli $\omega_1$ , $\omega_2$ , $\omega_1'$ , $\omega'_2$, crescono dapprima, al crescere dell'incidenza, fino ad un massimo, poi diminuiscono nuovamente, il primo e l'ultimo per cambiar segno e raggiungere un nuovo massimo prima di annullarsi a 90° d'incidenza, il secondo ed il terzo invece, per arrivare al valore zero solo all'incidenza di 90°. Secondo Kerr il massimo valore l'avrebbero le quattro rotazioni all'incidenza di 60°.

Invece dal quadro precedente, come ancora da altre misure che qui non ho riportato, sembra risultare che il massimo di $\omega_1$ ha luogo per una incidenza minore di 60°, e quello di $\omega_2$ per un' incidenza maggiore, che probabilmente non è altro che l'incidenza *singolare* della quale ci occuperemo più oltre.

7. *Confronto fra questi risultati e quelli che si ottengono con un vetro che rifletta colla seconda superficie.* E questo il momento di esaminare da vicino fino a qual grado esista un' analogia fra i fenomeni qui studiati, e quelli che si osservano sostituendo allo specchio di ferro e nella stessa posizione, una lastra di vestro a faccie parallele, e facendo entrare la luce in essa per una faccia, riflettere internamente sulla seconda faccia, ed uscire nuovamente dalla prima.

Confrontiamo perciò i segni delle rotazioni dei due nicol. Nel quadro A ho notati i segni delle rotazioni, quali si deducono dalla tavola data più sopra, e nel quadro B i segni delle rotazioni nel caso del vetro. Questo quadro B è tratto da altro mio lavoro [1], che già ho avuto occasione di citare.

A)

| | Rotazione dell' analizzatore | Rotazione del polarizzatore |
|---|---|---|
| Vibrazioni incidenti nel piano d'incidenza . . . | + per piccole incidenze<br>— » grandi » | + per ogni incidenza |
| Vibrazioni incidenti perpend. al piano d'incidenza | — per ogni incidenza | — per piccole incidenze<br>+ » grandi » |

B)

| | Rotazione dell' analizzatore | Rotazione del polarizzatore |
|---|---|---|
| Vibrazioni incidenti nel piano d'incidenza . . . | — per piccole incidenze<br>+ » grandi » | — per ogni incidenza |
| Vibrazioni incidenti perpend. al piano d'incidenza | + per ogni incidenza | + per piccole incidenze<br>— » grandi » |

Dal confronto di questi due quadri si deduce, che nell'uno i segni sono esattamente opposti che nell'altro, benchè tanto il vetro che il ferro facciano ruotare, per trasmissione, le vibrazioni luminose nel senso della corrente magnetizzante.

Questa opposizione di segni era stata rilevata dallo stesso Kundt, per ciò che riguarda le rotazioni dell'analizzatore; ma ciò non gli impedì di proporre il fenomeno

[1] *Studi sulla polarizzazione rotatoria* ecc.

offerto dal vetro come spiegazione di quello offerto dal ferro, vale a dire di proporre che a spiegare il fenomeno di Kerr si debba ammettere che la luce penetri entro il metallo fino ad una certa profondità, e che appunto per avere attraversato un certo spessore di ferro, le vibrazioni vengano girate e trasformate in ellittiche.

Ma bisogna notare, che mentre nel caso della superficie equatoriale della calamita, al crescere dell'incidenza, le rotazioni $\omega_1$, $\omega'_2$, oltrepassato il massimo decrescono fino ad annullarsi all'incidenza che diciamo ancora *incidenza principale*, per poi cambiare di segno, nel caso invece della lastra trasparente che riflette colla seconda superficie, le rotazioni crescono fino all'incidenza di polarizzazione, raggiungendo il valore di 90° per questa incidenza, dopo di che si mostrano decrescenti e con segni contrarî, il che realmente equivale ad un ulteriore aumento oltre 90° della rotazione nel senso primitivo, giacchè due posizioni dell'analizzatore che differiscano di 180° sono realmente identiche (Vedi *Studî sulla polarizzazione* ecc.).

Benchè esca dal programma annunciato nel titolo di questa Memoria, trovo opportuno istituire un confronto simile fra il ferro ed il vetro che riflette colla seconda superficie, quando l'uno e l'altro sono disposti in modo che le loro faccie sieno, non più parallele, ma perpendicolari alle linee di forza.

Il quadro C è formato dietro i risultati sperimentali esposti nelle Memorie citate al principio di questo scritto, e porge i segni delle rotazioni compensatrici dell'analizzatore e del polarizzatore, nel caso della riflessione sul polo d'una calamita. Il quadro D poi è tratto dalla Memoria citata poc'anzi, ed offre i segni delle rotazioni nel caso di una lastra di vetro, posta sul polo in luogo dello specchio di ferro, la quale rifletta la luce colla sua seconda superficie.

C)

| | Rotazione dell'analizzatore | Rotazione del polarizzatore |
|---|---|---|
| Vibrazioni incidenti nel piano d'incidenza . . . | — per ogni incidenza | — per ogni incidenza |
| Vibrazioni incidenti perpend. al piano d'incidenza | — » » » | — » » » |

D)

| | Rotazione dell'analizzatore | Rotazione del polarizzatore |
|---|---|---|
| Vibrazioni incidenti nel piano d'incidenza . . . | + per piccole incidenze<br>— » grandi » | + per ogni incidenza |
| Vibrazioni incidenti perpend. al piano d'incidenza | + per ogni incidenza | + per piccole incidenze<br>— » grandi » |

Osservando questi due quadri si vede, che mentre nel caso della riflessione su

faccie parallele alle linee di forza, una certa analogia esisteva fra il caso del ferro e quello del vetro che riflette colla sua seconda superficie, nel caso attuale non esiste alcuna analogia, giacchè col ferro mai si invertono le rotazioni dell'analizzatore o del polarizzatore.

È bensì vero che il Kundt, forse appunto guidato dalla sperata analogia, credè di osservare un' inversione nelle rotazioni anche nel caso del ferro; ma operando colle cure più scrupolose ho dovuto persuadermi che tale inversione non esiste.

È giusto però fare anche in questo caso l'osservazione che si è fatta nel caso cui si riferiva il quadro B. E cioè, quando si eseguiscono le esperienze i cui risultati corrispondono al quadro D, vale a dire quando si misurano le rotazioni compensatrici per una lastra trasparente posta perpendicolarmente alle linee di forza, si trova che le due rotazioni che cambiano segno, cominciano col crescere fino a 90° quando l'incidenza cresce da 0° all'incidenza di polarizzazione, e al di là di questa si presentano con segno contrario e decrescenti in valor assoluto.

Queste rotazioni negative possono considerarsi come rotazioni positive maggiori di 90°. Considerate in tal modo il quadro D non diversifica più dal quadro C che per avere i segni tutti contrarî, mentre considerate nello stesso modo le cose in riguardo al quadro B, questo diviene alla sua volta affatto differente dal quadro A. Comunque si considerino dunque le rotazioni che si hanno col vetro alle incidenze superiori a quella di polarizzazione, avviene sempre che o nel caso della lastra perpendicolare alle linee di forza, o in quello della lastra parallela alle linee medesime, il disaccordo coi fenomeni corrispondenti dati dal ferro, è completo.

L'analogia invocata dal Kundt, per quanto seducente è dunque fallace. I fenomeni di Kerr pel caso in cui la superficie riflettente è normale alle linee di forza, non possono spiegarsi che colla teoria da me sviluppata nelle due Memorie citate in principio, mentre pel caso della riflessione sulla superficie equatoriale, non si vede come combinare una teoria analoga, per le ragioni da me addotte alla fine della prima delle dette due Memorie.

8. *Misure di* $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$. Passiamo ora alle misure che si ottengono girando per un gran numero di volte alternativamente il polarizzatore e l'analizzatore, sinchè si sia raggiunta la minima possibile intensità di luce (intensità che sarebbe zero se si potesse evitare in modo completo la luce diffusa e se qualche imperfezione non avessero quasi sempre i prismi di nicol), tanto quando le vibrazioni incidenti sono inizialmente orizzontali ($\alpha_0$, $\alpha$), che quando sono verticali ($\beta_0$, $\beta$). In entrambi i casi l'analizzatore sarà supposto inizialmente all'estinzione, e cioè colla sua sezione principale verticale, se le vibrazioni incidenti seno orizzontali, e viceversa.

Analogamente a quanto si espose trattando della riflessione sul polo, $\alpha_0$ sarà l'angolo che devono fare le vibrazioni incidenti col piano d'incidenza, affinchè il raggio riflesso sia a vibrazioni rettilinee, ed $\alpha$ sarà l'angolo che queste vibrazioni riflesse fanno col piano medesimo.

Similmente, $\beta_0$ è l'angolo che le vibrazioni incidenti fanno colla perpendicolare al piano d'incidenza, onde le vibrazioni riflesse sieno rettilinee, e $\beta$ l'angolo di queste nuove vibrazioni riflesse rettilinee, colla perpendicolare suddetta.

Invertendo la corrente, gli spostamenti angolari dei due nicol cambiano segno. Darò

nella seguente tavola i risultati di una serie di misure, indicando come sempre col segno + quegli spostamenti dei nicol che sono nel senso della corrente, secondo le convenzioni addottate.

| Incidenza $i$ | $2\alpha_0$ | $2\alpha$ | $2\beta_0$ | $2\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 45° | + 11′, 5 | — 5′ | + 5′ | — 11′, 5 |
| 50 | + 13 | — 6 | + 6 | — 13 |
| 60 | + 8, 7 | — 1, 3 | + 2 | — 9 |
| 65 | + 9 | + 0, 5 | — 0 | — 8, 5 |
| 78 54′ | + 6, 5 | + 4, 5 | — 5 | — 6, 5 |
| 82 | + 5, 5 | + 4 | — 4, 5 | — 5, 5 |

Si vede dapprima, che si ha sensibilmente

$$\alpha_0 = -\beta \ , \ \alpha = -\beta_0$$

e cioè che la legge di reciprocità *con cambiamento di segno* è verificata qui pure (1).

Si vede di più che $\alpha_0$ e $\beta$ hanno sempre lo stesso segno, mentre $\alpha$ e $\beta_0$ cambiano segno ad una incidenza di circa 65°, che chiameremo qui pure *incidenza singolare*. Nel caso della riflessione sul polo è l'opposto che accade, e cioè sono $\alpha_0$ e $\beta$ che cangiano segno. Inoltre si vede essere $\alpha_0 > \alpha$ in valore assoluto, mentre nel caso della riflessione sul polo si ha sempre $\alpha_0 < \alpha$.

L'avere i quattro angoli un valore generalmente diverso da zero mostra che quando $\alpha_0 = 0$, oppure $\beta_0 = 0$, cioè quando le vibrazioni incidenti sono dirette in uno dei due azimut principali, le vibrazioni riflesse non sono rettilinee, ma elittiche. Infatti per renderle rettilinee bisogna spostare il polarizzatore di $\alpha_0$, a partire dall'orientazione in cui fornisce vibrazioni nel piano d'incidenza, o di $\beta_0$ a partire da quella che dà vibrazioni perpendicolari al medesimo piano. L'essere poi $\alpha$ e $\beta_0$ nulli all'incidenza di 65° circa, mostra quali sieno le proprietà dell'incidenza singolare.

Infatti, essere $\beta_0 = 0$ significa, che lasciando il polarizzatore nella posizione che dà vibrazioni verticali, le vibrazioni riflesse sono rettilinee. Dunque all'incidenza singolare il fenomeno è semplificato e consiste in una semplice rotazione delle vibrazioni, in senso opposto della corrente, dato che le vibrazioni incidenti sieno perpendicolari al piano d'incidenza.

Si può anche esprimere la cosa in altri termini, e dire, che in queste circostanze, una certa rotazione dell'analizzatore in senso opposto alla corrente, compensa esattamente l'azione del magnetismo.

Analogamente, essendo all'incidenza singolare $\alpha = 0$, si può dire che a questa incidenza si può compensare esattamente l'azione del magnetismo, con una rotazione

(1) È verosimile che, salvo il cambiamento di segno, la legge di reciprocità sussista nel modo più generale, e cioè secondo l'enunciato dato nel § 4 della II$^a$ delle Memorie citate al principio di questa.

del polarizzatore nel senso della corrente, dato che inizialmente le vibrazioni sieno orizzontali.

Come si vede, l'incidenza singolare ha qui proprietà inverse di quelle dell'incidenza cui ho dato il medesimo nome, trattando della riflessione sul polo. In tal caso diffatti, la compensazione perfetta si ha coll'analizzatore, quando si parte da vibrazioni incidenti orizzontali, e col polarizzatore quando si parte da vibrazioni verticali.

La tavola dei valori di $\alpha_0$, $\alpha$, $\beta_0$, $\beta$, compie dunque la conoscenza sui fenomeni dei quali ci occupiamo, giacchè fa vedere come e quando la luce riflessa sia elittica, e quando essa sia a vibrazioni rettilinee.

9. *Influenza della qualità di luce adoperata.* Ho fatto per ultimo alcune esperienze, per indagare in qual senso variava la grandezza delle rotazioni, al variare della lunghezza d'onda della luce adoperata. Mi limiterò a dare i valori di $\omega_1$, trovati tenendo costante l'angolo d'incidenza, e variando la qualità della luce semplice adoperata nell'esperienza.

| Incidenza 60° | |
|---|---|
| Qualità della luce | Rotazione $2\omega_1$ dell'analizzatore essendo orizzontali le vibrazioni incidenti |
| Violetto medio dello spettro | 5′ |
| Azzurro » » » | 7 |
| Verde » » » | 8, 5 |
| Giallo » » » | 10 |
| Rosso » » » | 10, 5 |

Da queste misure e da altre analoghe si deduce che le rotazioni compensatrici dei nicol diminuiscono al diminuire della lunghezza d'onda della luce adoperata.

Anche nella riflessione sulla superficie equatoriale del ferro, la dispersione è dunque anomala, come lo è nella riflessione sul polo, e nella rotazione per trasmissione attraverso lamine di ferro trasparenti collocate nel campo magnetico.

10. *Conclusioni.* I principali risultati da me ottenuti si possono così riassumere in breve.

1. Le rotazioni compensatrici dell'analizzatore o del polarizzatore hanno esattamente i segni loro attribuiti da Kerr.

2. Esiste la *legge di reciprocità,* ma con cambiamento di segno, e può enunciarsi, pel caso particolare delle rotazioni compensatrici dei nicol, dicendo, che: *la rotazione dell'analizzatore o quella del polarizzatore che rendono minima la luce, quando le vibrazioni incidenti sono inizialmente nel piano d'incidenza, e quando l'analizzatore è inizialmente all'estinzione, sono rispettivamente eguali e di segno contrario a quelle del polarizzatore o dell'analizzatore che pure rendono minima la luce, ammesso che si parta dalle altre orientazioni principali dei due nicol.*

3. La rotazione dell'analizzatore, con vibrazioni incidenti nel piano d'incidenza

(e quindi anche quella del polarizzatore con vibrazioni incidenti perpendicolari a quel piano) si annulla ad una incidenza di quasi 79°, e poi cambia segno.

4. Essa passa per un massimo ad un' incidenza che sembra essere minore del valore di 60° assegnato da Kerr, e per un altro massimo di segno contrario, fra 79° e 90°.

5. La rotazione dell'analizzatore, con vibrazioni incidenti perpendicolari al piano d'incidenza (e per conseguenza anche quella del polarizzatore per vibrazioni incidenti giacenti in quel piano), raggiunge un massimo ad una incidenza che sembra essere superiore di qualche grado a 60° (probabilmente l'incidenza singolare), poi decresce fino a zero quando l'incidenza cresce fino 90°, senza cambiar segno.

6. Anche se le vibrazioni incidenti sono dirette secondo uno degli azimut principali, la luce riflessa è generalmente elittica, e gli assi dell'elisse sono generalmente inclinati sul piano di riflessione. Ma per l'incidenza di quasi 79° e per vibrazioni incidenti nel piano d' incidenza, l' asse maggiore dell'elisse riflessa è pure nel piano d' incidenza.

7. Se l'incidenza è di 65° circa (incidenza singolare), e se le vibrazioni incidenti sono perpendicolari al piano d'incidenza, le vibrazioni riflesse sono, non più elittiche ma rettilinee. Per cui coll'analizzatore si può in tal caso compensare esattamente l'azione del campo magnetico.

8. Alla stessa incidenza singolare, se le vibrazioni incidenti sono inizialmente nel piano d'incidenza, e l'analizzatore all'estinzione, si può compensare completamente l'azione del magnetismo, con una rotazione del polarizzatore.

9. Paragonando questi fenomeni a quelli, da me altrove studiati, che si producono quando la superficie magnetica riflettente è la superficie polare, e ritenendo le definizioni date degli angoli $\omega_1$ ,$\omega_2$ , $\omega'_1$ , $\omega'_2$ , $\alpha_0$ , $\alpha$ , $\beta_0$ , $\beta$ , si vede, che mentre in quel caso si aveva sempre

$$\omega_1 = \omega'_2 , \ \omega_2 = \omega'_1 , \ \alpha_0 = \beta , \ \alpha = \beta_0 , \ \alpha > \alpha_0 ,$$

nel caso attuale invece si ha sempre

$$\omega_1 = -\omega'_2 , \ \omega_2 = -\omega'_1 , \ \alpha_0 = -\beta , \ \alpha = -\beta_0 , \ \alpha < \alpha_0 .$$

Sembra dunque lecito ritenere, che la *legge di reciprocità* sussista, ma con cambiamento di segni (1).

10. Paragonando i segni delle rotazioni dei due nicol, colle quali si può separatamente render minima la luce, con quelli delle analoghe rotazioni relative ad una lastra di vetro a faccie parallele messa in luogo del ferro, e che rifletta la luce colla seconda superficie, si trova una opposizione completa di segni, ma una disposizione analoga di essi.

Facendo poi un analogo confronto fra il caso della riflessione sul polo d'una calamita e quello della riflessione sulla seconda superficie d' una lastra di vetro posta sul polo, si trova che non esiste più nessuna analogia.

11. Siccome colla lastra trasparente, quando al crescere dell'incidenza il segno della rotazione cambia, essa passa, non per il valore zero, ma pel valore di 90°, così

(1) Per la più generale espressione di questa legge, vedi l'Appendice alla Memoria: *Studî sulla polarizzazione rotatoria magnetica* nelle Memorie della r. Acc. di Bologna, 1886-87.

sembra più naturale considerare le rotazioni successive come dello stesso segno a prima, ma maggiori di 90°. Considerata la cosa in tal modo, il disaccordo completo fra i fenomeni offerti dal vetro e quelli offerti dal ferro, ha luogo nel caso della faccia riflettente parallela alle linee di forza.

Per cui in ogni modo, non si possono prendere i fenomeni prodotti dal vetro, come punto di partenza per la spiegazione dei fenomeni di Kerr.

12. Nella riflessione sulla superficie equatoriale del ferro magnetizzato, si produce una dispersione anomala, e cioè gli effetti decrescono al crescere della rifrangibilità della luce adoperata, precisamente come negli altri casi in cui il ferro magnetizzato agisce direttamente sulle vibrazioni luminose.

# Intorno ad alcuni nuovi derivati dell' acido isosuccinico.

Memoria del Socio G. KÖRNER e del dott. A. MENOZZI.

*letta nella seduta del 9 gennaio 1887*

Mentre dell'acido succinico si conoscono molti derivati, pochi sono quelli descritti finora dell'acido isosuccinico o metil-malonico. E sembrandoci interessante, per parecchi motivi, la conoscenza di derivati azotati di quest'ultimo acido, abbiamo preparato, partendo dall'acido piruvico, un acido ammido-isosuccinico ed un acido ammido-isosuccinammico, i quali, per la loro isomeria rispettivamente coll'acido aspartico e coll'asparagina, come pure per le trasformazioni di cui sono suscettibili, presentano uno speciale interesse. Per tali ragioni abbiamo studiato dei sali metallici e dei composti cogli acidi un numero maggiore di quanto si suol fare allorchè si ha di mira soltanto di caratterizzare un nuovo acido. Negli esperimenti instituiti per la preparazione degli acidi indicati ottenemmo inoltre l'ammide completa dell'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico, della quale non si conosce finora il corrispondente isomero nella serie succinica.

L' ing. Giuseppe La Valle, dietro nostro desiderio, si è assunto lo studio cristallografico delle principali sostanze che descriviamo in questa Memoria, ed ha raccolto i risultati del suo studio nella Nota che fa seguito alla presente.

## Ammide dell' acido $\alpha$-ammido-isosuccinico.

Abbiamo fatto reagire acido piruvico con acido prussico concentrato [1], scaldando la miscela delle due sostanze, a quantità equimolecolari, in vasi chiusi, dapprima a 30-40°, poscia fin verso i 70°. Dopo abbiamo aggiunto ammoniaca alcoolica (2 mol. per 1 di acido piruvico impiegato), scaldando di nuovo gradatamente fino a 70° circa. In seguito a raffreddamento ottiensi in abbondante quantità un prodotto cristallino in seno ad un liquido denso appena colorato. La massa cristallina, lavata con alcool e cristallizzata dall'acqua, fornisce bellissimi cristalli incolori costituenti grandi tavole a base rombica. Secondo le analisi la composizione della sostanza è $C_4 H_9 N_3 O_2$. Infatti:

gr. 0,313 di sostanza diedero 0,4192 di $CO_2$ e 0,2027 di $H_2 O$; gr. 0,2508 di sostanza diedero c. c. 65,5 di azoto a 6°C e 760 m.m. di pressione.

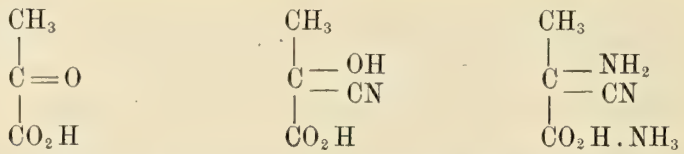
[1] Buoni risultati si hanno con acido prussico del 60-70 %, mentre con acido più diluito si ha una rendita assai minore.

Questi risultati corrispondono all'indicata formula, poichè si ha:

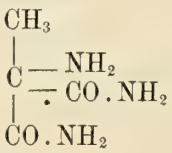
| | trovato | calcolato per $C_4 H_9 N_3 O_2$ |
|---|---|---|
| C % | 36,51 | 36,64 |
| H » | 7,18 | 6,87 |
| N » | 31,80 | 32,00 |

La quale composizione era da prevedersi tenendo conto del modo con cui sogliono reagire i chetoni coll' acido prussico e l' ammoniaca. Difatti dall'acido piruvico doveva aspettarsi in quelle condizioni un prodotto della costituzione rappresentata dalla formula III$^a$, esprimendo la I$^a$ la struttura dell'acido piruvico, e la II$^a$ quella dell'ossinitrile generato dall'azione dell'acido cianidrico sull'acido chetonico.

I$^a$ II$^a$ III$^a$



Se non che, mentre la composizione elementare del prodotto coincide effettivamente con quella richiesta dallo schema III, le sue proprietà e vari suoi modi di comportarsi non sono in armonia con quella costituzione. I fatti di cui finora siamo in possesso, ci autorizzano ad assegnare al prodotto una struttura differente e precisamente quella espressa dallo schema seguente.



che corrisponde alla medesima composizione centesimale e che dimostra essere la sostanza l'ammide completa dell'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico.

La sostanza infatti con idrato potassico o idrato baritico svolge rapidamente due molecole di ammoniaca per una di prodotto; mentre fatta bollire con ossido di magnesio, non svolge che una piccola quantità di ammoniaca. Facendo bollire la soluzione della sostanza con nitrato d'argento non ottiensi cianuro d' argento ma solamente lenta riduzione. D'altra parte la sostanza riscaldata entro tubi chiusi con ammoniaca acquosa a 100°, fornisce un isomero dell'asparagina, come si vedrà più sotto. Infine la sostanza si unisce agli acidi per dare composti ben cristallizzabili contenenti il gruppo $C_4 H_9 N_3 O_2$ per ogni molecola di acido monobasico.

Quest'ammide è molto solubile nell'acqua bollente, (1 p. in meno di 3 p. di acqua), a freddo invece è relativamente poco solubile (1 p. richiede circa 20 p. di acqua). Nell'alcool diluito è pure molto solubile a caldo e poco a freddo; nell'alcool concentrato è pochissimo solubile. Riscaldata al tubetto si altera a 200-201°, dando un liquido nero. La sua soluzione acquosa è neutra. Fatta bollire con acidi minerali in eccesso dà il sale ammonico dell' acido impiegato, anidride carbonica, e $\alpha$-alanina, rispettivamente il sale dell'$\alpha$-alanina; fatta bollire invece con idrati alcalini o terralcalini

svolge ammoniaca e dà il sale dell'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico, acido più sotto descritto. Dei composti cogli acidi, i quali hanno reazione acida, abbiamo preparato il cloridrato, il solfato ed il nitrato.

*Cloridato dell'ammide dell'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico.* $C_4 H_9 N_3 O_2 . H Cl$.— L'ammide superiormente descritta fu sciolta nella quantità equimolecolare di acido cloridrico, e la soluzione si mantenne su acido solforico. A grande concentrazione si deposero dei prismi molto sviluppati, lunghi, facilmente solubili nell'acqua. Sciolto il composto in molt'acqua si scinde. È anidro, e la sua composizione corrisponde alla formula sopranotata. Infatti l'analisi ha dato:

gr. 0,3650 di sostanza diedero gr. 0,3088 di Ag Cl. pari a 0,0764 di Cl; da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4 H_9 N_3 O_2 . HCl$ |
|---|---|---|
| Cl % | 20,93 | 21,19 |

*Solfato dell'ammide dell' acido $\alpha$- ammido-isosuccinico.* $(C_4 H_9 N_3 O_2)_2 . S O_4 H_2$ $2 H_2 O$. — Sciogliendo la sostanza nella quantità equivalente di acido solforico (1 mol. di ammide per $^1/_2$ mol. di acido solforico), e abbandonando la soluzione all' evaporazione spontanea o su acido solforico, quando il liquido è molto concentrato si depositano dei cristalli trasparenti, di cui alcuni molto grossi, inalterabili all' aria. Contiene due molecole di acqua di cristallizzazione che non perde su acido solforico, ma solamente col riscaldamento a 60-70°, completamente e rapidamente a 100°. L'analisi fornì:

gr. 1,439 di sostanza, riscaldati a 100°, perdettero gr. 0,1362 di acqua;

gr. 0,4146 di sostanza, diedero gr. 0,245 di Ba $SO_4$, pari a 0,10304 di $SO_4 H_2$.

da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4 H_9 N_3 O_2)_2 . SO_4 H_2 . 2H_2 O$ |
|---|---|---|
| $H_2 O$ | 9,46 % | 9,09 % |
| $SO_4 H_2$ | 24,85 » | 24,74 » |

*Nitrato dell'ammide dell'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico.* $C_4 H_9 N_3 O_2 . N O_3 H$.— Anche questo composto si ottiene sciogliendo l'ammide nella quantità equimolecolare di acido nitrico, e concentrando la soluzione su acido solforico. Si deposita in grandi prismi trasparenti, molto solubili, inalterabili all'aria. È anidro. La determinazione dell'acido nitrico ha dato:

gr. 0,312 di sostanza fornirono gr. 0,0999 di $NO_3 H$;

da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4 H_9 N_3 O_2 . NO_3 H$ |
|---|---|---|
| $NO_3 H$ | 32,02 % | 32,47 % |

## Acido $\alpha$-ammido-isosuccinico (Acido $\alpha$-isoaspartico).

Dall'ammide ora descritta abbiamo potuto ottenere l'acido $\alpha$-ammido-isosuccinico. Scaldando l'ammide con acido cloridrico non si ottiene l'acido corrispondente, sibbene da ultimo $\alpha$-alanina, costatando anche prima di arrivare all'ebollizione svolgimento di anidride carbonica. Ma trattando la sostanza colla quantità voluta di idrato di bario, (1 mol. di ammide per 1 di idrato baritico), e facendo bollire entro pallone

connesso con refrigerante a ricadere si ha uno svolgimento copioso di ammoniaca, mentre attorno le pareti del pallone formasi un deposito cristallino costituito da fini aghi. Finito lo svolgimento dell'ammoniaca, precipitando il bario colla quantità esattamente necessaria di acido solforico, ottiensi un liquido fortemente acido da cui, se non è troppo diluito, si osserva separazione di prismi trasparenti, separazione che si può accelerare mantenendo il liquido nel vuoto su acido solforico. Se il liquido si evapora a b. m. svolge anidride carbonica, perde poco alla volta la reazione acida, acquista sapor dolce e deposita da ultimo cristalli di $\alpha$-alanina (1).

I cristalli che si ottengono per evaporazione a freddo sono costituiti dall' acido $\alpha$-ammido-isosuccinico. La sua soluzione acquosa ha reazione fortemente acida, scompone i carbonati con effervescenza; facendola bollire avviene scomposizione, svolgendo anidride carbonica. La scomposizione avviene rapidamente dapprima, da ultimo lentamente. L' acido allo stato cristallizzato, scaldato per sè fino a 100° subisce alterazione appena sensibile; al disopra di 100°, svolge rapidamente anidride carbonica e dà $\alpha$-alanina. È pressochè insolubile nell' alcool, poco solubile nell' acqua fredda; (100 p. di acqua a 16° sciolgono 2,36 di acido); è anidro. L'analisi ha dimostrato che possiede la formula $C_4 H_7 NO_4$, identica a quella dell' acido aspartico.

gr. 0,2836 di sostanza diedero gr. 0,3738 di $CO_2$ e gr. 0,1374 di $H_2O$;
» 0,3384 » » c.c. 31 di azoto a 17° e a 753,3$^{mm}$.

Dai quali risultati si ha:

| | trovato | calcolato per $C_4 H_7 NO_4$ |
|---|---|---|
| C % | 35,94 | 36,09 |
| H » | 5,38 | 5,26 |
| N » | 10,53 | 10,52 |

La costituzione dell'acido per la sua genesi e per le trasformazioni è rappresentata dal primo dei seguenti schemi, dei quali il secondo appartiene ad un acido $\beta$-ammido-isosuccinico non ancora conosciuto, e il terzo è quello dell' acido ammido-succinico o acido aspartico.

(1) La formazione dell'$\alpha$-alanina dall'acido $\alpha$-isoaspartico fu constatata oltrechè dal comportamento del prodotto di trasformazione, anche coll'analisi del prodotto stesso, come anche coll'analisi e collo studio del rispettivo sale di rame. Ecco i risultati dell analisi del prodotto:

gr. 0,2045 di sostanza diedero 0,3129 di $CO_2$ e 0,1492 di $H_2O$;
» 0,3409 » » c. c. 47 di azoto a 14° c, e a 758,5 di pressione

| | trovato | calcolato per $C_3 H_7 NO_2$ |
|---|---|---|
| C | 40,27 | 40,44 |
| H | 8,11 | 7,86 |
| N | 15,84 | 15,73 |

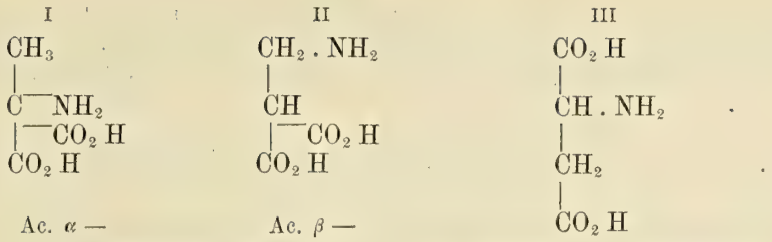
L'analisi del sale di rame ha fornito questi risultati:

gr. 0,5398 hanno perduto, a 125°, 0,0394; da cui:

$H_2O$ trovata 7,2 %; la teoria per $(C_3 H_6 NO_2)_2$ Cu.$H_2O$ richiede 6,99 %.

gr. 0,4698 di sale secco hanno dato gr. 0,1560 di Cu O, pari a 0,1245 di Cu; da cui:

Cu trovato 26,4 %; la teoria per $(C_3 H_6 NO_2)_2$ Cu richiede Cu 26,5 %




Il nuovo acido per la sua relazione coll' acido isosuccinico e per la posizione del gruppo $NH_2$, lo chiamiamo *acido α-ammido-isosuccinico*, od anche *acido α-isoaspartico* per la sua isomeria coll'acido aspartico.

L'acido, in armonia all'ipotesi di van t'Hoff è otticamente inattivo; furono esaminate in proposito la soluzione acquosa dell' acido, quella del sale sodico e quella del nitrato.

Come il suo isomero, l'acido aspartico, e come gli ammido-acidi in genere, l' acido ottenuto si unisce alle basi ed agli acidi, dando dei sali che sono per la maggior parte ben cristallizzabili. Dà pure eteri di cui il monometilico è ben cristallizzabile. Di questi composti abbiamo preparato e studiato i seguenti:

*Sale ammonico.* $C_4H_7NO_4.NH_3$ — Si può ottenere tanto saturando la soluzione acquosa dell'acido con ammoniaca, come scomponendo con carbonato ammonico il sale baritico che si ottiene dal trattamento dell'ammide corrispondente con idrato baritico. In ambi i casi occorre portare la soluzione a piccolo volume concentrando a b. m. e aggiungendo tratto tratto ammoniaca o carbonato ammonico, altrimenti il sale si scompone perdendo ammoniaca ed assumendo reazione acida. Il sale si deposita per raffreddamento in aghi prismatici, di splendore vitreo, molto sviluppati. Nell' acqua calda è solubilissimo, molto solubile anche nella fredda. È anidro; mantenuto su acido solforico perde lentamente ammoniaca. L'analisi ha dimostrato che è sale mono-ammonico dell'acido;

gr. 1,0074 di sostanza diedero gr. 0,1071 di $NH_3$ da cui:

$NH_3$ trovata 10,60 %; calcolata per $C_4H_7NO_4.NH_3$ $NH_3$ % 11,30.

La differenza fra la quantità di ammoniaca trovata e quella teorica si spiega col fatto che il sale era rimasto per poco su acido solforico, ed aveva perduto ammoniaca assumendo debole reazione acida.

*Sali sodici.* — Abbiamo ottenuto due sali monosodici del nuovo acido, differenti perchè contengono una diversa quantità di acqua di cristallizzazione. I due sali li indichiamo rispettivamente con $\alpha$ e $\beta$. Dalla stessa preparazione si ha l'uno o l' altro dei due sali a seconda della concentrazione e della temperatura. Quando la soluzione è concentrata e la temperatura relativamente alta, (25-30 ), si ottiene il sale $\alpha$; quando invece la soluzione è piuttosto diluita e la temperatura bassa, si deposita il sale $\beta$.

*Sale sodico* $\alpha$. $C_4H_6NO_4Na.H_2O$ — Saturando la soluzione dell'acido con soda caustica o con carbonato sodico, e indi concentrando opportunemente, il sale si separa in aghi schiacciati, lunghi. È facilmente solubile nell'acqua fredda, solubilissimo nella

calda; 100 p. di acqua a 13° C. sciolgono 26 p. di sale. Contiene 1 mol. di acqua di cristallizzazione che perde su acido solforico o con riscaldamento a 100°. L'analisi ha dato: gr. 0,613 di sale, perdettero, col riscaldamento a 100°, gr. 0,0654 da cui

| | |
|---|---|
| $H_2O$ trovata . . . . . | 10,6 % |
| » calcolata per $C_4H_6NO_4Na . H_2O$ | 10,4 » |

gr. 0,2415 di sale seccato a 100° diedero 0,1091 di $Na_2SO_4$, pari a 0,0353 di Na; da cui:

| | |
|---|---|
| Na trovato . . . . . | 14,61 % |
| Na calcolato per $C_4H_6NO_4Na$ . | 14,84 » |

*Sale sodico β.* $C_4H_6NO_4Na.4H_2O$ — Si ottiene come il precedente, solamente le condizioni di temperatura e di concentrazione nelle quali si deposita sono alquanto diverse, come più sopra è indicato. Cristallizza in grandi prismi trasparenti, contenenti 4 mol. di acqua di cristallizzazione, che all'aria sfioriscono lentamente dando il sale α. Introducendolo nell'acqua calda, è visibile, prima della soluzione, la trasformazione nel sale α. Nell'acqua fredda è alquanto meno solubile del sale precedente.

L'analisi fornì questi risultati:

gr. 1,1784 di sale, col riscaldamento a 100° perdettero gr. 0,3722, da cui

| | |
|---|---|
| $H_2O$ trovata . . . . . | % 31,58 |
| $H_2O$ calcolata per $C_4H_6NO_4Na.4H_2O$ » | 31,52 |

gr. 0,2552 di sale secco diedero gr. 0,1152 di $Na_2SO_4$, pari a gr. 0,0369 di Na. Quindi:

| | |
|---|---|
| Na trovato . . . . . | 14,57 % |
| Na calcolato per $C_4H_6NO_4Na$ . | 14,84 » |

*Sale potassico.* $C_4H_6NO_4K$. — Si può ottenere come il sale sodico. Dalla soluzione acquosa concentrata si deposita in mamelloni a foggia di cavolfiori; da alcool diluito si separa in piccoli cristalli aghiformi di aspetto setaceo. È molto solubile nell'acqua a caldo, ed ancor molto solubile a freddo. È anidro.

gr. 1,6389 perdettero su acido solforico solamente gr. 0,0033, corrispondente a 0,20 % di acqua.

gr. 0,3316 di sale secco diedero gr. 0. 167 di $SO_4K_2$, pari a K gr. 0,075, da cui si ha:

| | |
|---|---|
| K trovato . . . . . | 22,61 |
| K calcolato per $C_4H_6NO_4K$ . . . . | 22,80 |

*Sale di calcio.* $(C_4H_6NO_4)_2Ca.H_2O$ — Fu ottenuto questo sale trattando a freddo la soluzione convenientemente diluita del sale ammonico con soluzione di cloruro di calcio. In tal modo il sale si deposita lentamente sotto forma di piccoli cristalli lucenti. È poco solubile nell'acqua tanto a freddo quanto a caldo:
100 p. di acqua a 18° sciolgono 1,056 di sale.

Nell'acqua bollente è di poco più solubile. Il sale contiene 1 mol. di acqua di cristallizzazione che trattiene anche a 130°.

gr. 0,5119 di sale diedero 0,0894 di Ca O, da cui si deduce:

| | trovato | calcolato per $(C_4 H_6 NO_4)_2 Ca . H_2 O$ |
|---|---|---|
| Ca | 12,46 % | 12,42 % |

*Sale di bario.* $(C_4 H_6 NO_4)_2 . Ba . 2 H_2 O$ — Saturando la soluzione acquosa dell'acido con carbonato di bario e indi concentrando opportunemente, si ottiene per raffreddamento il sale indicato in forma di piccoli aghi riuniti a fiocchi. È discretamente solubile nell'acqua calda, meno nell'acqua fredda.

100 p. di acqua a 10° sciolgono 4, 72 di sale.

Contiene 2 mol. di acqua di cristallizzazione che perde lentamente su acido solforico, rapidamente a 100°.

Analisi:

gr. 1,0567 di sale, su acido solforico, perdettero gr. 0,0873; da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2 Ba . 2H_2 O$ |
|---|---|---|
| $H_2 O$ | 8,26 % | 8,40 |

gr. 0,6253 di sale secco diedero gr. 0,3629 di $Ba SO_4$, pari a gr. 0,2129 di Ba, da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4 H_6 NO_4)_2 Ba$ |
|---|---|---|
| Ba | 34,04 % | 34,18 |

*Sale di magnesio.* $(C_4 H_6 NO_4)_2 Mg . 3H_2 O$ — Abbiamo preparato questo sale, come il precedente di bario, saturando la soluzione acquosa dell'acido con carbonato di magnesio. Nell'acqua calda è discretamente solubile, e cristallizza in piccoli prismi bianchi. Contiene 3 mol. di acqua di cristallizzazione, di cui due le perde a 100°, l'ultima soltanto a 130°. Ecco i risultati ottenuti nella determinazione dell'acqua di cristallizzazione:

gr. 1,1822 di sale, a 100° perdettero gr. 0,1280
» 1,1822 » a 130° » » 0,1890

Da cui si deduce:

| trovato | | calcolato per $(C_4 H_6 NO_4)_2 Mg . 3H_2 O$ | |
|---|---|---|---|
| $H_2 O$ a 100° | 10,82 % | per perdita di $2H_2 O$ | 10,52 % |
| $H_2 O$ a 130° | 15,98 » | per perdita di $3H_2 O$ | 15,78 » |

La determinazione del magnesio, fatta calcinando il sale secco a 130° con acido solforico, ha dato i risultati seguenti:

gr. 0,272 di sale diedero 0,110 di $Mg SO_4$, pari a Mg. 0,022, da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4 H_6 NO_4)_2 Mg$ |
|---|---|---|
| Mg | 8,11 % | 8,33 % |

*Sale di zinco.* $(C_4 H_6 NO_4)_2 Zn . 3H_2 O$ — Fu ottenuto con acido e carbonato di zinco. È abbastanza solubile nell' acqua calda, e per raffreddamento si deposita in piccoli prismi trasparenti, che contengono 3 mol. di acqua di cristallizzazione le quali si eliminano col riscaldamento sopra 100°. L'analisi ha dato questi risultati:

gr. 1,170 di sale, col riscaldamento a 100°, perdettero gr. 0,168;

gr. 0,578 di sale cristallizzato diedero gr. 0,1198 di ZnO, pari a 0,0961 di Zn.

Da cui si ha:

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Zn.3H_2O$ |
|---|---|---|
| $H_2O$ | 14,3 % | 14,1 % |
| Zn | 16,62 » | 16,98 » |

*Sale di cadmio.* $(C_4H_6NO_4)_2Cd$. — Questo sale fu preparato per doppia scomposizione con soluzione del sale ammonico opportunemente diluita, e soluzione del cloruro di cadmio, a freddo. In tal modo il sale si deposita lentamente, (a caldo precipita tosto), in forma di piccoli prismi anidri, poco solubili nell'acqua bollente, pochissimo nell'acqua fredda.

100 p. di acqua a 16°,5 sciolgono 0,33 di sale.

gr. 0,5020 di sale diedero gr. 0,1776 di CdO, pari a Cd. 0,1476; da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Cd$ |
|---|---|---|
| Cd % | 29,4 | 29,7 |

*Sale di piombo.* $(C_4H_6NO_4)_2Pb.2\,1/2\,H_2O$ — Mescolando la soluzione del sale potassico dell'acido con soluzione di nitrato di piombo, si ottiene un precipitato voluminoso, costituito da fini aghi. Il sale si può cristallizzare da acqua bollente, ove è molto solubile, e per raffreddamento si depone in aghi fini, sviluppati, di aspetto setaceo. Contiene 2 1/2 mol. di acqua di cristallizzazione che perde a 100°.

gr. 1,0486 di sale perdettero a 100° gr. 0,090; quindi

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Pb.2\,1/2\,H_2O$ |
|---|---|---|
| $H_2O$ | 8,57 % | 8,73 % |

gr. 0,2623 di sale secco diedero gr. 0,1823 di $PbSO_4$, pari Pb 0,1244

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Pb.$ |
|---|---|---|
| Pb | 43,60 % | 43,87 % |

*Sali di rame. Sale neutro di rame.* $C_4H_5NO_4Cu.H_2O$ — Trattando la soluzione dell'acido con carbonato di rame in eccesso, e indi filtrando, risulta un liquido di color bleu, che deposita dopo qualche tempo degli aghi finissimi, di color bleu, riuniti in mamelloni, costituiti dal sale neutro di rame. È pochissimo solubile nell'acqua, contiene 1 mol. di acqua che perde a 100°.

Risultati dell'analisi:

gr. 1,0548 di sale perdettero a 100° 0,095, da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4H_5NO_4Cu.H_2O$ |
|---|---|---|
| $H_2O$ | 9,00 % | 8,4 % |

gr. 0,6202 di sale secco diedero 0,2624 di CuO, pari a Cu 0,2093

| | trovato | calcolato per $C_4H_5NO_4Cu$ |
|---|---|---|
| Cu | 33,7 % | 33,6 % |

*Sale acido di rame.* $(C_4H_6NO_4)_2Cu.5H_2O$ — Se alla soluzione del sale precedente tosto preparata, si aggiunge una quantità di acido $\alpha$-isoaspartico in soluzione, pari a quella impiegata per la preparazione del sale, si ha, dopo qualche tempo, e purchè

le soluzioni non sieno troppo diluite, deposizione di grossi prismi di color bleu intenso; mantenendo il liquido nel vuoto su acido solforico, si può ottenere una certa quantità di questo nuovo sale che rappresenta il sale acido di rame. Contiene $5H_2O$ di cristallizzazione.

L'analisi fornì questi risultati:

gr. 0,8566 di sale perdettero a 100° gr. 0,190; ciò che dà:

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Cu.5H_2O$ |
|---|---|---|
| $H_2O$ | 23,11 % | 21,24 % |

gr. 0,3179 di sale secco diedero gr. 0,0776 di CuO, pari a Cu gr. 0,0619 da cui si ha

| | trovato | calcolato per $(C_4H_6NO_4)_2Cu$ |
|---|---|---|
| Cu | 19,4 % | 19,3 % |

*Sale d'argento.* $C_4H_6NO_4Ag$ — Trattando la soluzione del sale ammonico con nitrato d'argento si ha un precipitato fioccoso, bianco, che si può lavare con acqua fredda. Esso è il sale monoargentico dell'acido. Nell'acqua calda è molto solubile, e per raffreddamento si deposita in aghi bianchi ben sviluppati. Col riscaldamento ed alla luce si altera, annerendo. È anidro.

gr, 0,3476 di sale diedero gr. 0,1551 di Ag, da cui si ha:

| | trovato | calcolato per $C_4H_6NO_4Ag$. |
|---|---|---|
| Ag | 44,63 % | 44,9 % |

*Sali cogli acidi* — Dei sali cogli acidi che sono altrettanto caratteristici di quelli colle basi, ma che si distinguono per la grande solubilità, abbiamo preparato il cloridrato, il solfato ed il nitrato.

*Cloridrato.* $C_4H_7NO_4.HCl$ — Fu preparato coll'ammido-acido e con acido cloridrico, a freddo, concentrando la soluzione su acido solforico. Si deposita in grandi tavole trasparenti. È eminentemente igroscopico. Con molt'acqua si scinde depositando acido $\alpha$-isoaspartico. È anidro. All'analisi si ottennero questi risultati:

gr. 0,4746 di sale diedero gr. 0,4038 di AgCl, pari a Cl 0,09985, da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4H_7NO_4.HCl$ |
|---|---|---|
| Cl % | 21,03 | 20,89 |

*Solfato.* $(C_4H_7NO_4)_2.H_2SO_4$. — Preparato in modo analogo al cloridrato, si deposita in grandi prismi a base rombica. È solubilissimo nell'acqua, igroscopico. Essicato su acido solforico è anidro.

gr. 0,4802 di sostanza diedero gr. 0,3057 di $BaSO_4$, pari a gr. 0,1286 di $SO_4H_2$. da cui:

| | trovato | calcolato per $(C_4H_7NO_4)_2.H_2SO_4$ |
|---|---|---|
| $SO_4H_2$ % | 26,78 | 26,92 |

*Nitrato.* $C_4H_7NO_4.NO_3H.H_2O$ — Fu ottenuto in modo analogo al cloridrato ed al solfato; è un composto che cristallizza in prismi allungati trasparenti, inalterabili all'aria, contenenti 1 mol. di acqua di cristallizzazione che si perde verso 70° 80°.

Analisi:

gr. 0,6072 con riscaldamento a 70-80° perdettero gr. 0,0532
» 0,1540 diedero c. c. 17,5 di azoto a 17° e a 752$^{mm}$, 4.
Da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4H_7NO_4 . NO_3H . H_2O$ |
|---|---|---|
| N | 13,04 % | 13,08 % |

*Betaina dell'acido α-ammido-isosuccinico* — Abbiamo sottoposto il nuovo acido al trattamento con ioduro di metile in presenza di potassa ed abbiamo constatato che con tale reazione si comporta diversamente dall'acido aspartico. Perchè, mentre quest'ultimo, come abbiamo dimostrato anni fa, dà acido fumarico, scindendosi nella reazione stessa l'alcaloide formatosi, il nuovo acido invece dà un prodotto stabile che è ioduro e sale potassico dell' acido trimetilato, un prodotto che è igroscopico, molto solubile nell' alcool a caldo, poco a freddo, che dà le reazioni alcaloidiche. Essiccato su acido solforico il prodotto ha la composizione $C_7H_{12}NO_4K_2J . 7H_2O$, come risulta da questi dati analitici:
gr. 0,4264 di sostanza hanno dato gr. 0,194 di Ag J, pari a J 0,1048
» 0,4534 » » $K_2SO_4$, pari a K 0,2032
Da cui:

| | trovato | calcolato per $C_4H_3N(CH_3)_3O_4K_2J . 7H_2O$ |
|---|---|---|
| J | 24,57 % | 25,10 |
| K | 15,30 » | 15,44 . |

Da questo *ioduro* abbiamo preparato il *cloruro*, per doppia scomposizione con cloruro d'argento, e dal cloruro abbiamo ottenuto il *cloroaurato*, sotto forma d'un precipitato giallo, insolubile nell'acqua, solubile nell' acido cloridrico e da questo solvente cristallizzabile in prismi gialli discretamente sviluppati.
gr. 0,2661 di sale diedero 0,1019 di Au
Da cui:

| | trovato | calcolato secondo $C_4H_5N(CH_3)_3ClO_4 . AuCl_3$ |
|---|---|---|
| Au % | 38,3 | 38,1 |

Il composto rappresenta quindi il sale d'oro della betaina dell'acido α-isoaspartico.

I tentativi fatti per ottenere dalla betaina dell'acido α-isoaspartico un acido isofumarico della struttura, indicata dallo schema qui sotto, non hanno condotto finora al risultato voluto.

$$H_2C{=}C\begin{matrix}-CO_2H\\-CO_2H\end{matrix}$$

*Etere monometilico dell'acido α-ammido-isosuccinico.* $C_4H_6NO_4 . CH_3$ — Questo etere fu ottenuto trattando il sale monoargentico sopradescritto colla quantità equimolecolare di ioduro metilico, in presenza di alcool metilico, e separando in seguito l'etere formatosi dal ioduro d'argento mediante successivi trattamenti con alcool metilico.

È pressochè insolubile nell'etere solforico, poco solubile nell' alcool metilico e nell'alcool etilico, anidri, solubile nei detti alcoli diluiti, facilmente solubile nell' acqua.

Dall' alcool metilico per raffreddamento si deposita in aghi bianchi; dall' acqua per lenta evaporazione si separa in prismi trasparenti, discretamente sviluppati.
gr. 0,2376 di sostanza diedero gr. 0,3520 di $CO_2$ e gr. 0, 1470 di $H_2O$,

Da cui:

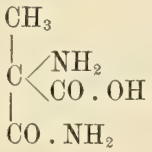
| | trovato | calcolato per $C_4H_6NO_4CH_3$ |
|---|---|---|
| C % | 40,40 | 40,81 |
| H » | 6,45 | 6,26 |

## Acido α-ammído-isosuccinammico (α-Isoasparagina).

Una volta riconosciuta la natura della sostanza che risulta dall'azione dell'acido piruvico con acido prussico e indi con ammoniaca, e stabilito che non è altro che l'ammìde completa dell' acido α-ammido-isosuccinico, ci parve possibile ottenere dall'ammìde stessa una sostanza isomera dell'asparagina. E dopo alcuni tentativi infruttuosi le nostre previsioni furono confermate.

Facendo bollire a lungo l'ammìde sopradescritta con ammoniaca, non si ottiene alterazione sensibile. Trattando l' ammìde stessa con quantità limitata di acidi o di alcali, e precisamente in guisa da trasformare un solo gruppo, $CONH_2$ in $CO_2H$, nel maggior numero di casi si ottiene una miscela di acido α-isoaspartico e di ammìde inalterata, la reazione procedendo completa per una parte della sostanza, e un' altra parte restando inalterata. Ma scaldando la sostanza con ammoniaca acquosa in tubi chiusi a 105° circa, dopo 8-10 ore, l' ammìde è completamente trasformata, e dalla soluzione, dopo scacciata l' ammoniaca, si depone una polvere cristallina, pochissimo solubile nell'acqua fredda, non tanto facilmente solubile anche nell'acqua calda. Per raffreddamento si deposita in cristalli ben definiti a base esagonale.

L'analisi ed il comportamento della nuova sostanza hanno dimostrato che è acido α-ammído-isosuccinammico e per conseguenza un isomero dell' asparagina. La sua costituzione è espressa dallo schema seguente:



Non contiene acqua di cristallizzazione ed è otticamente inattiva, tanto in soluzione acquosa, quanto in soluzione ammoniacale. Ecco i risultati dell'analisi:

gr. 0,2913 di sostanza diedero gr. 0,3860 di $CO_2$ e gr. 0,1687 di $H_2O$;

» 0,2202 » » c. c. 42,6 di azoto a 27° e 748 mm.

Da cui si deduce:

| | trovato | calcolato per $C_4H_8N_2O_3$ |
|---|---|---|
| C % | 36,14 | 36,36 |
| H » | 6,43 | 6,06 |
| N » | 20,48 | 21,21 |

La soluzione acquosa ha debole reazione acida. Facendo bollire la soluzione, la sostanza si scompone poco alla volta perdendo anidride carbonica, ammoniaca, e dando in ultimo α-alanina. Si unisce alle basi ed agli acidi come fa il suo isomero, l'asparagina.

*Sale di rame.* $(C_4 H_7 N_2 O_3)_2$ Cu. — Questo sale si può ottenere scaldando moderatamente la soluzione concentrata dell'iso-asparagina con ossido idrato di rame, od anche con carbonato di rame. Il sale si depone per raffreddamento del filtrato in piccole tavole sottili, di color bleu, poco solubili nell'acqua fredda. È anidro.

gr. 0,3890 di sostanza diedero gr. 0,095 di CuO, pari a Cu 0,0758

Da cui si ha:

| | trovato | calcolato per $(C_4 H_7 N_2 O_3)_2$ Cu |
|---|---|---|
| Cu | 19,48 % | 19,43 |

## RELAZIONE

letta dal Socio STRUEVER, relatore, a nome anche del Socio CANNIZZARO, nella seduta del 9 gennaio 1887, sulla Memoria dell'ing. GIUSEPPE LA VALLE, intitolata: *Studio cristallografico di alcuni nuovi derivati dell'acido iso-succinico.*

« L'ing. La Valle ha sottoposto all'esame cristallografico e, ove era possibile, anche fisico, una serie di sostanze artificiali studiate dal lato chimico dal prof. Körner, e presenta i risultati ottenuti.

« Sono otto le sostanze esaminate, di cui una dal dott. Lorenzo Bucca, e sono:

1. L'ammide dell'acido $\alpha$-ammido-iso-succinico.
2. Cloridrato dello stesso.
3. Solfato id.
4. Nitrato id.
5. Acido $\alpha$-ammido-iso-succinico.
6. Sale sodico dello stesso.
7. Sale acido di rame dello stesso.
8. Acido $\alpha$-ammido-iso-succinaminico.

« La Memoria è accompagnata da una tavola ben eseguita.

« Trattandosi di risultati tutti nuovi, bene accertati e bene esposti, la vostra Commissione propone l'inserzione della Memoria negli Atti dell'Accademia ».

# Studio cristallografico di alcuni nuovi derivati dell'acido iso-succinico.

Memoria dell'ing. G. LA VALLE.

(Con una tavola)

---

Il prof. Körner e il dott. Menozzi avendo intrapreso lo studio chimico di alcuni nuovi derivati dell' *acido iso-succinico*, ottennero delle sostanze cristallizzate che vollero inviarmi per farne lo studio cristallografico.

Hanno preparato l' ammide dell' acido $\alpha$-ammido-iso-succinico ($C_4H_9N_3O_2$) ed i corrispondenti sali: cloridrato, solfato e nitrato. Inoltre avendo ottenuto l'acido di formola $C_4H_7NO_4$, di questo prepararono il sale sodico $\beta$ e quello acido di rame. Finalmente ottennero l'acido $\alpha$-ammido-iso-succinamico o iso-asparagina.

Nel mentre presento i risultati cristallografici di queste sostanze, rimando alla Memoria precedente dei suddetti autori per ciò che riguarda la parte chimica di tali composti.

## Ammide dell'acido $\alpha$-ammido-iso-succinico ($C_4H_9N_3O_2$).

Sistema cristallino: Monoclino.
Costanti: $a:b:c = 1.8022:1:$ ind.°

$$\beta = 77°.48'.$$

Forme osservate: (001), (100), (110) fig. 1.
Combinazioni: (001). (110); (001) (100) (110).

| Angoli | Misurati | Calcolati | n |
|---|---|---|---|
| 100:110 | 60°.35′ | * | 2 |
| 100:001 | 77. 48 | * | 2 |
| 110:001 | 83. 48 | 84°.2′.32″ | 6 |

Una direzione di estinsione fa con l' asse $a$ nell' angolo acuto $\beta$ un angolo di 10° circa.

Sul pinacoide (001) (nell'olio) osservasi la figura d' interferenza a fortissima dispersione inclinata e col piano degli assi ottici parallelo a (010).

I cristalli or si presentano tabularî secondo (001) fig. 2, or prismatici come nella fig. 3, ed altra volta tabularî secondo una faccia del prisma verticale fig. 4. L'aspetto fisico di esse è differente, giacchè la base mentre è splendentissima e di aspetto vitreo,

le faccie dei prismi presentano aspetto sericeo derivante dalla struttura fibrosa dei cristalli nel senso dell'asse verticale.

*Cloridrato dell'ammide dell'acido α-ammido-isosuccinico* $C_4H_9N_3O_2HCl$.

Sistema cristallino: Trimetrico.
Costanti: a:b:c = 0,9524:1:0,6509.
Forme osservate: (100), (110), (010), (101), (011) fig. 5.
Combinazioni: (100) (110) (010) (101)
(100) (110) (010) (101) (011) fig. 6.

| Angoli | Misurati | Calcolati | n |
|---|---|---|---|
| 101:$\bar{1}$01 | 68°.42′ | * | 3 |
| 101:110 | 65. 53 | * | 4 |
| 100:110 | 43. 38 | 43°.36′.8″ | 4 |
| 110:011 | 67. 54. 30 | 67. 54. 5 | 2 |

Bisettrice acuta normale a (010).
Piano degli assi ottici (001).
Fortissima dispersione.

Questa sostanza tende a cristallizzare in grossi cristalli, ma imperfetti e non misurabili, tanto che con difficoltà ho potuto avere pochissimi cristallini perfetti ed anche completi alle due estremità i quali sempre sono allungati secondo l'asse verticale.

*Solfato dell'ammide dell'acido α-ammido-isosuccinico* $(C_4H_9N_3O_2)SO_4H_2.2H_2O$.

Sistema romboedrico. Eimedria a faccie parallele (*Sella*).
Costanti più probabili:
Angolo del romboedro primitivo $\alpha = 67°.25'$.
Angolo degli assi: $\xi = 128°.34'$.
Rapporto degli assi: a:c = 1:0,57362.
Forme osservate: (111), (100), (22$\bar{1}$), (11$\bar{2}$), $\pi$(41$\bar{2}$) fig. 7 e 8.

| Angoli | n | Misurati | Calcolati |
|---|---|---|---|
| 100.111 | 12. | 39°.51′.19″ | 39°.51′.11″ |
| 001.2$\bar{1}$2 | 12. | 37. 18. 40 | 37. 22. 32 |
| 100.11$\bar{2}$ | 8. | 71. 13. 52 | 71. 18. 39 |
| 41$\bar{2}$.11$\bar{2}$ | 7. | 44. 30. 51 | 44. 34. 47 |
| 2$\bar{1}$2.$\bar{1}$22 | 10. | 67. 26. 15 | 67. 25. — |

Questi cristalli furono studiati dal dott. L. Bucca.

Dalla presenza costante dei due romboedri (100) e (22$\bar{1}$) sembrerebbe possibile considerarli come formanti una piramide esagona, e invece il romboedro $\pi$(41$\bar{2}$) come uno di 1° o di 2° ordine. A ciò però si oppone: 1° il fatto che malgrado l'associazione costante dei due romboedri (100) (22$\bar{1}$), quest'ultimo è sempre meno sviluppato; 2° che inoltre osservando al microscopio la base (fig. 9), essa ci presenta delle figure

di corrosione in forma di triangoli regolari coi lati paralleli agli spigoli che il romboedro (100) fa colla base, e cogli angoli rivolti agli spigoli stessi. Per potere considerare i due romboedri suddetti come formanti una piramide esagona, bisognerebbe che queste figure di corrosione fossero esagone, o se triangolari, coi lati paralleli allo spigolo che il romboedro $(42\bar{1})$, che allora sarebbe di 1° o 2° ordine, formerebbe colla base.

*Nitrato dell' ammide dell' acido-ammido-isosuccinnico* $C_4H_9N_3O_2.NO_3H$.

Sistema cristallino: Trimetrico.
Costanti più probabili: a:b:c = 0,8049:1:0,6361.
Forme e combinazioni osservate:
(111) (110) (101) (011) (021) (001) (100) (010) fig. 10 e 11.

| Angoli | Misurati | Calcolati | n |
|---|---|---|---|
| 111:101 | 26°.30′.45″ | 26°.31′.16″ | 8 |
| 111:011 | 33. 46 — | 33. 41. 46 | 8 |
| 101:$\bar{1}$01 | 76. 21 — | 76. 38. 14 | 1 |
| 011:0$\bar{1}$1 | 64. 58 — | 64. 55. 6 | 2 |
| 011:021 | 19. 5 — | 19. 22. 14 | 2 |
| 100:110 | — | 38. 49. 45 | — |

Per la grande solubilità di questo sale non si son potute ottenere delle lamine per studiare le proprietà ottiche.

I cristallini sono incolori, di aspetto vitreo, e si presentano o allungati secondo l'asse verticale, ovvero tabulari secondo una delle faccie della forma (110).

Acido $\alpha$-ammido-iso-succinico $C_4H_7NO_4$.

Sistema cristallino: Trimetrico.
Costanti: a:b:c = 0,7180:1:0,5963.
Forme e combinazioni osservate: (010), (110), (011) fig. 12 e 13.

| Angoli | Misurati | Calcolati |
|---|---|---|
| 010:011 | 59°.11′.33″ | * |
| 010:110 | 54. 19. 20 | * |
| 110:011 | 72. 19. 33 | 72°.37′.13″ |

L'abito dei cristallini è costantemente quello rappresentato nella fig. 13, cioè tabulare più o meno secondo (010), ma poi molto allungati nel senso dell'asse verticale. La massima dimensione nella sezione orizzontale non arriva mai al mezzo millimetro.

Non mi fu posssibile poter fare osservazioni ottiche in tali cristallini.

*Sale sodico* $\beta$ $C_4 H_6 NO_4 Na . 4H_2 O$ .

Sistema cristallino: Monoclino.
Costanti cristallografiche:

$$a:b:c = 0{,}6127:1:0{,}7931$$
$$\beta = 83°.26.'50''.$$

Forme e combinazioni osservate:
(010), (110), (011), (001), (101), ($\bar{1}$01) fig. 14 e 15.

| Angoli | Misurati | Calcolati | n |
|---|---|---|---|
| 110:010 | 54°.42′ | * | 4 |
| 001:011 | 38. 14 | * | 1 |
| 110:011 | 64. 29 | * | 2 |
| $\bar{1}$10:011 | 73. 37 | 73°.28′.25″ | 1 |
| 110:101 | 50. 39 | 50. 38. 4 | 1 |
| $\bar{1}$10:001 | 95. 30 | 95. 20. 39 | 2 |
| $\bar{1}$01:001 | 51. 12 | 51. 42. 4 | 1 |
| 001:101 | 45. 18 | 44. 26. 52 | 1 |

Sul piano di simmetria una direzione di estinsione fa un angolo di 37° circa con l'asse *c* nell'angolo ottuso degli assi.
I cristalli sono incolori e semitrasparenti di aspetto e splendore grasso.
Cristallizzano in aggruppamenti di grossi cristalli imperfetti e non misurabili.

*Sale acido di rame* $(C_4 H_6 NO_4)_2 Cu$ .

Sistema cristallino: Monoclino.
Costanti: $a:b:c = 1{,}2221:1:1{,}0572$.

$$\beta = 83°.1'.51''$$

Forme e combinazioni osservate:
(001), (110), (010), (111), (100) fig. 16 e 17.

| Angoli | Misurati | | Calcolati | n |
|---|---|---|---|---|
| | Medie | Limiti | | |
| 100:110 = 50°.30′ | | 49°.56′ — 50°.48′ | * | 10 |
| 110:111 = 34. 45 | | 34. 15 — 34. 47 | * | 6 |
| 111:1$\bar{1}$1 = 73. 44 | | 73. 31 — 73. 56 | * | 2 |
| 111:100 = 55. 36 | | 55. 26 — 55. 52 | 55°.40′.18″ | 3 |
| 111:001 = 50. 52 | | 50. 44 — 50. 59 | 50. 49. 25 | 5 |
| 100:001 = 83. 21 | | 83. 5 — 83. 38 | 83. 1. 51 | 2 |

Sul piano di simmetria una direzione di estinsione fa nell'angolo ottuso degli assi un angolo di 45° circa con l'asse a .

Sulla (001) osservasi un apice d'iperbole.

I cristallini hanno colore turchino e sempre presentano il pinacoide (010) a superficie scabra ed irregolare; le altre faccie sono più o meno piegate e riflettono più immagini.

### Acido $\alpha$-ammido-iso-succinammico $C_4 H_8 N_2 O_3$.

Sistema cristallino: Trimetrico.

Costanti: a:b:c = 0,57039:1:1,08749.

Forme e combinazioni osservate: (110), (011), (001) fig. 18 e 19.

| Angoli | Misurati | Calcolati | n |
|---|---|---|---|
| 011:001 | 47°.24′ | * | 6 |
| 110:1$\bar{1}$0 | 59. 24 | * | 2 |
| 110:011 | 68. 40 | 68°.36′.40″ | 4 |

La piccolezza dei cristalli, oltrechè li ebbi aggruppati, non mi ha permesso di aggiungervi le osservazioni ottiche.

Due soli individui semplici che ho potuto scegliere per le misure goniometriche, non superano in dimensioni il millimetro.

# RELAZIONE

letta dal Socio G. Battaglini, relatore, a nome anche del Socio Riccardo De Paolis, nella seduta del 14 novembre 1886, sulla Memoria del dott. Pietro Visalli, intitolata: *Sulle correlazioni in due spazî a tre dimensioni.*

« Questa Memoria comprende tre parti di uno studio sopra uno stesso argomento.

« Nella prima parte l'autore, dopo di aver fatto osservare come la ricerca delle correlazioni eccezionali fra due spazî a tre dimensioni si può far dipendere da quella delle collineazioni eccezionali fra i detti spazî, fonda quest'ultima ricerca sull'esame dei casi eccezionali che possono presentare le collineazioni fra due coppie di piani corrispondenti nei due spazî proposti; con un' analisi minuta delle diverse posizioni che possono avere i punti e le rette eccezionali nei suddetti piani, egli giunge a stabilire i seguenti cinque casi di collineazioni eccezionali fra i due spazî:

« 1° Con un punto eccezionale in uno spazio ed un piano eccezionale nell'altro.

« 2° Con una retta eccezionale in ciascuno spazio.

« 3° Con un punto eccezionale ed una retta eccezionale, che passa per il punto, in uno spazio, e con un piano eccezionale ed una retta eccezionale, situata nel piano, nell'altro spazio.

« 4° Con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, che passa per il punto, in ciascuno spazio.

« 5° Con un punto eccezionale, una retta eccezionale che passa per il punto, ed un piano eccezionale che passa per la retta, in ciascuno spazio.

« Dalle collineazioni eccezionali fra i due spazî passando alle correlazioni eccezionali, l'autore perviene a sette correlazioni eccezionali fra due spazî a tre dimensioni; per tre di esse in ciascuno spazio vi è un punto eccezionale, o una retta eccezionale, o un piano eccezionale, e si dicono correlazioni eccezionali di 1° ordine; per altre tre in ciascuno spazio vi è un punto eccezionale con una retta eccezionale che passa per il punto, o pure una retta eccezionale con un piano eccezionale che passa per la retta, o finalmente un piano eccezionale con un punto eccezionale sul piano, e si dicono correlazioni eccezionali di 2° ordine; la settima poi con un punto eccezionale, una retta eccezionale che passa per il punto, ed un piano eccezionale che passa per la retta, in ciascuno spazio, si dice correlazione eccezionale di 3° ordine.

« Chiamando *coniugati* due elementi (punti, rette o piani) in una correlazione, quando l'elemento (piano polare o polo) che corrisponde ad uno di essi (punto o piano) nella correlazione appartiene all'altro, e notato il numero delle condizioni affinchè due dati elementi siano coniugati, si trova che 15 di tali condizioni determinano la correlazione fra due spazî: premesso ciò, l'autore considera i sistemi semplicemente infiniti delle correlazioni che soddisfano a 14 condizioni; chiamando *caratteristiche* di

un sistema semplicemente infinito di correlazioni i numeri delle correlazioni del sistema per le quali sono coniugati due punti, o pure due piani, dati ad arbitrio, l'autore trova due relazioni che legano le due caratteristiche $(\mu, \nu)$ del sistema con i tre numeri $(\pi, \lambda, \psi)$ che indicano rispettivamente quante correlazioni eccezionali di 1° ordine appartengono al sistema proposto (le sole che esso possa avere) con un punto eccezionale, con un piano eccezionale, o con una retta eccezionale in ciascuno spazio.

« In seguito egli studia i sistemi semplicemente infiniti di correlazioni che soddisfano a 14 condizioni *elementari*, che esprimano cioè come un certo numero ($m$ o $n$) di punti, o di piani, del primo spazio siano poli, o piani polari, di altrettanti piani, o punti, del secondo spazio, e che un certo numero ($p$ o $q$) di coppie di punti, o di piani, nei due spazî, siano di elementi coniugati; indicando con $(m\,n\,p\,q)$ un tale sistema, l'autore mostra che di questi sistemi ve ne sono 66, ma per averne le caratteristiche basta trovarle per soli 36 tra essi; egli in questa prima Memoria fa la ricerca delle caratteristiche $(\mu, \nu)$ e dei tre numeri $(\pi, \lambda, \psi)$ relativi alle correlazioni eccezionali di 1° ordine, per i seguenti sei sistemi:

$$(4020)\,,\ (4011)\,,\ (3120)\,,\ (3111)\,,\ (2220)\,,\ (2211).$$

« Nella seconda parte l'autore continua la ricerca delle caratteristiche $(\mu, \nu)$ e dei numeri $(\pi, \lambda, \psi)$ per gli altri trenta sistemi di correlazioni che soddisfano a 14 condizioni elementari; egli distribuisce quei sistemi in 9 gruppi (dei quali 3 sono stati discussi nella parte prima), e compie la discussione dei sistemi di correlazioni appartenenti agli altri 6 gruppi giovandosi di alcune relazioni che egli trova tra le caratteristiche $(\mu, \nu)$, i numeri $(\pi, \lambda, \psi)$ relativi alle correlazioni eccezionali di 1° ordine per alcuni di questi sistemi, ed altri tre numeri $(\varrho, \sigma, \tau)$ relativi alle correlazioni eccezionali di 2° ordine per alcuni altri dei sistemi. Dopo ciò l'autore prende a determinare il numero delle correlazioni che soddisfano a 15 condizioni elementari, e si giova in questa ricerca di alcune relazioni che egli trova tra i numeri di correlazioni che soddisfano a 13 o 12 condizioni elementari per alcuni sistemi, ed i numeri di correlazioni eccezionali di 1° ordine per altri sistemi.

« Nella terza parte l'autore considera un sistema doppiamente infinito di correlazioni, assoggettate cioè a 13 condizioni; in questo sistema vi sono tre sistemi semplicemente infiniti di correlazioni eccezionali di 1° ordine (con punti, piani o rette eccezionali), ed un numero finito $(\varrho, \sigma, \tau)$ di correlazioni eccezionali di 2° ordine (con punti e piani eccezionali, con piani e rette eccezionali, o con rette e punti eccezionali); egli tratta delle relazioni che legano le correlazioni eccezionali di 1° ordine a quelle di 2° ordine, e della ricerca delle correlazioni eccezionali di 2° ordine che soddisfano a 13 condizioni elementari. In questa ricerca si hanno a considerare 30 sistemi doppiamente infiniti di correlazioni che soddisfano a 13 condizioni elementari, distribuiti in 9 gruppi, e per ciascuno di essi l'autore determina i numeri $(\varrho, \sigma, \tau)$. Finalmente dopo queste determinazioni egli ritrova i numeri $(\pi, \lambda, \psi)$ relativi alle correlazioni eccezionali di 1° ordine per i sistemi che soddisfano a 14 condizioni elementari, ottenuti già, per altra via, nella parte seconda.

« Questa elaborata Memoria del sig. Visalli costituisce uno studio accurato e completo sulle correlazioni fra due spazî a tre dimensioni; crediamo perciò che essa possa essere inserita negli Atti dell'Accademia ».

Fig. 4.

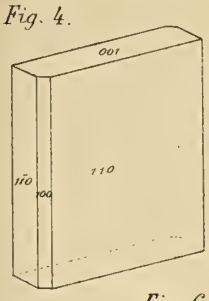



Fig. 1.

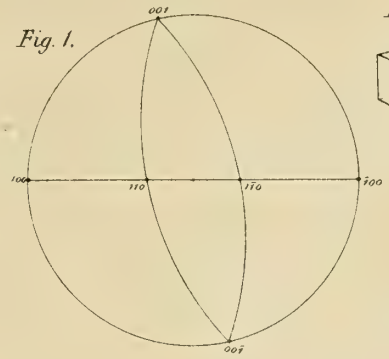



Fig. 2

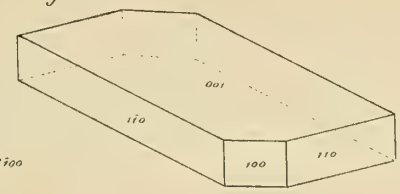



Fig. 3.

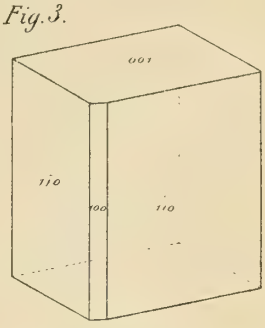



Fig. 9.

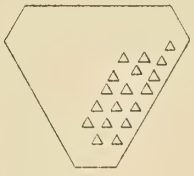


Fig. 6.

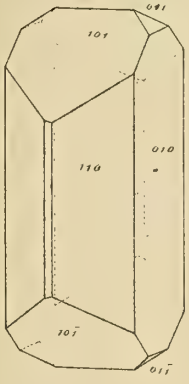



Fig. 5.

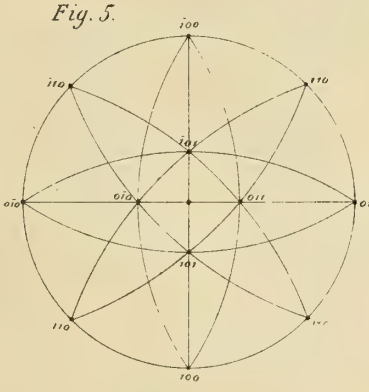



Fig. 7.

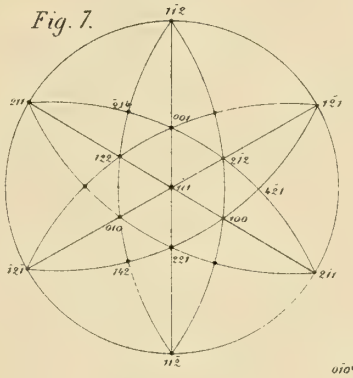



Fig. 8.

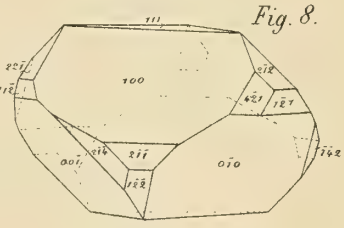



Fig. 12.

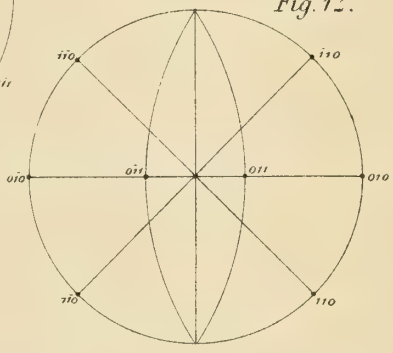



Fig. 11.

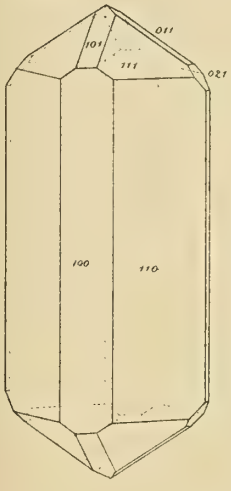



Fig. 10.

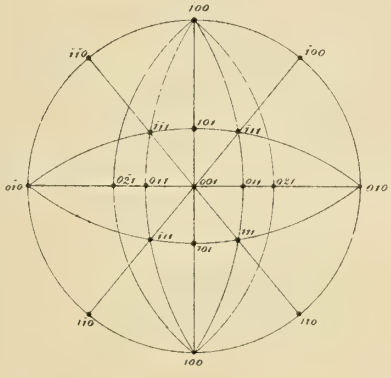



Fig. 13.

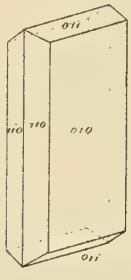



Fig. 17.

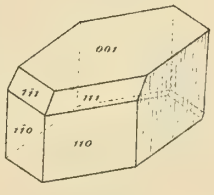



Fig. 15.

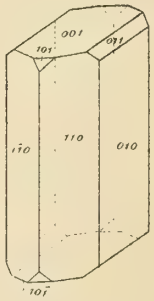



Fig. 14.

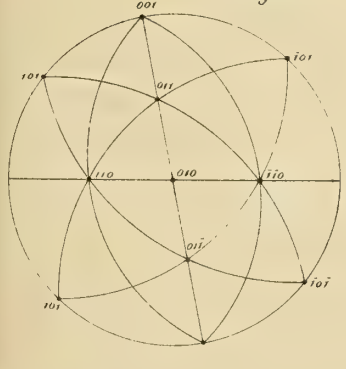



Fig. 16.

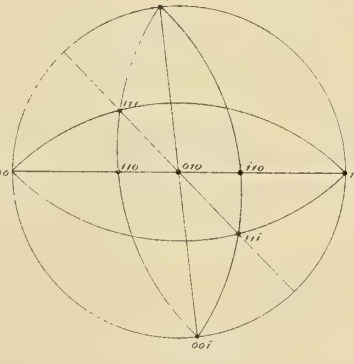



Fig. 18.

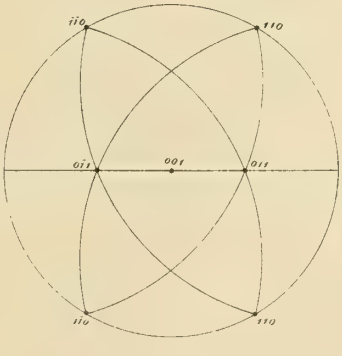
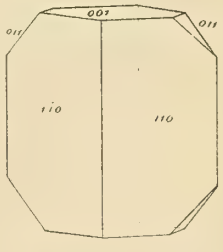



Fig. 19.



# Sulle correlazioni in due spazî a tre dimensioni.

Memoria del dott. PIETRO VISALLI.

## PARTE PRIMA

In questa prima parte di questa Memoria, sulle correlazioni in due spazî a tre dimensioni, mi propongo lo studio delle proprietà di tutte le correlazioni eccezionali, che si possono stabilire nei due spazî, e la ricerca delle relazioni, che legano le caratteristiche dei sistemi semplicemente infiniti di correlazioni, con il numero delle correlazioni eccezionali, che esistono in questi sistemi.

Studierò inoltre alcuni di questi sistemi, cercando per ciascuno di essi le correlazioni eccezionali e le caratteristiche.

1. È noto: che se due spazî $\Sigma$, $\Sigma'$ sono collineari, e se mediante una correlazione, si costruisce uno spazio $\Sigma_1$ correlativo a $\Sigma'$, sarà anche $\Sigma_1$ correlativo a $\Sigma$; e la correlazione, fra $\Sigma_1$ e $\Sigma$, sarà ordinaria od eccezionale, secondo che la collinearità fra $\Sigma$ e $\Sigma'$ è ordinaria od eccezionale; e viceversa. Di modo che, la ricerca delle correlazioni eccezionali fra due spazî a tre dimensioni, si può far dipendere da quella delle collinearità eccezionali fra i detti spazî.

### I.

### Collinearità in due spazî a tre dimensioni.

2. Per stabilire una collinearità in due spazî $\Sigma$, $\Sigma'$, si assegnino in $\Sigma$ due sistemi piani arbitrarî $\sigma$, $\sigma_1$; ma non sovrapposti, e si facciano ad essi corrispondere in $\Sigma'$ due sistemi piani $\sigma'$, $\sigma'_1$, ordinatamente collineari a $\sigma$, $\sigma_1$ e non sovrapposti; ma tali che alla punteggiata $\sigma\sigma_1$ di $\Sigma$ corrisponda la punteggiata $\sigma'\sigma'_1$ di $\Sigma'$. In tal modo, ad un piano $\alpha'$ di $\Sigma$, che sega $\sigma$, $\sigma_1$, secondo le rette $\alpha\sigma$, $\alpha\sigma_1$, corrisponde un piano $\alpha'$ di $\Sigma'$ individuato dalle rette $\alpha'\sigma'$, $\alpha'\sigma'_1$, corrispondenti rispettivamente alle rette $\alpha\sigma$, $\alpha\sigma_1$, e concorrenti nel punto della punteggiata $\sigma'\sigma'_1$, che corrisponde al punto $\alpha\sigma\sigma_1$ della punteggiata $\sigma\sigma_1$. E ad un punto P, centro di una stella di piani in $\Sigma$, corrisponde il punto P', intersezione dei piani corrispondenti a quelli della stella P.

Se le collinearità fra $\sigma$ e $\sigma'$, fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$ sono ordinarie, tale sarà la collinearità fra $\Sigma$ e $\Sigma'$; ma se la collinearità fra $\sigma$ e $\sigma'$, o quella fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$, o tutte e due

sono eccezionali, eccezionale sarà la collinearità fra i due spazî. E viceversa, se la collinearità fra $\Sigma$ e $\Sigma'$ è ordinaria, deve essere ordinaria la collinearità fra tutte le coppie di piani corrispondenti; mentre che se fra i due spazî è eccezionale, tale deve essere fra tutte o fra alcune coppie di piani corrispondenti. Sicchè considerando tutte le collinearità eccezionali fra $\sigma$ e $\sigma'$, e fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$ e dando agli elementi eccezionali di questi piani tutte le possibili posizioni, otterremo tutte le collinearità eccezionali fra i due spazî.

3. Supponiamo che la collinearità fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$ sia ordinaria, e quella fra $\sigma$ e $\sigma'$ eccezionale di primo ordine [1]; cioè con un punto eccezionale E in $\sigma$ ed una retta eccezionale $e'$ in $\sigma'$.

Se il punto E si trovasse sopra la retta $\sigma\sigma_1$, a tutti i punti di questa retta, considerata come appartenente a $\sigma$, corrisponderebbe un sol punto di $e'$; mentre che considerata come appartenente a $\sigma_1$, ad ogni suo punto corrisponderebbe un punto della corrispondente retta in $\sigma'_1$; quindi le rette $\sigma\sigma_1$, $\sigma'\sigma'_1$ non potrebbero essere corrispondenti e perciò E non può trovarsi sopra $\sigma\sigma_1$.

Se E è un punto qualunque di $\sigma$, alla retta $\sigma\sigma_1$, di $\sigma$, deve corrispondere la retta $e'$ di $\sigma'$; cioè deve essere $e \equiv \sigma'\sigma'_1$. In tal caso ad ogni punto di $\sigma\sigma_1$ si può far corrispondere un punto di $\sigma'\sigma'_1$, e viceversa ad un punto di questa retta un punto della prima.

Un piano qualunque $\alpha$, dello spazio $\Sigma$, sega $\sigma$, $\sigma_1$ secondo le rette $\alpha\sigma$, $\alpha\sigma_1$; alla prima corrisponde $e'$, alla seconda una determinata retta di $\sigma'_1$; quindi al piano $\alpha$ corrisponde il piano $\sigma'_1$. Se il piano $\alpha$ passa per il punto eccezionale E, alla retta $\alpha\sigma$ corrisponde un' indeterminata retta di $\sigma'$, passante per un determinato punto di $e'$; mentre che alla retta $\alpha\sigma_1$, corrisponde una retta di $\sigma'_1$, per lo stesso punto di $e'$; sicchè ad un dato piano per il punto E, corrisponde un indeterminato piano di un fascio, il cui asse è una determinata retta di $\sigma'_1$.

Se il piano $\alpha$, girando attorno ad una retta $r$, condotta per E, descrive un fascio, l'asse del fascio dei piani corrispondenti ad $\alpha$, passerà sempre per uno stesso punto di $\sigma'_1$, che è il punto corrispondente al punto $r\sigma_1$, e descriverà un fascio di raggi projettivo al fascio di piani.

Un piano qualunque $\alpha'$, dello spazio $\Sigma'$, sega $\sigma'$, $\sigma'_1$, secondo le rette $\alpha'\sigma'$, $\alpha'\sigma'_1$; alla prima corrisponde una data retta per E di $\sigma$, alla seconda una retta di $\sigma_1$, che sega la prima in un punto di $\sigma\sigma_1$ (il corrispondente di $\alpha'\sigma'\sigma'_1$): quindi ad un piano $\alpha'$ ed a tutti quelli, che passano per la retta $\alpha'\sigma'_1$, corrisponde un determinato piano per E. A tutti i piani, che passano per un punto $R'_1$ di $\sigma'_1$, corrispondono piani, che passano per E e pel punto $R_1$ di $\sigma_1$, corrispondente ad $R'_1$; quindi possiamo dire: A tutti i piani di un fascio, il cui asse si trova sopra $\sigma'_1$ e passa per un punto dato, corrisponde un piano di un fascio, il cui asse passa per E.

[1] In tal caso al punto eccezionale E corrisponde un punto indeterminato di $\sigma'$, ed a tutti i punti di una retta di $\sigma$, che passa per E, corrisponde un determinato punto di $e'$; ad una retta qualunque di $\sigma$ corrisponde la retta eccezionale $e'$; ma ad una retta di $\sigma$, che passa per E, corrisponde, sopra $\sigma'$, un' indeterminata retta passante per un determinato punto di $e'$. Vedi Hirst, *Note on the Correlation of two Planes*. Annali di Matematica, vol. VI.

Il piano $\sigma'_1$ sega $\sigma'$ secondo la retta $e'$, alla quale corrisponde una retta qualunque di $\sigma$; quindi a $\sigma'_1$ corrisponde un piano qualunque dello spazio $\Sigma$.

Per un punto qualunque P', dello spazio $\Sigma'$, passa una stella di piani, alla quale corrisponde una stella di piani passanti per E; quindi a P' corrisponde E. Se però P' si trova sopra $\sigma'_1$, ai piani per P' corrispondono i piani di un fascio il cui asse passa per E, eccezion fatta del piano $\sigma'_1$, al quale corrisponde un piano qualunque; quindi a P' corrispondono tutti i punti dell'asse, cioè di una retta passante per E; e se il punto P' descrive una retta di $\sigma'_1$, la retta, luogo dei punti corrispondenti, descriverà un piano, il piano corrispondente ai piani, che passano per la retta descritta da P', e formerà sopra di esso un fascio projettivo alla punteggiata. E viceversa.

Abbiamo quindi fra i due spazî una collinearità con un punto eccezionale E in $\Sigma$ ed un piano eccezionale $\sigma'_1$ in $\Sigma'$.

Essendo la stella E prospettiva al sistema piano $\sigma_1$, e questo collineare a $\sigma'_1$; risulta che la stella E ed il sistema piano $\sigma'_1$ sono collineari.

Se avessimo supposto la collinearità fra $\sigma$ e $\sigma'$ con una retta eccezionale in $\sigma$ ed un punto eccezionale in $\sigma'$, saremmo giunti ad una collinearità con un piano eccezionale nel primo spazio ed un punto eccezionale nel secondo.

4. Sia eccezionale di primo ordine tanto la collinearità fra $\sigma$ e $\sigma'$ come quella fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$; e precisamente vi sieno nei piani $\sigma, \sigma_1$, i punti eccezionali $E, E_1$, e nei loro piani collineari le rette eccezionali $e', e'_1$.

*a*) Se i punti $E, E_1$ non si trovano sulla retta $\sigma\sigma_1$, le rette eccezionali devono coincidere con la corrispondente di $\sigma\sigma_1$, cioè deve essere $\sigma'\sigma'_1 \equiv e' \equiv e'_1$. Con ragionamenti analoghi a quelli già fatti precedentemente, e che crediamo inutile ripetere ogni volta, tenendo sempre conto della nota precedente, si ottiene che:

Ad un piano qualunque dello spazio $\Sigma$ corrisponde un indeterminato piano passante per $\sigma'\sigma'_1$; mentre che ad un dato piano per $\overline{EE_1}$ corrisponde un indeterminato piano passante per un determinato punto di $\sigma'\sigma'_1$; e viceversa.

E ad un punto qualunque di $EE_1$ corrisponde un indeterminato punto dell'altro spazio; mentre che a tutti i punti, di un dato piano per $EE_1$, corrisponde un determinato punto di $\sigma'\sigma'_1$; e viceversa.

Abbiamo così una collinearità con due rette eccezionali; ma però indeterminata. Otterremo in seguito la detta collinearità completamente determinata (5, 6).

*b*) Coincidano i due punti $E, E_1$, e coincidano pure le rette $e', e'_1$ ciò che è possibile; e sia R' il punto di $\sigma'\sigma'_1$, che corrisponde a tutti i punti di $\sigma\sigma_1$; mentre che ad E corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'\sigma'_1$.

Diremo corrispondenti due rette di $\sigma$ e $\sigma_1$, passanti per E, quando ai punti di esse corrisponde lo stesso punto di $\sigma'\sigma'_1$. Queste rette corrispondenti formano due fasci concentrici, projettivi alla punteggiata $\sigma'\sigma'_1$ e perciò projettivi fra loro; ma hanno il raggio $\sigma\sigma_1$ unito, quindi sono prospettivi, ed i piani, che uniscono due raggi corrispondenti, si segano tutti secondo una retta $e$ passante per E.

Questo caso è analogo al precedente, solo però, invece della retta $EE_1$, vi è la retta $e$, sulla quale i due punti $E, E_1$, sono infinitamente vicini; perciò si ottiene una collinearità indeterminata con due rette eccezionali.

*c*) Lasciando i punti E, $E_1$ coincidenti, supponiamo che le rette eccezionali $e', e'_1$ non coincidano con la retta $\sigma'\sigma'_1$. Le tre rette $e', e'_1, \sigma'\sigma'_1$ devono però concorrere in uno stesso punto P', che è il corrispondente di tutti i punti di $\sigma\sigma_1$; mentre che gli altri punti di $\sigma'\sigma'_1$ corrispondono ad E. Si ottiene allora che:

Ad ogni punto di $\Sigma$ (punto di $\Sigma'$), corrisponde il piano $e'e'_1$ (il punto E).

Ad un dato piano per E (punto del piano $e'e'_1$), corrisponde un indeterminato piano, passante per una data retta di $e'e'_1$ (un indeterminato punto di una data retta per E).

A tutti i piani di un fascio, che ha per asse una retta per E, corrispondono i punti di una stella, il cui centro è un dato punto di $e'e'_1$; ed a tutti i punti di una retta, situata sopra il piano $e'e'_1$ corrispondono i punti di un dato piano per E.

Si ottiene così una collinearità eccezionale con un punto eccezionale in $\Sigma$ ed un piano eccezionale in $\Sigma'$ (3).

*d*) Allo stesso risultato giungeremmo se facessimo coincidere con $\sigma'\sigma'_1$ la retta $e'$ oppure la $e'_1$. Se poi i punti eccezionali E, $E_1$ dei due piani, sono tutti e due sopra $\sigma\sigma_1$ e non coincidono, oppure se un solo di essi si trova sopra la detta retta, è facile vedere, che $\sigma\sigma_1$ e $\sigma'\sigma'_1$ non si possono ritenere come corrispondenti e quindi la collinearità non si può stabilire.

5. Sieno ancora eccezionali di primo ordine le due collinearità, e vi sia in $\sigma$ un punto eccezionale E ed in $\sigma'$ la retta eccezionale $e'$; ma in $\sigma_1$ vi sia la retta eccezionale $e_1$ e nel suo piano collineare il punto eccezionale $E'_1$.

*a*) Se il punto E non si trova sopra $\sigma\sigma_1$ e questa retta non coincide con la retta eccezionale $e_1$, è necessario che $e'$ coincida con $\sigma'\sigma'_1$ e che su questa si trovi il punto $E'_1$; ma in tal caso le rette $\sigma\sigma_1, \sigma'\sigma'_1$ non possono ritenersi come corrispondenti; perchè ad ogni punto di $\sigma\sigma_1$, considerato appartenente a $\sigma$, corrisponde un determinato punto di $e' \equiv \sigma'\sigma'_1$; mentre che, considerato come appartenente a $\sigma_1$, ha per corrispondente $E'_1$.

*b*) Poniamo E sopra $\sigma\sigma_1$. Con un ragionamento analogo al precedente è facile mostrare, che è necessario che $e_1$, supposta distinta di $\sigma\sigma_1$, passi per E. Il punto eccezionale $E'_1$ del piano $\sigma'_1$ dovrà trovarsi sopra $\sigma'\sigma'_1$, e la retta $e'$ può o no coincidere con $\sigma'\sigma'_1$; ma, se non coincide, deve passare per $E'_1$. In quest'ultimo caso ad E, come punto di $\sigma$, corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'$ e quindi di $\sigma'\sigma'_1$; come punto di $\sigma_1$ e precisamente di $e_1$, gli corrispondono i punti di una retta di $\sigma'_1$, passante per $E'_1$, che abbiamo presa come retta $\sigma'\sigma'_1$; agli altri punti di $\sigma\sigma_1$, per la stessa ragione si può far corrispondere il punto $E'_1$.

Un piano qualunque $\alpha$, che passa per un dato punto di $e_1$, sega $\sigma\sigma_1$ secondo $\alpha\sigma, \alpha\sigma_1$; alla retta $\alpha\sigma$ corrisponde $e'$, alla retta $\alpha\sigma_1$, qualunque essa sia, purchè passi per lo stesso punto di $e_1$, corrisponde una sola retta di $\sigma'_1$ per $E'_1$; quindi:

Ad un piano dello spazio $\Sigma$, ed a tutti quelli di una stella, che ha il centro in un dato punto di $e_1$, corrisponde un determinato piano per $e'$; e se il centro della stella descrive la punteggiata $e_1$, il piano, corrispondente ai piani della stella, descriverà un fascio avente per asse $e'$, e projettivo alla punteggiata.

Similmente ad un dato piano per $e_1$, corrisponde una stella di piani, il cui centro è un determinato punto di $e'$, ed il fascio di piani avente per asse $e_1$ è projettivo alla punteggiata $e'$.

Per un punto qualunque P di $\Sigma$, passa una stella di piani; a tutti questi piani corrispondono piani per $e'$, eccetto al piano $Pe_1$, al quale corrispondono tutti i piani di una stella, il cui centro è un punto P' di $e'$. Questo punto, comune a tutti i piani, corrispondenti a quelli che passano per P, è il punto corrispondente a P; e poichè P' dipende dal piano $Pe_1$, possiamo dire:

A tutti i punti, situati sopra un piano, che passa per $e_1$, corrisponde un determinato punto di $e'$; e viceversa. E similmente ad un punto di $e_1$, corrisponde un indeterminato punto di un certo piano per $e'$.

Si ha ancora, che se il punto descrive la punteggiata $e_1$ od $e'$, il piano, luogo dei punti corrispondenti, descriverà un fascio projettivo avente per asse $e'$ od $e_1$.

Risulta così fra i due spazî una collinearità con una retta eccezionale in ogni spazio.

*c*) Abbiamo ammesso precedentemente, che la retta eccezionale $e'$ non coincideva con la retta $\sigma'\sigma'_1$; facciamola ora coincidere, e poniamo $E'_1$ su quel punto di $e'$, che corrisponde a tutti i punti della retta $\sigma\sigma_1$ di $\sigma$; e sia inoltre $\sigma'\sigma'_1 \equiv e'$, quella retta di $\sigma_1$, i cui punti corrispondono al punto E, ritenuto come appartenente ad $e_1$; condizioni necessarie e sufficienti, perchè le rette $\sigma\sigma_1, \sigma'\sigma'_1$ sieno corrispondenti.

Si ricava che:

Ad un piano qualunque di $\Sigma$, corrisponde $\sigma_1$, e viceversa a $\sigma'_1$, corrisponde un piano qualunque di $\Sigma$.

Ad un piano qualunque di $\Sigma$, passante per E, corrisponde un indeterminato piano per $e'$, e viceversa.

Ad un dato piano per $e_1$, corrispondono i piani di una stella, il cui centro è un determinato punto di $e'$, e viceversa a tutti i piani di $\Sigma'$, passanti per un dato punto di $e'$, corrisponde un piano per $e_1$; sicchè al fascio di piani per $e_1$, corrisponde una serie di stelle, i cui centri, situati sopra $e$, formano una punteggiata projettiva al fascio.

Ad un punto P, dello spazio $\Sigma$, ed a tutti quelli del piano $Pe_1$ corrisponde un determinato punto di $e'$, centro della stella corrispondente al piano $Pe_1$; e viceversa.

Ad un punto qualunque di $e_1$, corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'_1$; e viceversa.

Il corrispondente di E è indeterminato, e viceversa ad un punto qualunque di $\Sigma'$ corrisponde E.

Abbiamo così ottenuta una collinearità con un punto eccezionale ed una retta eccezionale, passante per il punto, nello spazio $\Sigma$, ed un piano eccezionale ed una retta eccezionale, giacente sul piano, in $\Sigma'$.

*d*) Sia ancora il punto E un punto di $\sigma\sigma_1$ e con questa retta coincida la $e_1$. Facciamo coincidere $e'$ con $\sigma'\sigma'_1$, perchè altrimenti otteniamo dei casi già studiati nel presente numero. Per potere le due rette $\sigma\sigma_1, \sigma'\sigma'_1$ essere corrispondenti, è necesssario che $E'_1$ si trovi sopra $\sigma'\sigma'_1$, e coincida con quel punto di $e'$, che corrisponde a tutti i punti della retta $\sigma\sigma_1$, considerata appartenente a $\sigma$; e lo stesso dicasi per E; in tal modo ad ogni punto di $\sigma\sigma_1$, corrisponde $E'_1$; mentre che ad E, corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'\sigma'_1$; e viceversa.

Si trova facilmente che:

Ad un piano qualunque di $\Sigma$, corrisponde il piano $\sigma'_1$ e viceversa a $\sigma'_1$, corrisponde un piano qualunque di $\Sigma$.

Ad un piano qualunque per $e_1$, corrisponde un indeterminato piano per $E'_1$; e viceversa.

Ad un piano qualunque per E, corrisponde un indeterminato piano per $e'_1$; e viceversa.

Al piano $\sigma$ corrisponde un piano qualunque; e viceversa.

Ad un punto qualunque di $\Sigma$, corrisponde $E'_1$; ad un punto di $e_1$, corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'_1$; ad un punto di $\sigma$ un indeterminato punto di $e'$; al punto E, corrisponde un punto qualunque di $\Sigma'$; e viceversa.

Abbiamo così una collinearità eccezionale fra $\Sigma$ e $\Sigma'$, con un punto eccezionale, una retta eccezionale, passante per il punto, ed un piano eccezionale, passante per la retta, in ogni spazio.

*e*) Dal presente numero, non ci resta da studiare, che il caso possibile in cui le rette $e_1, e'$ coincidono rispettivamente con $\sigma\sigma_1, \sigma'\sigma'_1$; mentre che i punti eccezionali $E, E'_1$ sono due punti qualunque dei piani $\sigma, \sigma'_1$. Ad un punto P di $\sigma\sigma_1$, considerato come punto di $\sigma$, corrisponde un sol punto P' di $e'$, il quale è il corrispondente di tutti i punti della retta EP; e considerato come punto di $\sigma_1$ e quindi di $e_1$, ha per corrispondente P' e tutti i punti della retta $P'E'_1$; quindi le rette $\sigma\sigma_1, \sigma'\sigma'_1$ si corrispondono punto a punto.

In questo caso, ad un piano qualunque di $\Sigma$, corrisponde $\sigma'_1$ e ad un piano qualunque di $\Sigma'$, corrisponde $\sigma$; e viceversa i piani corrispondenti a $\sigma$, e $\sigma'_1$ sono indeterminati.

Ad ogni piano di un fascio, il cui asse è una retta di $\sigma$ passante per E, corrisponde un indeterminato piano di un fascio, il cui asse è una retta di $\sigma'_1$ per $E'_1$, e viceversa: e gli assi dei fasci di piani corrispondenti descrivono sopra $\sigma$ e $\sigma'_1$ due fasci di raggi prospettivi alle punteggiate $e_1, e'$, e quindi projettivi fra loro.

Ad un punto qualunque di $\Sigma$ corrisponde $E'_1$, e ad un punto qualunque di $\Sigma'$ corrisponde E; e viceversa i corrispondenti di $E, E'_1$, sono indeterminati.

Ad ogni punto di una retta di $\sigma$, passante per E, corrisponde un indeterminato punto di una retta di $\sigma'_1$, passante per $E'_1$, asse del fascio di piani corrispondenti a quelli, che passano per la retta di $\sigma$. E viceversa.

Abbiamo così una collinearità eccezionale fra $\Sigma$ e $\Sigma'$, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, passante per il punto, in ogni spazio.

6. Supponiamo ora, che la collinearità fra $\sigma$ e $\sigma'$ sia eccezionale di secondo ordine [1]; con un punto eccezionale E ed una retta eccezionale $e$, passante pel punto, in $\sigma$; ed un punto eccezionale E' ed una retta eccezionale $e'$, passante pel punto, in $\sigma'$.

[1] Se la collinearità fra i due piani $\sigma, \sigma'$ è eccezionale di secondo ordine, vi è in ogni piano una retta eccezionale ed un punto eccezionale sulla retta; e ad ogni punto di un piano, corrisponde il punto eccezionale dell'altro, ad ogni retta di un piano, corrisponde la retta eccezionale dell'altro; ad un punto di una retta eccezionale un indeterminato punto dell'altra retta eccezionale, ad una retta per il punto eccezionale, un' indeterminata retta per l'altro punto eccezionale (Vedi Hirst, l. c.).

Anzitutto si presenta il caso in cui la collinearità fra $\sigma_1$ e $\sigma_1$ è ordinaria; ma è facile vedere, ch non si può stabilire una collinearità fra i due spazî non essendo univoca la corrispondenza fra le rette $\sigma\sigma_1$, $\sigma'\sigma'_1$.

Studieremo quindi, in questo numero, le diverse collinearità, che si ottengono fra $\Sigma$ e $\Sigma'$, quando la collinearità fra $\sigma_1$ e $\sigma'_1$ è eccezionale di primo ordine.

*a*) Riterremo, in quel che segue nel presente numero, che in $\sigma_1$ vi sia il punto eccezionale $E_1$ ed in $\sigma'_1$ la retta eccezionale $e'_1$.

Se $e$ non coincide con $\sigma\sigma_1$, è necessario, perchè ci possa essere una corrispondenza univoca fra $\sigma\sigma_1$ e $\sigma'\sigma'_1$, che il punto $E_1$ coincida col punto $e\sigma_1$. Supponiamo, che E, il quale deve trovarsi sopra $e$, non coincide con $E_1$; in tal caso alla retta $\sigma\sigma_1$, come appartenente a $\sigma$, deve corrispondere $e'$; come appartenente a $\sigma_1$ deve corrispondere una retta qualunque di $\sigma'_1$, passante per un dato punto di $e'_1$, oppure la $e'_1$ stessa; quindi $e'$ deve coincidere con $\sigma'\sigma'_1$ e con questa retta può o non coincidere la $e'_1$. Nel primo caso si ottiene una collinearità indeterminata con due rette eccezionali, una in ogni spazio (4, *a*); nel secondo, cioè quando $e'_1$ non coincide con $\sigma'\sigma'_1$, si ottiene una collinearità eccezionale con un punto ed una retta eccezionale, passante per il punto, in $\Sigma$, ed una retta ed un piano eccezionale, passante per la retta in $\Sigma'$ (5, *c*).

*b*) Supponiamo ora, che i punti E, $E_1$ coincidono (nel punto $e\sigma_1$). Alla rettta $\sigma\sigma_1$, come retta di $\sigma$, le si può far corrispondere $e'$ od una retta qualunque, passante per E'; considerata come retta di $\sigma_1$, le si può far corrispondere $e'_1$ od una retta di $\sigma'_1$ passante per il punto E', per il quale è necessario che passi la $e'_1$.

Se $e'$ non coincide con $\sigma'\sigma'_1$, sarà $E' \equiv e'\sigma'_1$, ed $e_1$ una retta passante per E', che anche, come abbiamo detto, può coincidere con $\sigma'\sigma'_1$. Con questa posizione degli elementi eccezionali si otterrà una collinearità col punto eccezionale E e la retta eccezionale $e$ nello spazio $\Sigma$, e col piano eccezionale $e'e'_1$; e la retta eccezionale $e'_1$ in $\Sigma'$ (5, *c*).

Se poi $e'$ coincide con $\sigma'\sigma'_1$ sia che $e'_1$ coincida o non con $\sigma'\sigma'_1$, purchè passi per E', otteniamo, una collinearità indeterminata con le rette eccezionali $e$, $e'_1$ (4, *a*).

*c*) Facciamo coincidere la retta $e$ con la retta $\sigma\sigma_1$; il punto $E_1$, perchè vi possa essere una corrispondenza univoca fra le due rette, deve coincidere con E; e per la stessa ragione, la retta $e'$ non può coincidere con $\sigma'\sigma'_1$. La retta $e'_1$ può o non coincidere con $\sigma'\sigma'_1$; ma se non vi coincide deve passare pel punto $e'\sigma'_1$, che in ambo i casi deve essere quel punto di $e'_1$, che corrisponde a tutti i punti della retta $\sigma\sigma_1$ di $\sigma_1$. Così ad ogni punto di $\sigma\sigma_1$, corrisponde il punto $e'e'_1$ di $\sigma'\sigma'_1$; mentre che al punto E, corrisponde un punto indeterminato di $\sigma'\sigma'_1$.

Se E' non coincide con $e'\sigma'_1$, coincida o non $e'_1$ con $\sigma'\sigma'_1$, si ottiene sempre una collinearità eccezionale, con il punto eccezionale E ed il piano eccezionale $\sigma_1$ nello spazio $\Sigma$, ed il punto eccezionale E' ed il piano eccezionale $e'e'_1$ in $\Sigma'$ (5, *e*).

Se poi E' coincide col punto $e'\sigma'_1$, si ottiene una collinearità eccezionale con il punto eccezionale E, la retta eccezionale $e$ ed il piano eccezionale $\sigma_1$ nello spazio $\Sigma$, e col punto eccezionale E', la retta eccezionale $e'_1$ ed il piano eccezionale $e'e'_1$ in $\Sigma'$ (5, *d*).

7. Ci restano infine da studiare le possibili collinearità fra i due spazî $\Sigma$, $\Sigma'$, quando le collinearità, fra le due coppie di piani, sono eccezionali di secondo ordine;

sicchè in ognuno dei 4 piani, vi è una retta eccezionale ed un punto eccezionale sulla retta.

*a*) Supponiamo prima di tutto, che le due rette eccezionali $e$ , $e_1$, dei due piani $\sigma$ , $\sigma_1$, dello spazio $\Sigma$, non coincidono con la retta $\sigma\sigma_1$; ma che però segano quest'ultima in uno stesso punto, senza di che è impossibile stabilire la collinearità fra i due spazî e supponiamo ancora, che E ed $E_1$ non coincidono col punto $ee_1$. Essendo così $\sigma\sigma_1$ una retta qualunque di $\sigma$ e $\sigma_1$, ad essa deve corrispondere la $e'$ di $\sigma'$ e la $e'_1$ di $\sigma'_1$; quindi $e'$ ed $e'_1$ devono coincidere, cioè $\sigma'\sigma'_1 \equiv e' \equiv e'_1$; e perchè $\sigma\sigma_1$ e $\sigma'\sigma'_1$ possano essere corrispondenti è ancora necessario che E' ed $E'_1$ coincidano. Allora ad ogni punto di $\sigma\sigma_1$ corrisponde il punto E' di $\sigma'\sigma'_1$; mentre che al punto $ee_1$, corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'\sigma'_1$

In tal caso ad un piano qualunque di $\Sigma$ corrisponde un indeterminato piano per $\sigma'\sigma'_1$, e viceversa. Ad un piano, che passa per $EE_1$, corrisponde un indeterminato piano per E' e viceversa. Il corrispondente del piano $ee_1$ è indeterminato; e viceversa ad un piano qualunque di $\Sigma'$ corrisponde $ee_1$.

Ad un punto qualunque di $\Sigma$ corrisponde E'; ad un punto qualunque del piano $ee_1$ corrisponde un indeterminato punto di $\sigma'\sigma'_1$; ad un punto della retta $EE_1$, corrisponde un punto indeterminato. E viceversa.

Così siamo giunti ad una collinearità eccezionale fra $\Sigma$ e $\Sigma'$, con un piano eccezionale $ee_1$ ed una retta eccezionale $EE_1$ in $\Sigma$; ed un punto eccezionale E' ed una retta eccezionale $e'$, in $\Sigma'$ (5 , *c*); ma però essa è indeterminata, e l'indeterminazione consiste nella corrispondenza fra i punti di $EE_1$ e i punti di $\Sigma'$, e nella corrispondenza fra i piani passanti per $\sigma'\sigma'_1$ ed i piani dello spazio $\Sigma$.

*b*) Lasciando le rette eccezionali $e$ , $e_1$ nella posizione del caso precedente, poniamo nel punto $ee_1$, uno dei due punti eccezionali, per esempio E. I punti E' , $E'_1$, dello spazio $\Sigma'$, devono sempre coincidere; se coincidono anche le rette $e'$ , $e'_1$, otteniamo la stessa collinearità indeterminata ottenuta precedentemente; ma se $e'$ non coincide con $\sigma'\sigma'_1$ con la quale deve però coincidere $e'_1$, si ottiene una collinearità eccezionale con un punto eccezionale ($E_1$ , E'), una retta eccezionale ($e_1$ , $e'$) ad un piano eccezionale ($ee_1$ , $e'e'_1$) in ogni spazio (5 , *d*).

*c*) Se i punti E ed $E_1$ si trovano tutti e due sopra $\sigma\sigma_1$, senza che con questa retta coincidano le rette eccezionali $e$ , $e_1$, è necessario, che essi coincidano, cioè che sia $E \equiv E_1 \equiv ee_1$ come pure devono coincidere i punti E' , $E'_1$. Delle rette $e'$ , $e'_1$ nessuna, una sola o tutte e due possono coincidere con $\sigma'\sigma'_1$. Nei primi due casi si ha una collinearità con il punto eccezionale E ed il piano eccezionale $ee_1$ nello spazio $\Sigma$, ed il punto eccezionale E' ed il piano eccezionale $e'e'_1$ in $\Sigma'$; ove ad un piano qualunque di uno spazio corrisponde il piano eccezionale dell'altro; ad un punto qualunque di uno spazio il punto eccezionale dell'altro; ad un piano, per un punto eccezionale, corrisponde un indeterminato piano per l'altro punto eccezionale, e ad un punto di un piano eccezionale un indeterminato punto dell'altro piano eccezionale; ciò che prova essere la collinearità indeterminata (5 , *e*). Nel terzo caso, cioè quando $e'$ ed $e'_1$ coincidono, la indeterminazione è maggiore.

*d*) Facciamo ora coincidere una delle rette eccezionali, per esempio $e$, con la retta $\sigma\sigma_1$; è necessario allora che $e_1$ passi per E, e supponiamo che $E_1$ non coincide

con E. Essendo $\sigma\sigma_1$ una retta qualunque di $\sigma_1$, la sua corrispondente deve essere $e'_1$; cioè $e'_1$ deve coincidere con $\sigma'\sigma'_1$, con la quale, come si può vedere, non può coincidere la retta $e$; ma questa deve segarla nel punto $E'_1$.

Qualunque sia la posizione di E' sulla retta $e'$ si ottiene una collinearità eccezionale, con un punto, una retta ed un piano eccezionale in ogni spazio (5 , *d*).

*e*) Se poi $e$ coincide con $\sigma\sigma_1$ ed i punti E , $E_1$ coincidono, dei casi possibili, che si possono ottenere, tre si possono ricavare da quelli già studiati (7 , *b*,*c*,*d*) scambiando $\Sigma$ con $\Sigma'$; l'altro, che si ottiene quando i punti E' , $E'_1$ coincidono ed $e'_1$ coincide con $\sigma'\sigma'_1$, ci dà una collinearità eccezionale indeterminata con un punto (E , E') ed un piano ($ee_1$ , $e'e'_1$) eccezionale in ogni spazio (7 , *c*).

*f*) Ci resta infine da considerare i diversi casi, che si ottengono quando le due rette $e$ , $e_1$ coincidono. Se le rette eccezionali $e'$ , $e'_1$ dei piani del secondo spazio non coincidono, o se una sola di esse coincide con $\sigma'\sigma'_1$, otteniamo dei casi, che si possono ritenere analoghi a quelli già studiati nel presente numero, sicchè non ci rimane da considerare, che il solo caso in cui $e'$ , $e'_1$ coincidono.

La corrispondenza fra le rette $\sigma\sigma_1$ e $\sigma'\sigma'_1$ è indeterminata, perchè ad un punto di una corrisponde un punto indeterminato dell'altra, perciò la collinearità eccezionale, che si ottiene fra i due spazî, è anche indeterminata.

8. Riepilogando possiamo dire: Fra due spazî $\Sigma$ , $\Sigma'$ , a tre dimensioni vi possono essere le seguenti collinearità eccezionali.

1° Con un punto eccezionale in uno spazio ed un piano eccezionale nell'altro (3).

2° Con una retta eccezionale in ogni spazio (5 , *b*).

3° Con un punto eccezionale ed una retta eccezionale, passante per il punto, in uno spazio, ed un piano eccezionale ed una retta eccezionale, situata sul piano, nell'altro (5 , *c*).

4° Con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, passante per il punto, in ogni spazio (5 , *e*).

5° Con un punto eccezionale, una retta eccezionale per il punto, ed un piano eccezionale per la retta, in ogni spazio (5 , *d*).

## II.

### Correlazioni eccezionali in due spazî a tre dimensioni.

9. Abbiamo ottenuto fra $\Sigma$ e $\Sigma'$ cinque collinearità eccezionali; stabilendo ora fra uno di questi due spazî e lo spazio $\Sigma_1$ una correlazione ordinaria, si otterrà una correlazione eccezionale fra l'altro spazio e $\Sigma_1$.

10. La collinearità eccezionale con un punto eccezionale in uno spazio ed un piano eccezionale nell'altro, dà origine a due correlazioni eccezionali.

*a*) *Correlazione con un punto eccezionale in ogni spazio.*

In questa correlazione si ha:

Ad un piano qualunque di uno spazio corrisponde il punto eccezionale dell'altro.

Il piano corrispondente (polare) di un punto eccezionale è indeterminato.

Ad un piano, che passa per un punto eccezionale, corrisponde un indeterminato punto di una determinata retta, che passa per l'altro punto eccezionale; e viceversa il piano polare di tutti i punti di una retta, che passa per un punto eccezionale, è un determinato piano, passante per l'altro punto eccezionale.

Se un piano passante per un punto eccezionale, descrive un fascio, la retta, luogo dei poli (punti corrispondenti) del piano, descrive un fascio projettivo, situato nel piano polare dei punti dell'asse del fascio di piani; e viceversa.

Abbiamo così due stelle correlative, i cui centri sono i punti eccezionali, perchè ad un piano di una stella corrisponde una retta dell'altra (luogo dei poli del piano); e ad una retta, giacente sul piano corrisponde un piano, passante per la retta (piano polare dei punti della rettá a cui corrisponde).

*b*) *Correlazione con un piano eccezionale in ogni spazio.*

In questa correlazione si ha:

Il polo di ogni piano eccezionale è indeterminato,

Il piano polare di un punto di un piano eccezionale, è un indeterminato piano di un fascio, il cui asse è una determinata retta dell'altro piano eccezionale.

Se un punto, di un piano eccezionale, descrive una retta, l'asse del fascio dei piani polari del punto, passa sempre per un punto (il polo dei piani passanti per la retta descritta dal punto) e descrive un fascio projettivo alla punteggiata.

I due piani eccezionali sono quindi correlativi fra loro, e la correlazione fra essi è ordinaria.

11. La collinearità con una retta eccezionale in ogni spazio, dà origine alla seguente correlazione eccezionale:

*Correlazione con una retta eccezionale in ogni spazio.*

In questa correlazione si ha:

Tutti i piani di uno spazio, che passano per lo stesso punto della retta eccezionale, hanno per polo un determinato punto della retta eccezionale dell'altro spazio; e viceversa il piano polare, di un dato punto di una retta eccezionale, e un indeterminato piano di una stella, il cui centro è un determinato punto dell'altra retta eccezionale. I punti di una retta eccezionale ed i centri delle stelle corrispondenti, formano due punteggiate projettive.

Il polo di un piano, che passa per una retta eccezionale, è un indeterminato punto situato sopra un determinato piano, che passa per l'altra retta eccezionale, e viceversa a tutti i punti di un piano, passante per una retta eccezionale, corrisponde un determinato piano per l'altra retta eccezionale. Ed inoltre, se un piano girando attorno ad una retta eccezionale, descrive un fascio, il piano, luogo dei poli corrispondenti, passerà per l'altra retta eccezionale e descriverà un fascio projettivo al primo.

12. La collinearità con un punto eccezionale ed una retta eccezionale, passante per il punto, in uno spazio e con un piano eccezionale ed una retta eccezionale, situata sul piano, nell'altro spazio, dà origine a due correlazioni eccezionali, cioè:

*a) Correlazione con un punto eccezionale ed una retta eccezionale, passante per il punto in ogni spazio.*

Si ha:

Il piano polare del punto eccezionale di ogni spazio è indeterminato.

Il polo di un dato piano, che passa per una retta eccezionale, è un indeterminato punto di un determinato piano, passante per l'altra retta eccezionale; e viceversa: tutti i punti di un piano, che passa per una retta eccezionale, hanno lo stesso piano polare, che passerà per l'altra retta eccezionale. Ed il fascio generato da un piano, che gira attorno ad una retta eccezionale, è projettivo al fascio generato dal piano, luogo dei poli del piano dato.

Il polo di un piano qualunque, che passa per il punto eccezionale di uno spazio, è un indeterminato punto della retta eccezionale dell'altro spazio.

La correlazione fra le stelle, che hanno i centri nei due punti eccezionali, è eccezionale di primo ordine con una retta eccezionale in ogni stella; perchè a tutte le rette di una stella, che stanno in un piano passante per la retta eccezionale, corrisponde un piano passante per l'altra retta eccezionale (piano polare dei punti delle rette), e ad un piano qualunque di una stella corrisponde la retta eccezionale dell'altra (luogo di poli del piano); e viceversa.

*b) Correlazione con un piano eccezionale ed una retta eccezionale, giacente sul piano, in ogni spazio.*

In questa si ha:

Il polo di ogni piano eccezionale è indeterminato.

Il polo di tutti i piani, che passano per un dato punto della retta eccezionale di uno spazio, è un determinato punto della retta eccezionale dell'altro spazio; e viceversa.

Il polo di un piano qualunque, che passa per una retta eccezionale, è un indeterminato punto del piano eccezionale dell'altro spazio; e viceversa.

I due piani eccezionali, sono correlativi fra loro, e la correlazione è eccezionale di primo ordine, con una retta eccezionale in ogni piano [1]; perchè a tutte le rette di uno dei due piani, che passano per uno stesso punto della retta eccezionale, corrisponde un punto dell'altra retta eccezionale (il polo dei piani, che passano per quelle rette) e viceversa; ed alla retta eccezionale di un piano corrisponde un indeterminato punto dell'altro piano (polo dei piani passanti per la retta); e viceversa.

13. La collinearità con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, passante per il punto, in ogni spazio, dà luogo soltanto alla seguente

*Correlazione con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, passante per il punto, in ogni spazio.*

In essa:

Il piano polare di ogni punto eccezionale è indeterminato.

Il polo di ogni piano eccezionale è indeterminato.

[1] Hirst, l. c.

Il polo di tutti i piani, che passano per il punto eccezionale di uno spazio e segano lungo la stessa retta il piano eccezionale, è un indeterminato punto di una retta situata sul piano eccezionale dell'altro spazio e passante per il punto eccezionale; e viceversa.

I due piani eccezionali sono correlativi, e la correlazione è eccezionale con un punto eccezionale in ogni piano (1); perchè ad una retta qualunque di uno dei due piani (intersezione con un piano dello spazio), corrisponde il punto eccezionale dell'altro piano (polo del piano dello spazio); e ad una retta passante per il punto eccezionale di un piano, corrispondono indeterminati punti (poli di piani passanti per la retta) di una retta passante per il punto eccezionale dell'altro piano (2).

14. La collinearità con un punto eccezionale, una retta eccezionale pel punto ed un piano eccezionale per la retta, in ogni spazio, dà origine alla

*Correlazione con un punto eccezionale, una retta eccezionale pel punto ed un piano eccezionale per la retta, in ogni spazio.*

In questa correlazione si ha:

Il polo di ogni piano eccezionale è indeterminato.

Il piano polare di ogni punto eccezionale è indeterminato.

Il polo di un piano, che passa per il punto eccezionale di uno spazio, è un indeterminato punto della retta eccezionale dell'altro spazio; e viceversa.

Il polo di un piano, che passa per la retta eccezionale di uno spazio, è un indeterminato punto del piano eccezionale dell'altro spazio; e viceversa.

I due piani eccezionali sono correlativi, e la correlazione è eccezionale di secondo ordine, con un punto ed una retta eccezionale passante pel punto in ogni piano (3).

Infatti: Ad una retta qualunque di uno dei due piani (intersezione con un piano qualunque dello spazio) corrisponde il punto eccezionale dell'altro piano; ad una retta, che passa per il punto eccezionale di un piano corrisponde un indeterminato punto della retta eccezionale dell'altro piano (polo dei piani passanti per la retta); alla retta eccezionale di un piano un indeterminato punto dell'altro piano (polo dei piani passanti per la retta eccezionale) (4).

15. Abbiamo così sette correlazioni eccezionali fra due spazî a tre dimensioni; le prime tre, nelle quali in ciascuno spazio vi è un punto eccezionale od una retta eccezionale od un piano eccezionale, si dicono correlazioni eccezionali di primo ordine.

Quelle tre, in cui in ciascuno spazio vi è un punto eccezionale ed una retta eccezionale per il punto, od una retta eccezionale ed un piano eccezionale per la retta, od un piano eccezionale ed un punto eccezionale sul piano, si dicono correlazioni eccezionali di secondo ordine. La settima, quella cioè con un punto eccezionale, una retta

(1) Hirst, l. c.

(2) Anche le stelle, che hanno i centri nei punti eccezionali sono correlative, e la correlazione è eccezionale con un piano eccezionale in ogni stella.

(3) Hirst, l. c.

(4) Anche la correlazione fra le due stelle, che hanno i centri nei punti eccezionali, è eccezionale di secondo ordine, cioè con una retta eccezionale ed un piano eccezionale per la retta, in ogni stella.

eccezionale pel punto ed un piano eccezionale per la retta in ogni spazio, si dice correlazione eccezionale di terzo ordine.

## III.

### Numero delle condizioni che determinano una correlazione ordinaria in due spazî a tre dimensioni.

16. Diremo coniugati in una correlazione:

Due punti, se il piano polare di uno di essi passa per l'altro.

Due piani, se il polo di uno si trova sull'altro.

Un punto ed una retta, se il piano polare del punto passa per la retta.

Un piano ed una retta se il polo del piano si trova sulla retta.

Diremo inoltre polari due rette, se una è il luogo dei poli dei piani, che passano per l'altra.

17. Se due punti o due piani devono essere coniugati, rispetto ad una correlaziole fra due spazî, ciò equivale evidentemente ad una condizione.

Se un punto ed una retta, oppure un piano ed una retta devono essere coniugati, equivale a due condizioni.

Se un dato punto di uno spazio deve essere il polo di un dato piano dell'altro spazio, ciò equivale a tre condizioni.

Se una data retta di uno spazio deve essere polare di una data retta dell'altro, equivale a quattro condizioni. E così via.

Ora è noto, che se in uno spazio, per esempio in $\Sigma$, si assegnano cinque punti arbitrari, quattro dei quali non giacciono mai in uno stesso piano, e si fanno ad essi corrispondere cinque piani dello spazio $\Sigma'$ (quattro dei quali non passano per lo stesso punto), la correlazione è completamente determinata [1]. Quindi possiamo dire, che il numero delle condizioni, che determinano una correlazione ordinaria, in due spazî a tre dimensioni è quindici.

## IV.

### Correlazioni ordinarie soddisfacenti quattordici condizioni.

18. Le correlazioni, che soddisfano quattordici condizioni, formano un sistema semplicemente infinito. In questo sistema vi sarà un numero finito di correlazioni eccezionali di primo ordine; ma non vi saranno correlazioni eccezionali di secondo e di terzo

[1] Infatti dinotando con A, B, C, D, E, cinque punti e con $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$ i loro piani, polari, possiamo ed in un sol modo riferire reciprocamente la stella di centro A ed il sistema piano $\alpha'$, in modo che ai raggi A(B, C, D, E) della stella, corrispondano le rette $\alpha'(\beta', \gamma', \delta', \varepsilon')$ del piano; e la stella di centro B ed il sistema piano $\beta'$ in guisa che ai raggi B(A, C, D, E) corrispondano le rette $\beta'(\alpha', \gamma', \delta', \varepsilon')$ del piano. E così operando ai piani ABC, ABD, ABE del fascio AB, corrispondono i punti $\alpha'\beta'\gamma', \alpha'\beta'\delta', \alpha'\beta'\varepsilon'$, della punteggiata $\alpha'\beta'$; sicchè dato un punto P di $\Sigma$ si trovano sopra $\alpha'$ e $\beta'$ le rette corrispondenti alle rette AP, BP, le quali si incontrano nel punto di $\alpha'\beta'$, che corrisponde al piano ABP e quindi determinano un piano, che è il piano polare di P. ecc.

ordine. Dinoteremo, sin da ora, con $\pi$ il numero delle correlazioni con un punto eccezionale in ogni spazio, con $\lambda$ il numero di quelle con un piano eccezionale in ogni spazio, e con $\psi$ il numero delle correlazioni con rette eccezionali.

Dato un sistema semplicemente infinito di correlazioni, due numeri hanno, relativamente ad esso una speciale importanza; cioè:

il numero $\mu$ delle correlazioni del sistema, per le quali due punti dati ad arbitrio sono coniugati,

il numero $\nu$ delle correlazioni del sistema, per le quali due piani dati ad arbitrio sono coniugati.

Questi due numeri li chiameremo caratteristiche del sistema, e diremo che il sistema è di ordine $\mu$ e della classe $\nu$.

Possiamo dare un significato geometrico dell'ordine e della classe di un sistema di correlazioni.

Preso un punto arbitrario P in uno spazio, i piani polari di esso, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, essendo in numero semplicemente infinito formano una superficie sviluppabile. Di questi piani polari, per un punto arbitrario P', ne passa un numero finito, che rappresenta la classe della sviluppabile; ora perchè il piano polare di P passi per P' è necessario che P e P' sieno coniugati, rispetto ad una certa correlazione del sistema; ma essi lo sono rispetto a $\mu$ correlazioni; quindi la classe della sviluppabile è $\mu$.

Similmente, dato un piano $\alpha$ di uno spazio, i poli di esso, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, formano una curva gobba il cui ordine è $\nu$; perchè un piano arbitrario $\alpha'$ è coniugato ad $\alpha$, rispetto a $\nu$ correlazioni, e quindi sopra $\alpha'$ vi sono $\nu$ poli di $\alpha$; cioè $\nu$ punti della curva gobba.

Sicchè possiamo dire: Dato un sistema semplicemente infinito di correlazioni, ad ogni punto di uno spazio corrisponde nell'altro una superficie sviluppabile, e ad ogni piano corrisponde una curva gobba. La classe della superficie sviluppabile e l'ordine della curva gobba sono rispettivamente eguali all'ordine ed alla classe del sistema.

Qualunque sia il punto P di uno spazio, il suo piano polare, rispetto ad una correlazione con piani eccezionali, del sistema, è il piano eccezionale dell'altro spazio, e similmente qualunque sia il piano $\alpha$ di uno spazio, il suo polo, rispetto ad una correlazione con punti eccezionali, è il punto eccezionale dell'altro spazio; quindi tutte le superficie di ogni spazio, corrispondenti ai punti dell'altro, toccano i $\lambda$ piani eccezionali, e tutte le curve gobbe di ogni spazio, corrispondenti ai piani dell'altro passano per i $\pi$ punti eccezionali.

19. Sieno dati due punti P, Q di uno spazio, per esempio $\Sigma$, ad essi corrispondono due superficie sviluppabili dell'altro spazio $\Sigma'$. Un piano di una superficie ed uno dell'altra si diranno corrispondenti, se sono piani polari di P e Q rispetto ad una stessa correlazione. L'intersezione di due piani corrispondenti è la retta polare della retta $p \equiv PQ$; e queste rette polari di PQ, rispetto a tutte le correlazioni del sistema formano anch'esse una superficie rigata.

I $\lambda$ piani eccezionali delle $\lambda$ correlazioni con piani eccezionali, sono corrispondenti ad essi stessi; però in ciascuno di essi esiste una sola retta $s'$, che è la polare

di PQ (10, *a*), ed è l'asse del fascio dei piani polari del punto ove PQ sega il piano eccezionale.

Di che ordine è questa superficie? cioè una retta arbitraria $r'$ di $\Sigma'$ quante rette polari di PQ incontra?

Sia P′ un punto di $r'$; P e P′ sono coniugati, rispetto a $\mu$ correlazioni del sistema; se di Q si trovano i piani polari, rispetto a queste $\mu$ correlazioni, esse segheranno $r'$ in $\mu$ punti Q′; sicchè ad un punto P′ corrispondono $\mu$ punti Q′; e viceversa ad un punto Q′ corrispondono $\mu$ punti P′: dunque vi saranno $2\mu$ punti P′, ciascuno dei quali coinciderà con uno dei corrispondenti Q′. Ora un punto P′ coincide con uno dei suoi corrispondenti, quando per esso passa una retta polare di PQ, oppure quando P′ coincide con uno dei punti ove $r'$ sega uno dei $\lambda$ piani eccezionali, nel qual caso però per P′ non passa la retta polare di PQ; quindi l'ordine della superficie luogo delle rette polari di PQ, rispetto a tutte le correlazioni del sistema è

$$2\mu - \lambda.$$

Per una retta eccezionale, appartenente ad una delle $\psi$ correlazioni del sistema, con rette eccezionali, passano tutti i piani polari dei punti dell'altro spazio non situati sulla retta eccezionale di questo (11); quindi risulta che:

La superficie, luogo delle rette polari di una retta PQ qualunque di uno spazio contiene le $\psi$ rette eccezionali dell'altro spazio.

20. Sieno ora dati una retta $p$ ed un punto R di uno spazio, alla retta corrisponde nell'altro spazio una superficie rigata, ed un'altra superficie corrisponde al punto. Una generatrice della prima superficie ed un piano tangente della seconda si diranno corrispondenti quando sono, rispettivamente retta e piano polare di $p$ ed R, rispetto ad una stessa correlazione del sistema. Il punto comune ad una generatrice ed al suo piano corrispondente, è tale che per esso passano i piani polari dei punti di $p$ ed il piano polare di R, rispetto ad una certa correlazione del sistema, è cioè il polo del piano $\alpha \equiv p\mathrm{R}$, rispetto alla detta correlazione; quindi il luogo dei punti d'intersezione delle generatrici della superficie corrispondente a $p$, con i corrispondenti piani tangenti della sviluppabile corrispondente ad R, è la curva gobba, luogo dei poli del piano $\alpha \equiv \mathrm{R}p$, rispetto a tutte le correlazioni del sistema.

Di che ordine è questa curva gobba? cioè quanti sono i poli di $\alpha$, situati sopra un piano qualunque $\alpha'$? Il piano $\alpha'$ sega la superficie rigata, corrispondente a $p$, secondo una curva $\varphi'$ dell'ordine $2\mu - \lambda$. Preso sulla curva un punto P′ esso è polo coniugato di $p$, rispetto ad una certa correlazione del sistema, il piano polare di R, rispetto a questa correlazione, sega la curva $\varphi'$ in $2\mu - \lambda$ punti che diremo R′. Reciprocamente, dato un punto R′, R ed R′ sono coniugati, rispetto a $\mu$ correlazioni del sistema, se di $p$ si trovano le rette polari, rispetto a queste $\mu$ correlazioni, esse segheranno il piano $\alpha'$ in $\mu$ punti P′ di $\varphi'$. Quindi sulla curva $\varphi'$, ad un punto P′ corrispondono $2\mu - \lambda$ punti R′, mentre che ad un punto R′ corrispondono $\mu$ punti P′; vi saranno perciò $3\mu - \lambda$ punti P′, ciascuno dei quali coinciderà con uno dei suoi punti corrispondenti.

Fra questi punti di coincidenza, vi sono i $\psi$ punti, ove $\alpha'$ sega le $\psi$ rette

eccezionali $e'$ delle correlazioni (del sistema) con rette eccezionali, per i quali passano i piani polari dei punti di $p$, e quello di R; ma che in generale non sono poli del piano $\alpha \equiv Rp$; perchè il polo di un piano $\alpha$ di $\Sigma$, in una correlazione con rette eccezionali, è un determinato punto della retta eccezionale di $\Sigma'$: e vi sono ancora i $\lambda$ punti, ove $\alpha'$ sega le $\lambda$ rette $s'$, rette polari di $p$, rispetto alle $\lambda$ correlazioni con piani eccezionali, i quali non sono poli di $\alpha$, rispetto alle dette correlazioni eccezionali, perchè sopra ogni retta $s'$ vi è un sol punto polo di $\alpha$, che in generale non coincide con $\alpha' s'$. I rimanenti $3\mu - 2\lambda - \psi$ punti di coincidenza sono i poli di $\alpha$, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, che si trovano sopra $\alpha'$; cioè:

L'ordine della curva gobba, luogo dei poli di un piano, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, è $3\mu - 2\lambda - \psi$.

Ma quest'ordine noi l'abbiamo dinotato con $\nu$, quindi abbiamo la relazione:

$$\nu = 3\mu - 2\lambda - \psi$$

e similmente si trova che

$$\mu = 3\nu - 2\pi - \psi$$

le quali dànno per le caratteristiche del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu &= 3\lambda + 2\psi + \pi \\ 4\nu &= 3\pi + 2\psi + \lambda. \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Per mezzo di queste equazioni si possono trovare le caratteristiche di un sistema semplicemente infinito di correlazioni, quando si conoscono i numeri $\pi, \psi, \lambda$, relativi a questo sistema.

## V.

### Sistemi di correlazioni soddisfacenti a quattordici condizioni.

21. Considereremo i sistemi, che soddisfano alle seguenti condizioni, che diremo condizioni elementari; cioè: $m$ dati punti di $\Sigma$ sono poli di altrettanti dati piani di $\Sigma'$, $n$ dati piani di $\Sigma$ sono piani polari di altrettanti punti di $\Sigma'$, $p$ coppie di punti sono coniugati, $q$ coppie di piani sono coniugati. I numeri $m, n, p, q$, soddisfano l'equazione

$$3m + 3n + p + q = 14 \quad (II)$$

Useremo, come Hirst, la notazione $(m\,n\,p\,q)$ per dinotare una soluzione dell'equazione suddetta; per esempio la soluzione $m=2, n=1, p=0, q=5$, la dinoteremo col simbolo (2105), e così via.

Osserviamo che le due soluzioni $(m\,n\,p\,q), (n\,m\,p\,q)$, ci rappresentano precisamente le stesse condizioni, cioè ci danno lo stesso sistema di correlazioni; e che inoltre se si conoscono le caratteristiche del sistema $(m\,n\,p\,q)$, si avranno anche le caratteristiche del sistema $(m\,n\,q\,p)$, essendo l'ordine e la classe di questo sistema, eguali rispettivamente alla classe ed all'ordine di quello.

Mediante quest'ultima osservazione, per avere le caratteristiche dei 66 sistemi, che soddisfano la II, basterebbe trovare quelle dei 36 seguenti sistemi; cioè:

(4020) , (4011).
(3120) , (3111).
(2220) , (2211).
(3050) , (3041) , (3032).
(2150) , (2141) , (2132).
(2080) , (2071) , (2062) , (2053) , (2044).
(1180) , (1171) , (1162) , (1153) , (1144).
(10 11 0), (10 10 1), (1092) , (1083) , (1074) , (1065).
(00 14 0), (00 13 1), (00 12 2), (00 11 3), (00 10 4), (0095), (0086), (0077).

Di questi sistemi mi limiterò a studiare i primi sei, cercando per ciascuno di essi i numeri $\pi$, $\psi$, $\lambda$, e le caratteristiche.

22. Il primo sistema è quello, che soddisfa alle condizioni (4020), cioè

$$\left|\begin{matrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, & B_1, & B_2 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, & \alpha'_4, & B'_1, & B'_2 \end{matrix}\right|$$

ove nella prima linea ci sono gli elementi dati dello spazio $\Sigma$ e nella seconda gli elementi corrispondenti di $\Sigma'$.

In quel che segue, diremo *associati* due punti eccezionali, due rette eccezionali, o due piani eccezionali, che appartengono ad una stessa correlazione eccezionale, e li dinoteremo rispettivamente con $E, E'$; $e, e'$; $\varepsilon, \varepsilon'$.

*a*) Ricerca di $\pi$. — Il punto eccezionale E, dello spazio $\Sigma$, deve coincidere con uno dei quattro punti A; perchè altrimenti i quattro piani $\alpha'$ dovrebbero passare per uno stesso punto, cioè per il punto eccezionale E' di $\Sigma'$.

Sia dunque $E \equiv A_1$; sarà allora $E' \equiv \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4$. I piani polari dei punti $B_1, B_2$ saranno due piani $\beta'_1, \beta'_2$ della stella E', passanti rispettivamente per $B'_1, B'_2$, da determinarsi in modo, che le stelle $E, E'$ risultino correlative (10, *a*). I due piani $\beta'_1, \beta'_2$ non possono passare per le tre rette $\alpha'_2 \alpha'_3, \alpha'_3 \alpha'_1, \alpha'_1 \alpha'_2$, e devono essere tali, che i due fasci di piani $EA_2 . A_3 A_4 B_1 B_2$, $EA_3 . A_2 A_4 B_1 B_2$, sieno rispettivamente projettivi ai due fasci di raggi $\alpha'_2 . \alpha'_3 \alpha'_4 \beta'_1 \beta'_2$, $\alpha'_3 . \alpha'_2 \alpha'_4 \beta'_1 \beta'_2$; aventi i centri in E'; cioè si deve avere

$$(E A_2 . A_3 A_4 B_1 B_2) = (\alpha'_2 . \alpha'_3 \alpha'_4 \beta'_1 \beta'_2) \quad (1)$$
$$(E A_3 . A_2 A_4 B_1 B_2) = (\alpha'_3 . \alpha'_2 \alpha'_4 \beta'_1 \beta'_2) . \quad (2)$$

A tal uopo, preso sopra $\alpha'_2$ un raggio $b'_1$ per E', determino sopra lo stesso piano, il raggio $b'_2$ del fascio $\alpha'_2 . \alpha'_3 \alpha'_4 b'_1$, in modo da avere:

$$(E A_2 . A_3 A_4 B_1 B_2) = (\alpha'_2 . \alpha'_3 \alpha'_4 b'_1 b'_2) . \quad (3)$$

Il piano $b'_2 B'_2 \equiv \beta'_2$ sega $\alpha'_3$ secondo una retta, passante per E', che dinoterò con $c'_2$; avuto questo raggio, determino $c'_1$ in modo da avere:

$$(E A_3 . A_2 A_4 B_1 B_2) = (\alpha'_3 . \alpha'_2 \alpha'_4 c'_1 c'_2) . \quad (4)$$

Il piano $\beta'_1 \equiv c'_1 B'_1$ sega $\alpha'_2$ secondo una retta, che dirò $x'_1$, in generale diversa di $b'_1$ ma passante per E'; sicchè un raggio $b'_1$ determina un raggio $x'_1$.

Reciprocamente, preso sopra $\alpha'_2$, un raggio $x'_1$, esso determina il piano $\beta'_1 \equiv x'_1 B'_1$, il quale sega $\alpha'_3$ in $c'_1$; questo raggio mi determina il raggio $c'_2$, che soddisfa la (4), e quindi il piano $\beta'_2 \equiv c'_2 B'_2$, che sega il piano $\alpha'_2$ in un raggio $b'_2$ del fascio. Avuto questo raggio, mediante la (3) determino $b'_1$, che in generale non coincide con $x'_1$; sicchè anche ad un raggio $x'_1$ corrisponde un raggio $b'_1$. Vi sono quindi due raggi $b'_1$ ciascuno dei quali coincide col suo corrispondente e perciò vi sono due coppie di piani $\beta'_1, \beta'_2$, che soddisfano la (1) e la (2). Ma uno di questi due raggi $b'_1$, è il raggio $\alpha'_2 \alpha'_3$, e quindi i piani $\beta'_1, \beta'_2$ di una coppia passano per $\alpha'_2 \alpha'_3$ e non soddisfano il problema; perciò i piani di una sola coppia si possono ritenere come piani polari di $B_1$ e $B_2$, e la correlazione fra le due stelle, e quindi fra i due spazî, si può stabilire in un sol modo.

Lo stesso dicasi, quando si piglia come punto eccezionale di $\Sigma$, il punto $A_2$, od $A_3$ oppure $A_4$; quindi è $\pi = 4$.

*b*) Ricerca di $\lambda$. — Se nello spazio $\Sigma$ vi è un piano eccezionale $\varepsilon$, esso deve contenere tre dei punti A; perchè se ne contenesse meno, i piani polari dei punti A, che non si trovano sopra $\varepsilon$, dovrebbero coincidere (10, *b*). Sia quindi $\varepsilon = A_1 A_2 A_3$, il piano polare di $A_4$ deve essere il piano eccezionale $\varepsilon'$; quindi $\varepsilon' \equiv \alpha'_4$; ma il piano eccezionale $\varepsilon'$ è il piano polare dei punti $B_1, B_2$, e perciò dovrebbe passare per $B'_1, B'_2$; ciò che è impossibile; dunque è $\lambda = 0$.

*c*) Ricerca di $\psi$. — La retta eccezionale $e$ dello spazio $\Sigma$, deve contenere due punti A; perchè se ne contenesse un solo o nessuno, per la retta eccezionale $e'$ di $\Sigma'$ dovrebbero passare i piani polari dei tre o quattro punti A, che non si trovano sopra $e$.

Sia dunque $e \equiv A_1 A_2$; sarà allora $e' \equiv \alpha'_3 \alpha'_4$, i piani polari di $B_1, B_2$ saranno $\beta'_1 \equiv e' B'_1$, $\beta'_2 \equiv e' B'_2$, ed i due fasci di piani $e \,.\, A_3 A_4 B_1 B_2$, $\alpha'_3 \alpha'_4 \beta'_1 \beta'_2$, dovrebbero essere projettivi, ciò che non è, essendo gli elementi dati in posizione arbitraria. Dunque è $\psi = 0$.

*d*) Le formole I ci dànno per le caratteristiche del sistema $\mu = 1$, $\nu = 3$.

23. Il secondo sistema, soddisfa alle condizioni (4011), cioè

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & B & \gamma \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & B' & \gamma' \end{matrix} \right|$$

*a*) Ricerca di $\pi$. — Per quel che abbiamo detto nel caso precedente, il punto eccezionale E deve coincidere con uno dei punti A; ma se esso coincidesse con uno di essi, per esempio con $A_1$, i piani $\alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \gamma'$ dovrebbero passare per E', ciò che non è; dunque non esistono correlazioni con punti eccezionali, che soddisfano le date condizioni, cioè $\pi = 0$.

*b*) Ricerca di $\lambda$. — Per il principio di dualità si ricava $\lambda = 0$.

*c*) Ricerca di $\psi$. — La retta eccezionale $e$, dello spazio $\Sigma$, deve essere (22, c) una delle sei rette, che uniscono due qualunque dei quattro punti A. Sia $e \equiv A_1 A_2$; sarà $e' \equiv \alpha'_3 \alpha'_4$, $\beta' \equiv e' B'$ il piano polare di B, $\beta \equiv e B$ il piano polare di B' ed $e\gamma$, $e'\gamma'$, i poli di $\gamma'$ e $\gamma$. Stabilendo la projettività fra i due fasci di piani $e \,.\, A_3, A_4, B$; $\alpha'_3, \alpha'_4, \beta'$, e quella fra le due punteggiate $e, e'$, cioè $(A_1, A_2, e\gamma)$, $(e' \,.\, \alpha'_1, \alpha'_2, \gamma')$, si determina completamente la correlazione fra i due spazî. Il piano polare di un punto P dello

spazio $\Sigma$, è il piano del fascio $e'$, che corrisponde al piano P$e$ del fascio $e$; ed il polo di un piano qualunque $\delta$ di $\Sigma$, è il punto della punteggiata $e'$, che corrisponde al punto $e\delta$ della punteggiata $e$. Dunque è $\psi = 6$.

*d*) Le caratteristiche del sistema sono $\mu = \nu = 3$.

24. Il terzo sistema soddisfa alle condizioni (3120) cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B' & C'_1 & C'_2 \end{matrix} \right|.$$

*a*) Ricerca di $\pi$. — È evidentemente necessario, perchè esista una correlazione con punti eccezionali, che il punto eccezionale E di $\Sigma$, si trovi sul piano $\beta$, e quindi che $E' \equiv \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$. Per costruire la correlazione fra i due spazî dobbiamo determinare E, e costruire la correlazione fra le due stelle, aventi i centri in E, E'.

A tal uopo, consideriamo nella stella E', i due fasci di piani $\alpha'_1\alpha'_2 . \alpha'_1 \alpha'_2 B'C'_1 C'_2$, $\alpha'_1 \alpha'_3 . \alpha'_1 \alpha'_3 B' C'_1 C'_2$, aventi per assi rispettivamente $\alpha'_1 \alpha'_2$, $\alpha'_1 \alpha'_3$. Il punto E, dello spazio $\Sigma$, che è situato su $\beta$, deve essere tale, che i su detti fasci di piani sieno projettivi ai fasci di raggi $E . A_1A_2, \overline{A_1A_2} . \beta, \ldots, E . A_1, A_3, \overline{A_1A_3} . \beta, \ldots$, che sui piani $EA_1A_2$, $EA_1A_3$, determinano le rette $EA_1, EA_2, EA_3$, il piano $\beta$, ed i piani polari di $C'_1, C'_2$, che devono passare rispettivamente per $EC_1, EC_2$; ciò che non avviene quando E è un punto qualunque di $\beta$.

Però qualunque sia la posizione di E sopra $\beta$, segando i due fasci di raggi con le rette $A_1A_2, A_1A_3$, ottengo due punteggiate prospettive ai fasci di raggi e quindi projettive ai fasci di piani dell'altro spazio. Di ciascuna di queste punteggiate si conoscono tre punti, cioè i punti $A_1, A_2, A_1A_2.\beta$ della prima, $A_1, A_3, A_1A_3.\beta$ della seconda, corrispondenti rispettivamente ai piani $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_1\alpha'_2.B'$ del primo fascio ed $\alpha'_1, \alpha'_3, \alpha'_1\alpha'_3.B'$ del secondo; quindi posso trovare sulla prima punteggiata i punti, che dirò $G_1, G_2$, corrispondenti ai piani $\alpha'_1\alpha'_2 . c'_1$, $\alpha'_1\alpha'_2 . c'_2$, e sulla seconda i punti $H_1, H_2$ corrispondenti ai piani $\alpha'_1\alpha'_3 . c'_1, \alpha'_1\alpha'_3 . c'_2$. I piani $G_1C_1H_1, G_2C_2H_2$ saranno i piani polari di $C'_1, C'_2$, ed il punto, ove la retta comune a questi due piani, sega $\beta$, sarà il punto E cercato.

Risulta quindi $\pi = 1$.

*b*) Ricerca di $\lambda$. — Il piano eccezionale $\varepsilon$ di $\Sigma$, non può coincidere con $\beta$, perchè allora i tre piani $\alpha'$ dovrebbero coincidere. Giacchè il piano eccezionale $\varepsilon$ non coincide con $\beta$, il polo B' di questo deve trovarsi sul piano eccezionale $\varepsilon'$; quindi i piani $\alpha'$ non possono essere piani eccezionali, e perciò i loro poli $A_1, A_2, A_3$ devono trovarsi sopra $\varepsilon$; cioè deve essere $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$. Inoltre il piano eccezionale $\varepsilon'$, essendo piano polare dei punti $C_1, C_2$, dovrà passare per $C'_1, C'_2$; quindi deve essere $\varepsilon' \equiv B'C'_1C'_2$. Nel piano $\varepsilon'$ abbiamo i punti $\alpha'_1\alpha'_2\varepsilon'$, $\alpha'_2\alpha'_3\varepsilon'$, $\alpha'_3\alpha'_1\varepsilon'$, B', nel piano $\varepsilon$ le rette corrispondenti $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, \varepsilon\beta$ (assi dei fasci di piani polari dei quattro punti di $\varepsilon'$); quindi possiamo ed in un sol modo costruire la correlazione ordinaria fra i due piani $\varepsilon, \varepsilon'$; e perciò la correlazione eccezionale fra i due spazî $\Sigma, \Sigma'$. Si ha da ciò: $\lambda = 1$.

*c*) Ricerca di $\psi$. — La retta eccezionale $e$, dello spazio $\Sigma$, non può trovarsi sopra $\beta$ nè essere una retta qualunque, perchè i tre piani $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ non passano per

la stessa retta. Se $e$ non si trova sopra $\beta$, la retta eccezionale $e'$ dovrà passare per B', e quindi per essa non passerà nessuno dei piani $\alpha'$; ma allora i tre poli $A_1, A_2, A_3$ dovranno trovarsi sopra $e$, ciò che non è: quindi $\psi = 0$.

*d*) Le caratteristiche del sistema sono $\mu = \nu = 1$.

25. Il quarto sistema è quello che soddisfa alle condizioni (3111), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & \beta & C & \delta \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B' & C' & \delta' \end{matrix} \right| .$$

In questo sistema, è evidentemente $\pi = \lambda$; quindi basta trovare uno di essi.

*a*) Ricerca di $\pi$. — Il punto eccezionale, dello spazio $\Sigma$, deve trovarsi sulla retta $\beta\delta$, perchè se non fosse sopra $\beta$, sarebbe $E' \equiv B'$, e per questo punto dovrebbero passare almeno tre dei quattro dati piani di $\Sigma'$; e se fosse sopra $\beta$ e non sulla retta $\beta\delta$, i quattro dati piani di $\Sigma'$ dovrebbero passare per uno stesso punto. Sia dunque E un punto di $\beta\delta$, sarà $E' \equiv \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$. Per costruire la correlazione fra le due stelle E, E', bisogna trovare un punto E di $\beta\delta$, tale che i due fasci di piani $\alpha'_1\alpha'_2 \,.\, \alpha'_1, \alpha'_2, B', C'$, $\alpha'_1\alpha'_3 \,.\, \alpha'_1, \alpha'_3, B', C'$, della stella E', sieno rispettivamente projettivi ai fasci, che sopra i piani $EA_1A_2$, $EA_1A_3$ determinano le rette $EA_1$, $EA_2$, $EA_3$, il piano $\beta$ ed il piano polare di C', che dovrà passare per EC.

Qualunque sia la posizione di E sopra $\beta\delta$, segando i due fasci di raggi con le rette $A_1A_2$, $A_1A_3$, si hanno due punteggiate prospettive ai fasci di raggi, e quindi projettivi ai fasci di piani. Di ogni punteggiata si conoscono tre punti cioè i punti $A_1$, $A_2$, $\overline{A_1A_2}.\beta$ della prima corrispondenti ai piani $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, $\alpha'_1\alpha'_2.B'$ di un fascio, ed i punti $A_1$, $A_2$, $\overline{A_1A_2}.\beta$ della seconda, corrispondenti ai piani $\alpha'_1$, $\alpha'_3$, $\alpha'_1\alpha'_3.B'$ del secondo fascio; e perciò si può trovare il punto G della punteggiata $A_1A_2$, ed il punto H della punteggiata $A_1A_3$, corrispondenti rispettivamente ai piani $\alpha'_1\alpha'_2 \,.\, C'$, $\alpha'_1\alpha'_3 \,.\, C'$ dei due fasci. Il piano GCH, sarà il piano polare di C', ed il punto ove esso sega la retta $\beta\delta$ è il punto E richiesto. Avuto E la correlazione fra le due stelle è completamente determinata, e quindi anche quella fra i due spazî.

Si ha perciò $\pi = \lambda = 1$.

*b*) Ricerca di $\psi$. — Ripetendo lo stesso ragionamento fatto nel numero precedente, si dimostra che è $\psi = 0$.

*c*) Le formole (I) ci dànno per le caratteristiche del sistema, $\mu = \nu = 1$.

26. Seguono ora i due sistemi (2220), (2211); cioè

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta_1 & \beta_2 & C_1 & C_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & C'_1 & C'_2 \end{matrix} \right| \qquad \left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta_1 & \beta_2 & C & \delta \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & C' & \delta' \end{matrix} \right| .$$

Per questi due sistemi è facile vedere, che si ottiene $\pi = \lambda = \psi = 0$ e quindi anche $\mu = \nu = 0$, cioè non vi sono correlazioni, che soddisfano le quindici condizioni (2230), oppure (2221). Ciò dipende dal fatto, che essendo dati gli elementi in posizione arbitraria, la punteggiata $A_1A_2$, formata dai quattro punti $A_1, A_2, A_1A_2.\beta_1, A_1A_2.\beta_2$, non è projettiva al fascio formato dai loro piani polari, cioè dai piani $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_1\alpha'_2 \,.\, B'_1$, $\alpha'_1\alpha'_2 \,.\, B'_2$.

27. Termineremo questa prima parte facendo conoscere le superficie e le curve di ciascuno spazio che, in ogni sistema già studiato, corrispondono ai punti ed ai piani dell'altro spazio.

*a*) Per il primo sistema (4020), abbiamo trovato $\pi = 4, \lambda = \psi = 0; \mu = 1, \nu = 3$.

Essendo $\mu = 1$, i piani polari di un punto R, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, passano per una retta $r'$, che rappresenta la superficie sviluppabile corrispondente al punto (18).

Inoltre dati due punti R, S, di uno spazio, i piani polari di essi rispetto ad una stessa correlazione, i quali passano rispettivamente per $r', s'$, rette corrispondenti ai punti, si segano secondo una retta che è la polare di RS, ed il luogo di questa retta polare è una superficie dell'ordine $2\mu - \lambda = 2$, la quale passa per i quattro punti eccezionali (19). L'altro sistema di rette situate sulla quadrica, è formato dalle rette corrispondenti ai punti della retta RS.

Preso un terzo punto P, dello stesso spazio, ad esso corrisponde un'altra retta $p'$, inviluppo dei piani polari di P; ad ogni piano, che passa per $p'$, corrisponde una generatrice della quadrica che ad RS corrisponde (retta polare di RS); ed il luogo dei punti d'intersezione delle generatrici della quadrica con i piani corrispondenti del fascio $p'$, è una curva gobba del terzo ordine (20); luogo dei poli del piano PRS.

La retta $p'$ sega la quadrica in due punti A, B, i quali sono punti della curva gobba, perchè la generatrice (retta polare di RS), che passa per uno di essi, per esempio per A, sega nello stesso punto A il piano corrispondente del fascio $p'$, il quale piano toccherà in A la curva gobba.

Un piano qualunque per $p'$, oltre ai punti A e B, ha in comune con la curva gobba il punto ove egli sega la generatrice ad esso corrispondente.

Risulta da quanto abbiamo detto che tutte le rette corrispondenti ai punti di un piano PRS, sono corde della curva gobba, che a questo piano corrisponde.

La curva gobba su detta, che come è noto, passa per i quattro punti eccezionali, è anche la residua intersezione delle due quadriche, che corrispondono alle due rette RS, RP, le quali hanno una retta in comune, la $r'$.

*b*) Per il secondo sistema (4011) abbiamo trovato $\pi = \lambda = 0, \psi = 6, \mu = \nu = 3$.

In esso ad un punto di uno spazio corrisponde una superficie sviluppabile della terza classe; il luogo delle rette polari di una data retta è una superficie del sesto ordine, che contiene le sei rette eccezionali, ed il luogo dei poli di un dato piano è una curva gobba del terzo ordine, che incontra in un sol punto ciascuna delle sei rette eccezionali.

*c*) Per ciascuno dei due sistemi (3120), (3111) si ha $\pi = \lambda = 1, \psi = 0, \mu = \nu = 1$.

Ad ogni punto R di uno spazio, corrisponde una retta $r'$ situata nel piano eccezionale $\varepsilon'$, inviluppo dei piani polari di R.

Ad una retta RS corrisponde un fascio di raggi ($2\mu - \lambda = 1$), luogo delle rette polari di RS, il cui centro è il punto $r's'$ di $\varepsilon'$ ove s'incontrano le rette $r', s'$ corrispondenti ai punti R, S. Il piano $\pi'$ di questo fascio passa per il punto eccezionale E'.

Preso un terzo punto P, il luogo dei punti comuni ai raggi del fascio $(r's')$, corrispondente ad RS, ed ai piani corrispondenti del fascio di piani $p'$ ($p'$ è una retta di $\varepsilon'$, ma che non passa per $r's'$), è una retta ($\nu = 1$) luogo dei poli del piano PRS;

la quale passa per E' e per il punto di $\pi'\varepsilon'$ che è il polo del piano PRS, rispetto alla correlazione con piani eccezionali.

Che la curva gobba si riduce ad una retta, si scorge anche dal fatto, che il fascio di raggi e quello di piani sono prospettivi, essendo il raggio $\pi'\varepsilon'$ del primo situato sul suo piano corrispondente $\varepsilon'$ del secondo.

Per questa retta, luogo dei poli del piano PRS, passano tutti i piani dei fasci, che corrispondono alle rette del piano PRS.

# PARTE SECONDA

## INTRODUZIONE

Nella prima parte di questa Memoria, abbiamo fatto vedere che, oltre alle correlazioni ordinarie, in due spazî a tre dimensioni, esistono: 1° correlazioni eccezionali di primo ordine, con punti eccezionali o con rette eccezionali o con piani eccezionali, e che soddisfano quattordici condizioni; 2° correlazioni eccezionali di secondo ordine, che soddisfano tredici condizioni e che hanno in ogni spazio, una retta eccezionale ed un punto eccezionale sulla retta, od un punto eccezionale ed un piano eccezionale, che passa per il punto, oppure un piano eccezionale ed una retta eccezionale situata sul piano; 3° correlazioni eccezionali di terzo ordine, che soddisfano dodici condizioni, e che hanno in ogni spazio un piano eccezionale, una retta eccezionale sul piano ed un punto eccezionale sulla retta.

Abbiamo inoltre trovate le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu &= 3\lambda + 2\psi + \pi \\ 4\nu &= 3\pi + 2\psi + \lambda \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

che legano le caratteristiche $\mu$, $\nu$ di un sistema semplicemente infinito di correlazioni con i numeri $\pi$, $\psi$, $\lambda$, i quali dinotano rispettivamente il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, con rette eccezionali, con piani eccezionali, che soddisfano le quattordici condizioni, che determinano il sistema; ed abbiamo infine studiato sei sistemi semplicemente infiniti di correlazioni soddisfacenti quattordici condizioni elementari, trovando per ciascuno di essi i numeri $\pi, \psi, \lambda, \mu, \nu$.

Delle condizioni elementari ci siamo limitati ad introdurre le condizioni triple, cioè: un dato punto è polo di un dato piano o viceversa, e le condizioni semplici, cioè: due dati punti o due dati piani sono coniugati; ed abbiamo tralasciato le condizioni doppie (un dato punto o piano è coniugato ad una data retta) e le condizioni quadruple, cioè due date rette sono polari.

Continueremo nello studio dei diversi sistemi di correlazioni a non introdurre le condizioni doppie e le quadruple, e ciò lo facciamo non solo per amore di brevità; ma anche perchè i sistemi di correlazioni, che soddisfano condizioni semplici, sono quelli che presentano maggior difficoltà.

Infatti, in seguito vedremo come lo studio di molti sistemi, che soddisfano condizioni semplici, si fa dipendere da quello di altri sistemi, che soddisfano condizioni doppie e triple.

In questa seconda parte completeremo lo studio già incominciato nella prima, dei sistemi semplicemente infiniti di correlazioni, che soddisfano quattordici condizioni elementari.

*Sistemi di correlazioni che soddisfano a quattordici condizioni elementari.*

1. Abbiamo già visto, che per avere le caratteristiche dei sessantasei sistemi di correlazioni, che soddisfano quattordici condizioni elementari $(mnpq)$ [1], basta trovare quelle dei sistemi, che soddisfano le seguenti combinazioni di quattordici condizioni, che divideremo in nove gruppi; cioè:

I gruppo (4020) , (4011).
II » (3120) , (3111).
III » (2220) , (2211).
IV » (3050) , (3041) , (3032).
V » (2150) , (2141) , (2132).
VI » (2080) , (2071) , (2062) , (2053) , (2044).
VII » (1180) , (1171) , (1162) , (1153) , (1144).
VIII » (10 11 0), (10 10 1), (1092) , (1083) , (1074) , (1065).
IX » (00 14 0), (00 13 1), (00 12 2), (00 11 3), (00 10 4), (0095), (0086), (0077).

Inoltre per il sistema, che soddisfa le condizioni:

(4020) abbiamo trovato: $\pi=4$, $\psi=0$, $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=3$
(4011) » $\pi=0$, $\psi=6$, $\lambda=0$, $\mu=3$, $\nu=3$
(3120) » $\pi=1$, $\psi=0$, $\lambda=1$, $\mu=1$, $\nu=1$
(3111) » $\pi=1$, $\psi=0$, $\lambda=1$, $\mu=1$, $\nu=1$

e per i sistemi del terzo gruppo: $\pi=\lambda=\mu=\nu=\psi=0$.

2. Prima di studiare i sistemi dei rimanenti sei gruppi, osserviamo che se si conoscono le caratteristiche del sistema, che soddisfa le condizioni $(mnpq)$, la classe di questo sistema è eguale all'ordine del sistema consecutivo, cioè del sistema, che soddisfa le condizioni $(mnp-1\,q+1)$; sicchè trovate le caratteristiche del primo sistema di ogni gruppo, dei rimanenti sistemi dello stesso gruppo, ci basta trovare due dei numeri $\pi$, $\psi$, $\lambda$ e per mezzo delle equazioni (I) possiamo ricavare il rimanente e la classe.

3. Per la ricerca dei numeri $\pi$, $\psi$, $\lambda$ faremo qualche volta uso dei seguenti teoremi:

I. Il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp-2q)$ e le altre due $\left|\begin{matrix}A_1 & A_2\\ A'_1 & A'_2\end{matrix}\right|$ [2], è eguale al numero delle correlazioni con punti eccezionali, che soddisfano le stesse

[1] $m$ ed $n$ indicano rispettivamente il numero dei punti e dei piani dati nel primo spazio, poli e piani polari di altrettanti dati piani e punti del secondo spazio; $p$ e $q$ indicano il numero delle coppie di punti e di piani coniugati.

[2] Il simbolo $\left|\begin{matrix}A_1 & A_2\\ A'_1 & A'_2\end{matrix}\right|$ rappresenta due coppie di punti coniugati.

dodici condizioni e la condizione doppia $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$, aumentato del numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, che hanno i piani eccezionali del primo spazio, che passano per A, e che soddisfano le stesse dodici condizioni.

*Dim.* Se i due punti $A_1$, $A_2$ coincidono in uno stesso punto A, il numero delle correlazioni con punti eccezionali, che soddisfano le date condizioni, non cambia, ma però queste correlazioni eccezionali possono essere: di 1° ordine, ed allora la retta $A'_1 A'_2 \equiv a'$ sarà la retta polare di A; di 2° ordine, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, nelle quali il piano eccezionale del primo spazio passa per A, ed allora sebbene $A'_1$, $A'_2$ sono coniugati ad A, la retta $A'_1 A'_2$ non è polare di A; perchè in generale non si trova sopra uno dei piani polari di A, che formano un fascio.

Il teorema è così dimostrato.

II. Il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine, con punti eccezionali, che soddisfano le undici condizioni $(mnp-3q)$ [1] e le altre tre $\left|\begin{matrix} A & A_1 \\ \alpha' & A'_1 \end{matrix}\right|$, è eguale al numero delle correlazioni eccezionali dello stesso ordine, con punti eccezionali, che soddisfano le stesse undici condizioni e le altre tre $\left|\begin{matrix} A \\ \alpha' \end{matrix}\right|$, aumentato del numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, in cui i piani eccezionali del primo spazio passano per A e che soddisfano le undici condizioni $(mnp-3q)$ e l'altra $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$ [2]; e del numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine, con un punto eccezionale ed una retta eccezionale per il punto in ogni spazio, che soddisfano le stesse undici condizioni e che hanno le rette eccezionali del primo spazio, passanti per A.

*Dim.* Quando i punti A ed $A_1$ coincidono, il numero delle correlazioni con punti eccezionali, che soddisfano le condizioni date non cambia; ma però queste correlazioni eccezionali possono essere: di 1° ordine, ed allora il piano $A'_1 a' \equiv \alpha'$ sarà il piano polare di A; di 2° ordine, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale passante per il punto, che hanno il piano eccezionale del primo spazio che passa per A; ed allora sebbene $a'$ ed $A'_1$ sono coniugati ad A, il piano $A'_1 a'$ non è in generale uno dei piani polari di A.

Possono infine essere di secondo ordine, con un punto eccezionale ed una retta eccezionale passante per il punto, in ogni spazio e nelle quali la retta eccezionale del primo spazio passa per A, ed in tal caso sebbene $a'$ ed $A'_1$ sono coniugati ad A, il piano $A'_1 a'$ non è un piano polare di A, perchè non passa per il punto eccezionale del secondo spazio. Il teorema è così dimostrato.

[1] Questo teorema è vero qualunque sieno le undici condizioni che abbiamo dinotato con $(mnp-3q)$; e lo stesso dicasi per il precedente.

[2] In tal caso $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$ rappresenta una condizione, perchè indica che il punto, ove $a'$ sega il piano eccezionale del secondo spazio, è coniugato ad A.

Dinotando con $\pi_{(mnpq)}$ il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, che soddisfano le quattordici condizioni $(mnpq)$ ove è $p \geqslant 3$; con $\pi_{(m+1\,n\,p-3q)}$ il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, che soddisfano le condizioni $(m+1\,n\,p-3\,q)$; con $\varrho_{(mnp-2q)\,A}$ il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, nelle quali i piani eccezionali del primo spazio passano per A, e che soddisfano le condizioni $(m\,n\,p-2\,q)$; con $\varrho_{(mnp-3q^{A}_{a'})\,A}$ il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio nelle quali i piani eccezionali del primo spazio passano per A, e che soddisfano le condizioni $\left(mnp-3q\begin{matrix}A\\a'\end{matrix}\right)$; ed infine dinotando con $\tau_{(mnp-3q)\,A}$ il numero di quelle correlazioni eccezionali di secondo ordine con una retta eccezionale ed un punto eccezionale sulla retta in ogni spazio, le quali hanno la retta eccezionale del primo spazio, che passa per A, e soddisfano le condizioni $(mnp-3q)$; si ha per i due teoremi dimostrati:

$$\text{(II)} \qquad \pi_{(mnpq)} = \pi_{(m+1\,np-3q)} + \varrho_{(mnp-2q)\,A} + \varrho_{(mnp-3q^{A}_{a'})\,A} + \tau_{(mnp-3q)\,A}\,.$$

III. Il numero $\psi_{(mnpq)}$ delle correlazioni eccezionali di primo ordine con rette eccezionali, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp-2q)$ e le altre due $\left|\begin{matrix}A & A_1\\ A' & A'_1\end{matrix}\right|$, è eguale al numero $\psi_{(mnp-2q^{A}_{a'})}$ delle dette correlazioni, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp-2q)$ e la condizione doppia $\left(\begin{matrix}A\\a'\end{matrix}\right)$, aumentato del numero $\sigma_{(mnp-2q)\,A}$ delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con una retta eccezionale e con un piano eccezionale per la retta in ogni spazio, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp-2q)$ e che hanno il piano eccezionale del primo spazio, che passa per A. Si ha cioè:

$$\text{(III)} \qquad \psi_{(mnpq)} = \psi_{(mnp-2q^{A}_{a'})} + \sigma_{(mnp-2q)\,A}\,.$$

La dimostrazione è analoga alle precedenti, ed inoltre questo teorema è vero qualunque sieno le dodici condizioni, che abbiamo dinotato con $(mnp-2q)$.

Il teorema correlativo a questo è anche vero e ci dà:

$$\text{(III')} \qquad \psi_{(mnpq)} = \psi_{(mnpq-2^{\alpha}_{a'})} + \tau_{(mnpq-2)\alpha}$$

ove $\tau_{(mnp-2q)\alpha}$ dinota il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto eccezionale ed una retta eccezionale per il punto in ogni spazio, che soddisfano le dodici condizioni $(mnpq-2)$, ed hanno il punto eccezionale del primo spazio sul piano $\alpha$.

Similmente i teoremi correlativi ai teoremi I e II sono veri (1).

4. Il primo sistema del quarto gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (3050) ossia:

$$\left| \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & C'_5 \end{matrix} \right|.$$

*a*) Ricerca di $\lambda$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ del primo spazio deve almeno contenere due punti B; perchè altrimenti due piani $\beta'$ dovrebbero coincidere con il piano eccezionale $\varepsilon'$ dell'altro spazio; ma se $\varepsilon$ passa per $B_1$ e $B_2$ sarà $\varepsilon' \equiv \beta'_3$ e su questo dovrebbero trovarsi almeno quattro punti C'; se poi è $\varepsilon \equiv B_1B_2B_3$ sarà $\varepsilon'$ un piano per i cinque punti C'; ciò che è assurdo. Dunque è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. La retta eccezionale $e$ del primo spazio, deve passare almeno per uno dei punti B, perchè altrimenti per la retta eccezionale $e'$ del secondo spazio dovrebbero passare i tre piani $\beta'$; sia dunque $e$ una retta per $B_1$, sarà $e' \equiv \beta'_2 \beta'_3$, ed inoltre $e$, $e'$ devono soddisfare le quattro condizioni $(e \,.\, B_2\, B_3\, C_1\, C_2\, C_3\, C_4\, C_5) = (\beta'_2 \beta'_3 \,.\, \beta'_2 \beta'_3\, C'_1\, C'_2\, C'_3\, C'_4\, C'_5)$; ciò che è impossibile; perchè una retta, che passa per un punto, non può soddisfare che altre due condizioni. Similmente se fosse $e = B_1B_2$, sarebbe $e'$ una retta di $\beta'_3$, che dovrebbe soddisfare le tre condizioni $(e \,.\, B_3C_1C_2C_3C_4C_5) = (e' \,.\, \beta'_3\, C'_1\, C'_2\, C'_3\, C'_4\, C'_5)$, ciò che è impossibile. Dunque è $\psi = 0$.

*c*) Ricerca di $\pi$.

Dalla formola (II) si ha:

$$\pi_{(3050)} = \pi_{(4020)} + \varrho_{(3030)\,A} + \varrho_{(3020\,\frac{A}{\alpha'})\,A} + \tau_{(3020)\,A}$$

sappiamo (1) che $\pi_{(4020)} = 4$.

Ricerca di $\tau_{(3020)\,A}$. Le undici condizioni sono $\left| \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & C_1 & C_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & C'_1 & C'_2 \end{matrix} \right|$ ed inoltre la retta eccezionale $e$ deve passare per A. È necessario che $e$ contenga un punto B, perchè altrimenti i piani $\beta'$ dovrebbero passare per $e'$; sia dunque $e \equiv AB_1$, sarà $e' \equiv \beta'_2 \beta'_3$; ma le due rette $e$, $e'$ non soddisfano la condizione $(e.B_2\, B_3\, C_1\, C_2) = (\beta'_2 \beta'_3 \,.\, \beta'_2 \beta'_3\, C'_1\, C'_2)$; dunque è $\tau_{(3020)\,A} = 0$.

Ricerca di $\varrho_{(3020\,\frac{A}{\alpha'})\,A}$. Oltre alle undici condizioni innanzi scritte, vi è l'altra $\binom{A}{\alpha'}$, ed inoltre il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per A. È necessario, che $\varepsilon$ contenga due punti B; sia cioè $\varepsilon \equiv AB_1B_2$, sarà $\varepsilon' \equiv \beta'_3$, e poichè i punti C non sono sopra $\varepsilon$, i loro coniugati C' dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$, ciò che non è. Dunque $\varrho_{(3020\,\frac{A}{\alpha'})\,A} = 0$. Con lo stesso ragionamento si vede che anche $\varrho_{(3030)\,A} = 0$.

(1) Per le correlazioni eccezionali di primo ordine con rette eccezionali, il teorema analogo al teorema II non è vero; perchè se alle condizioni $\left| \begin{matrix} A & A_1 \\ \alpha' & A'_2 \end{matrix} \right|$ si sostituiscono le tre $\left| \begin{matrix} A \\ \alpha' \end{matrix} \right|$ il numero delle correlazioni con rette eccezionali cambia, e ciò perchè la esistenza di un piano $\alpha'$ può far sì che la corrispondenza fra le due punteggiate $e$, $e'$ (rette eccezionali) possa stabilirsi, mentre che nel primo caso non si poteva. Per esempio, non esistono correlazioni con rette eccezionali, che soddisfano le quattordici condizioni (00122), come si vedrà in seguito (28); ma invece (22) ne esistono sei, che soddisfano le condizioni (1092).

Sostituendo si ha:

$$\pi_{(3050)} = 4 .$$

*d*) Le formole I dànno $\mu = 1$, $\nu = 3$.

5. Il secondo sistema del quarto gruppo, soddisfa le condizioni (3041), ossia:

$$\left| \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \delta \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & \delta' \end{matrix} \right| .$$

Il suo ordine sappiamo (2) che è $\mu = 3$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Con lo stesso ragionamento fatto nel numero precedente *a*), si vede che è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. La retta eccezionale $e$ deve almeno passare per un punto B; sia $e$ una retta per $B_1$, sarà $e' \equiv \beta'_2 \beta'_3$; ed allora $e$ dovrà soddisfare le tre condizioni $(e . B_2 B_3 C_1 C_2 C_3 C_4) = (\beta'_2 \beta'_3 . \beta'_2 \beta'_3 C'_1 C'_2 C'_3 C'_4)$; ciò che è impossibile. Se però è la retta $e \equiv B_1 B_2$, sarà $e'$ una retta di $\beta'_3$, che soddisfa le due condizioni $(e . B_3 C_1 C_2 C_3 C_4) = (e' . \beta'_3 C'_1 C'_2 C'_3 C'_4)$. Per trovare questa retta, stabilisco la proiettività fra il fascio $e$ e la punteggiata $\overline{C'_1 C'_2}$ della quale conosco i tre punti $\beta'_3 . C'_1 C'_2$, $C'_1$, $C'_2$ corrispondenti rispettivamente ai piani $eB_3$, $eC_1$, $eC_2$ del fascio.

Trovo allora i punti $D'_3$, $D'_4$ della punteggiata, che corrispondono ai piani $eC_3$, $eC_4$ del fascio; le rette $D'_3 C'_3$, $D'_4 C'_4$ segheranno $\beta'_3$ in due punti per i quali passa la retta $e'$ richiesta. Infatti il fascio $e' . \beta'_3 C'_1 C'_2 C'_3 C'_4$ è prospettivo alla punteggiata $C'_1 C'_2$ e quindi proiettivo al fascio $e$. Lo stesso dicasi quando $e \equiv B_2 B_3$, oppure $e \equiv B_3 B_1$; quindi è $\psi = 3$.

*c*) Le formole I ci dànno $\pi = 6$, $\nu = 6$.

6. Il terzo sistema del quarto gruppo soddisfa le condizioni (3032); ossia:

$$\left| \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & C_1 & C_2 & C_3 & \delta_1 & \delta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & C'_1 & C'_2 & C'_3 & \delta'_1 & \delta'_2 \end{matrix} \right| .$$

Sappiamo che l'ordine del sistema è $\mu = 6$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Se il piano eccezionale $\varepsilon$ non contenesse un punto B, sul piano $\beta'$ corrispondente a questo dovrebbero trovarsi almeno due punti C'; ciò che non è; dunque è necessario che sia $\varepsilon \equiv B_1 B_2 B_3$ ed allora sarà $\varepsilon' \equiv C'_1 C'_2 C'_3$.

Fra questi due piani si deve ora stabilire una correlazione ordinaria (1); del piano $\varepsilon$ conosciamo i poli $B_1, B_2, B_3$ e le rette $\varepsilon\delta_1$, $\varepsilon\delta_2$, e del piano $\varepsilon'$ le rette polari $\varepsilon'\beta'_1$, $\varepsilon'\beta'_2$, $\varepsilon'\beta'_3$, e le rette coniugate $\varepsilon'\delta'_1$, $\varepsilon'\delta'_2$, e come si sa la correlazione si può stabilire in un sol modo (2). Quindi è $\lambda = 1$.

*b*) Ricerca di $\psi$. La retta eccezionale $e$ deve contenere uno o due punti B. Supponiamo prima che ne contenga uno, e sia $e$ una retta per $B_1$; sarà $e' \equiv \beta'_2 \beta'_3$ ed inoltre $e$ deve soddisfare le due condizioni $(e . B_2 B_3 C_1 C_2 C_3) = (\beta'_2 \beta'_3 . \beta'_2 \beta'_3 C'_1 C'_2 C'_3)$. Questa retta $e$ è la quarta generatrice comune al cono di secondo ordine di vertice $B_1$ formato dalle rette per $B_1$, che projettano le quattro rette $B_1B_2$, $B_1B_3$, $B_1C_1$, $B_1C_2$ in modo da formare un fascio projettivo al fascio dato $\beta'_2 \beta'_3 . \beta'_2 \beta'_3 C'_1 C'_2$; ed al cono, anche di vertice $B_1$, luogo delle rette, che projettano $B_1B_2$, $B_1B_3$, $B_1C_1$, $B_1C_3$

(1) Vedi parte I, § 10, 6.

(2) Hirst, *Note on the correlation of two planes.* Annali di Matematica vol. VI.

in modo da formare un fascio projettivo al fascio $\beta'_2\beta'_3 . \beta'_2\beta'_3 C'_1 C'_3$; avendo i due coni le tre generatrici $B_1B_2$, $B_1B_3$, $B_1C_1$ in comune. Lo stesso dicasi quando $e$ passa per $B_2$ o $B_3$; e perciò abbiamo tre correlazioni.

Sia ora $e \equiv B_1B_2$, sarà $e'$ una retta di $\beta'_3$, che soddisfa le due condizioni:

$$(e . B_3 C_1 C_2 C_3) = (e' . \beta'_3 C'_1 C'_2 C'_3) \quad , \quad (B_1B_2 . B_1 B_2 \delta_1 \delta_2) = (e' . \beta'_1 \beta'_2 \delta'_1 \delta'_2) .$$

Tutte le rette di $\beta'_3$, che soddisfano la prima equazione, formano un fascio (5,*b*) e quelle dello stesso piano, che soddisfano la seconda, inviluppano una conica, che tocca le rette $\beta'_3\beta'_1$, $\beta'_3\beta'_2$, $\beta'_3\delta'_1$, $\beta'_3\delta'_2$; quindi vi sono sopra $\beta'_3$ due rette $e'$, che soddisfano le due equazioni; e perciò abbiamo due correlazioni.

Lo stesso dicasi se $e \equiv B_2B_3$ oppure $e \equiv B_3B_1$. Dunque è $\psi = 9$.

*c*) Le formole (I) ci dànno $\pi = 3$, $\nu = 7$.

7. Passiamo ora allo studio dei sistemi del quinto gruppo. Il primo soddisfa le condizioni (21 50), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & C'_5 \end{matrix} \right| .$$

*a*) Ricerca di $\lambda$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere almeno un punto A; perchè altrimenti i piani $\alpha'$ dovrebbero coincidere. Giacchè $\varepsilon$ contiene un punto A, il polo $B'$ di $\beta$ deve trovarsi sopra il piano eccezionale $\varepsilon'$, il quale non potrà coincidere con alcun piano $\alpha'$, e quindi i punti $A_1$, $A_2$ devono trovarsi tutti e due sopra $\varepsilon$. Sul piano $\varepsilon$, vi può essere un sol punto C; quindi quattro punti $C'$ devono trovarsi sopra $\varepsilon'$; ciò che è impossibile; perciò è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. Se la retta eccezionale $e$ si trovasse sopra $\beta$, sarebbe $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$, ed $e$ dovrebbe soddisfare le cinque condizioni $(e . A_1 A_2 \beta C_1 C_2 C_3 C_4 C_5) = (e' . \alpha'_1 \alpha'_2 B' C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5)$, ciò che è impossibile. Poichè $e$ non si trova sopra $\beta$, sarà $e'$ una retta per $B'$, e poichè i piani $\alpha'$ non passano per $e'$, deve essere $e \equiv A_1A_2$. La retta $e'$, che passa per $B'$, deve soddisfare le due condizioni $(e . C_1 C_2 C_3 C_4 C_5) = (e' . C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5)$, ed abbiamo visto (6,*b*), che ve n'è una sola. Dunque è $\psi = 1$.

*c*) Ricerca di $\pi$.

Per il teorema II si ha:

$$\pi_{(2150)} = \pi_{(3120)} + \varrho_{(2130)\,P} + \varrho_{(2120)\,\frac{P}{P'})\,P} + \tau_{(2120)\,P} \quad (^1).$$

Sappiamo (1) che $\pi_{(3120)} = 1$.

Ricerca di $\tau_{(2120)\,P}$. Le condizioni sono $\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 \end{matrix} \right|$ ed inoltre la retta eccezionale $e$ deve passare per un dato punto P. Giacchè la retta $e$ non si trova sopra $\beta$, la retta $e'$ deve passare per $B'$; e perciò i piani $\alpha'$ che non passano per $B'$ non possono passare per $e'$. Ma il polo di un piano, che non passa per la retta eccezionale, deve trovarsi sulla retta eccezionale dell'altro spazio; dunque i punti $A_1$, $A_2$ devono trovarsi sopra una stessa retta, che passa per P; assurdo. È perciò $\tau_{(21\,20)P} = 0$.

(1) Al posto di A si è messo P.

Ricerca di $\varrho_{(2130)\,P}$. Le correlazioni, con un punto eccezionale ed un piano eccezionale pel punto in ogni spazio, devono soddisfare oltre alle undici condizioni innanzi scritte, l'altra $\left|\begin{matrix} C_3 \\ C'_3 \end{matrix}\right|$, e devono avere i piani eccezionali $\varepsilon$, che passano per un dato punto P. Poichè $\beta$ non può coincidere con $\varepsilon$, sarà $\varepsilon'$ un piano per B'; e poichè per B' non passano i piani $\alpha'$, sarà $\varepsilon \equiv PA_1A_2$. I punti C non si trovano sopra $\varepsilon$, quindi $\varepsilon'$ deve passare per B' e per i tre punti C', ciò che è impossibile. Dunque è $\varrho_{(2130)} = 0$.

Ricerca di $\varrho_{(2120\,{}^{P}_{p'})\,P}$. Cerchiamo ora se vi sono correlazioni con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, che soddisfano le undici condizioni scritte innanzi, l'altra $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$ e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P. Per quel che abbiamo detto innanzi è necessario che sia $\varepsilon \equiv PA_1A_2$, ed $\varepsilon' \equiv B'C'_1C'_2$. Se $\beta$ non passasse per il punto eccezionale E, sarebbe $B' \equiv E'$, e poichè i piani $\alpha'$ non passano per B', i punti $A_1$, $A_2$ dovrebbero coincidere con E; dunque è necessario che il piano $\beta$ passi per E; sarà allora $E' \equiv \varepsilon'\alpha'_1\,\alpha'_2$ ed E quel punto della retta $\varepsilon\beta$, che soddisfa la condizione $(E.A_1, A_2, \varepsilon\beta, P) = (E'.\varepsilon'\alpha'_1, \varepsilon'\alpha'_2, B', \varepsilon'p')$.

Dunque è $\varrho_{(2120\,{}^{P}_{p'})\,P} = 1$.

Sostituendo si ha $\pi_{(2150)} = 1 + 1 = 2$.

*d*) Le formole (I) dànno $\mu = 1$, $\nu = 2$.

8. Il secondo sistema del quinto gruppo soddisfa le condizioni (2141); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \delta \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & \delta' \end{matrix}\right|.$$

L'ordine di questo sistema è $\mu = 2$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Come nel numero precedente si dimostra che è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. È facile vedere che deve essere $e \equiv A_1A_2$; sarà allora $e'$ una retta, che passa per B' e che soddisfa le due condizioni $(e\,.\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4) = (e'.\,C'_1\,C'_2\,C'_3\,C'_4)$, $(A_1A_2\,.\,A_1A_2\,\beta\delta) = (e'.\,\alpha'_1\,\alpha'_2\,B'\,\delta')$. Le rette $e'$, per B', che soddisfano le prima condizione formano un cono di secondo ordine $(6, b)$, quelle, che soddisfano la seconda e passano per B', formano un fascio, quindi le due rette comuni al cono ed al piano del fascio soddisfano la quistione; perciò è $\psi = 2$.

*c*) Le formole (I) ci dànno $\pi = 4$, $\nu = 4$.

9. Il terzo sistema del quinto gruppo soddisfa le condizioni (2132), cioè:

$$\left|\begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & \delta'_1 & \delta'_2 \end{matrix}\right|.$$

L'ordine di questo sistema è $\mu = 4$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ può essere $A_1A_2C_1$, $A_1A_2C_2$, $A_1A_2C_3$, ed il piano $\varepsilon'$ sarà rispettivamente $B'C'_2C'_3$, $B'C'_3C'_1$, $B'C'_1C'_2$. Abbiamo così tre casi analoghi da considerare. Sul piano $\varepsilon$ vi sono i poli $A_1$, $A_2$, la retta $\varepsilon\beta$, e le altre due $\varepsilon\delta_1$, $\varepsilon\delta_2$; sul suo associato $\varepsilon'$ vi sono le rette polari $\varepsilon'\alpha'_1$, $\varepsilon'\alpha'_2$, il polo B' di $\varepsilon\beta$, e le rette $\varepsilon'\delta'_1$, $\varepsilon'\delta'_2$ coniugate ad $\varepsilon\delta_1$, $\varepsilon\delta_2$; e la correlazione fra questi due piani si può stabilire in un sol modo [1]. Dunque è $\lambda = 3$.

[1] Hirst, l. c.

*b*) Ricerca di $\psi$. Come nei numeri precedenti è facile vedere che deve essere $e \equiv A_1A_2$. La retta $e'$ sarà allora quella retta, che passa per B', e soddisfa le due condizioni $(A_1A_2 . A_1A_2 \beta \delta_1 \delta_2) = (e' . \alpha'_1 \alpha'_2 B' \delta'_1 \delta'_2)$. Questo problema è correlativo a quello studiato § 5, 6, e come quello, ha una sola soluzione. Dunque è $\psi = 1$.

*c*) Le formole (I) dànno $\pi = 5$, $\nu = 5$.

10. Consideriamo ora i sistemi del sesto gruppo. Il primo è quello, che soddisfa le condizioni (2080), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 & B'_5 & B'_6 & B'_7 & B'_8 \end{matrix} \right| .$$

È facile vedere che $\lambda = \psi = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Si ha per il teorema II:

$$\pi_{(2080)} = \pi_{(3050)} + \varrho_{(2060)\,P} + \varrho_{(2050\,p')\,P} + \varrho_{(2050)\,P} .$$

Sappiamo (4, *c*) che $\pi_{(3050)} = 4$.

Ricerca di $\tau_{(2050)\,P}$. Le correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto eccezionale ed una retta eccezionale pel punto in ogni spazio, che hanno la retta eccezionale $e$, che passa per un dato punto P, devono soddisfare le undici condizioni (2050), cioè $\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 & B'_5 \end{matrix} \right|$. Se $e$ non contiene alcun punto A, sarà $e' \equiv \alpha'_1 \alpha'_2$ ed $e$ dovrà soddisfare le quattro condizioni $(e . A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 B_4 B)_5 = (\alpha'_1 \alpha'_2 . \alpha'_1 \alpha'_2 B'_1 B'_2 B'_3 B'_4 B'_5)$, ciò che è impossibile; perchè la retta $e$ passa già per il punto P. Se poi $e \equiv PA_1$, sarà $e'$ una retta di $\alpha'_2$, che deve soddisfare altre tre condizioni, ciò che è anche impossibile. Dunque è $\tau_{(2050)\,P} = 0$.

Ricerca di $\varrho_{(2060)\,P}$. Le correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto eccezionale ed un piano eccezionale per il punto in ogni spazio, e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, devono soddisfare oltre le undici condizioni innanzi scritte, l'altra $\left| \begin{matrix} B_6 \\ B'_6 \end{matrix} \right|$. Il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, deve contenere i due punti A; perchè altrimenti sarebbe uno dei piani $\alpha'$ il piano $\varepsilon'$, e sopra esso dovrebbero trovarsi i punti B'; essendo dunque $\varepsilon \equiv A_1A_2P$, sopra $\varepsilon$ devono trovarsi i sei punti B', ciò che è anche impossibile. Dunque è $\varrho_{(2060)\,P} = 0$.

Similmente si dimostra che $\varrho_{(2050\,p')\,P} = 0$.

Risulta allora $\pi_{(2080)} = 4$.

*b*) Le formole (I) ci dànno $\mu = 1$, $\nu = 3$.

11. Segue il sistema, che soddisfa le condizioni (2071); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 \,..\, B_7 & \gamma \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 \,..\, B'_7 & \gamma' \end{matrix} \right| .$$

L'ordine di esso è $\mu = 3$; ed è evidente che non vi sono correlazioni con piani eccezionali, che soddisfano le date condizioni e che quindi è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. La formola (II) dà:

$$\pi_{(2071)} = \pi_{(3041)} + \varrho_{(2051)\,P} + \varrho_{(2041\,p')\,P} + \tau_{(2041)\,P} .$$

Sappiamo (5,*c*) che $\pi_{(3041)} = 6$.

Ricerca di $\tau_{(2041)\,P}$. Le correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti eccezionali e rette eccezionali, devono soddisfare le undici condizioni $\left|\begin{matrix} A_1\ A_2\ B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ \gamma \\ \alpha'_1\ \alpha'_2\ B'_1 B'_2 B'_3 B'_4 \gamma' \end{matrix}\right|$ e devono avere la retta eccezionale $e$, che passa per un dato punto P. È facile vedere, che $e$ deve passare per uno dei punti A; sia perciò $e \equiv PA_1$, sarà allora $e'$ una retta di $\alpha'_2$, che soddisfa le due condizioni $(e \,.\, A_2 B_1 B_2 B_3 B_4) = (e' \,.\, \alpha'_2 B'_1 B'_2 B'_3 B'_4)$, ed abbiamo visto, che sopra $\alpha'_2$ vi è una sola retta, che gode di questa proprietà (5,*b*). Se il punto eccezionale E coincide con $A_1$, sarà $E' \equiv e'\gamma'$; se poi $E \equiv e\gamma$, sarà $E' \equiv e'\alpha'_1$; dunque abbiamo due correlazioni, ed altrettante quando $e \equiv PA_2$; perciò $\tau_{(2041)\,P} = 4$.

Facilmente si vede che $\varrho_{(2051)\,P} = \varrho_{(2041\,\frac{P}{p'})\,P} = 0$; quindi sostituendo si ha: $\pi_{(2071)} = 10$.

*b*) Le formole (J) ci dànno $\nu = 8$, $\psi = 1$.

12. Il terzo sistema del sesto gruppo soddisfa le condizioni (2062); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A_1\ A_2\ B_1\ ..\ B_6\ \gamma_1\ \gamma_2 \\ \alpha'_1\ \alpha'_2\ B'_1\ ..\ B'_6\ \gamma'_1\ \gamma'_2 \end{matrix}\right|.$$

L'ordine di questo sistema è $\mu = 8$, ed anche in questo caso è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(2062)} = \pi_{(3032)} + \varrho_{(2042)\,P} + \varrho_{(2032\,\frac{P}{p'})\,P} + \tau_{(2032)\,P}.$$

Abbiamo trovato che $\pi_{(3032)} = 3$.

Ricerca di $\tau_{(2032)\,P}$. Le undici condizioni sono $\left|\begin{matrix} A_1\ A_2\ B_1\ B_2\ B_3\ \gamma_1\ \gamma_2 \\ \alpha'_1\ \alpha'_2\ B'_1\ B'_2\ B'_3\ \gamma'_1\ \gamma'_2 \end{matrix}\right|$ ed inoltre la retta eccezionale $e$ deve contenere un dato punto P. Supponiamo che $e$ non passa per alcun punto A, sarà allora $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$, ed $e$ deve soddisfare le due condizioni $(e \,.\, A_1 A_2 B_1 B_2 B_3) = (\alpha'_1\alpha'_2 \,.\, \alpha'_1\alpha'_2 B'_1 B'_2 B'_3)$, ed abbiamo visto (6,*b*) che per un dato punto P, passa una sola retta che le soddisfa. Se $E \equiv e\gamma_1$ sarà $E' \equiv e'\gamma'_2$; ma se $E \equiv e\gamma_2$ sarà $E' \equiv e'\gamma'_1$; sicchè si hanno due correlazioni.

Sia ora $e \equiv PA_1$; sarà $e'$ una retta di $\alpha'_2$. Se $E \equiv A_1$ sarà $E' \equiv \alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2$; se $E = e\gamma_1$ sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\gamma'_2$; se infine $E \equiv e\gamma_2$, sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\gamma'_1$; sicchè abbiamo tre casi analoghi da considerare, in ciascuno dei quali $e'$ è quella retta di $\alpha'_2$, che passa per il punto E', e soddisfa la condizione $(e \,.\, A_2 B_1 B_2 B_3) = (e' \,.\, \alpha'_2 B'_1 B'_2 B'_3)$. Abbiamo così tre correlazioni ed altrettante quando $e \equiv PA_2$. Dunque è $\tau_{(2032)\,P} = 8$.

Ricerca di $\varrho_{(2032\,\frac{P}{p'})\,P}$. Le correlazioni eccezionali di secondo ordine aventi in ogni spazio un punto eccezionale ed un piano eccezionale, che passa per il punto, e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, devono soddisfare le undici condizioni scritte innanzi e l'altra $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$. È necessario che sia $\varepsilon = PA_1A_2$, ed allora sarà $\varepsilon' \equiv B'_1 B'_2 B'_3$. Se il punto eccezionale E del piano $\varepsilon$ coincidesse con uno dei punti A, per E' dovrebbero passare i due piani $\gamma'$ ed un piano $\alpha'$, ciò che è impossibile. Giacchè nessun punto A coincide con E; sarà $E' \equiv \varepsilon'\alpha'_1\alpha'_2$; e poichè i piani $\gamma'$ non passano per E', così determinato, sarà $E \equiv \varepsilon\gamma_1\gamma_2$. La correlazione fra $\varepsilon$ ed $\varepsilon'$ è completamente

determinata, perchè si conoscono di $\varepsilon$, oltre il punto eccezionale, altri tre punti $A_1, A_2, P$, e di $\varepsilon'$ le tre rette polari $\alpha'_1\varepsilon'$, $\alpha'_2\varepsilon'$, $E'.\varepsilon'p'$. Dunque è $\varrho_{(2032\,p'^{)\,P}}^{P} = 1$.

È facile vedere che $\varrho_{(2042)\,P} = 0$.

Sostituendo si ha:

$$\pi_{(2062)} = 12.$$

*b*) Le formole (1) dànno $\nu = 14$, $\psi = 10$.

13. Il quarto sistema del sesto gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (2053); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & .. & B_5 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & .. & B'_5 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{matrix} \right| .$$

L'ordine del sistema è $\mu = 14$ ed è ancora $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(2053)} = \pi_{(3023)} + \varrho_{(2033)\,P} + \varrho_{(2023\,p'^{)\,P}}^{P} + \tau_{(2023)\,P} .$$

Sappiamo già che $\pi_{(3023)} = \lambda_{(3032)} = 1$ (6).

Ricerca di $\tau_{(2023)\,P}$. La retta eccezionale $e$, delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con un punto eccezionale ed una retta eccezionale per il punto in ogni spazio, le quali soddisfano le undici condizioni $\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{matrix} \right|$, deve passare per il dato punto P. Supponiamo prima di tutto, che la retta $e$ non passa per i punti A; sarà allora $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$. Se dei piani $\gamma'$ nessuno passasse per E', sarebbe $E \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, ed $e \equiv PE$; ma le due rette $e, e'$ così determinate non soddisferebbero la condizione $(e.A_1A_2B_1B_2) = (\alpha'_1\alpha'_2.\alpha'_1\alpha'_2B'_1B'_2)$; è necessario quindi, che il punto eccezionale E' si trovi sopra un piano $\gamma'$. Posto $E' \equiv e'\gamma'_1$, sarà E un punto della retta $\gamma_2\gamma_3$, ed $e$ una retta, che passa per P, giace nel piano $P.\gamma_2\gamma_3$ e soddisfa la condizione su scritta. Le rette, che passano per P e soddisfano la condizione su detta formano un cono di secondo ordine; dunque sul piano $P.\gamma_2\gamma_3$ ve ne sono due. — Essendo lo stesso quando $E' \equiv e'\gamma'_2$ oppure $E' \equiv e'\gamma'_3$; si hanno in tutto sei correlazioni. — Sia ora $e \equiv PA_1$; sarà $e'$ una retta di $\alpha'_2$. Se il punto eccezionale E coincide con $A_1$ sarà $E' \equiv \gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3$; ma questo punto non si trova su $\alpha'_2$; dunque E non può coincidere con $A_1$. Poichè E non coincide con $A_1$, sarà E' un punto della retta $\alpha'_1\alpha'_2$, e quindi per esso non può passare che un solo piano $\gamma'$, e perciò due piani $\gamma$ devono passare per E, che è un punto di $e$; ciò che è impossibile. Dunque la retta $e$ non può contenere alcun punto A, ed è $\tau_{(2023)\,P} = 6$.

Ricerca di $\varrho_{(2033)\,P}$. Le condizioni, che devono soddisfare le correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti e piani eccezionali, che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, sono le undici condizioni innanzi scritte e l'altra $\left| \begin{matrix} B_3 \\ B'_3 \end{matrix} \right|$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv PA_1A_2$, sarà allora $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2B'_3$. Se il punto eccezionale E coincidesse con $A_2$, sarebbe E' un punto comune ad $\varepsilon', \alpha'_2, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, ciò che è impossibile; se poi E non coincidesse con i punti A, sarebbe $E' \equiv \varepsilon'\alpha'_1\alpha'_2$, e per il punto E di $\varepsilon$ dovrebbero passare i tre piani $\gamma$; ciò che è pure impossibile. Dunque è $\varrho_{(2033)\,P} = 0$.

Ci resta a trovare il valore di $\varrho_{(2023^{P}_{p'})P}$, cioè il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti e piani eccezionali, che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, ed inoltre soddisfano le undici condizioni innanzi scritte e l'altra $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$. Sarà come innanzi $\varepsilon \equiv PA_1A_2$ ed $\varepsilon'$ un piano da determinarsi, che passa per $B'_1B'_2$.

Il punto eccezionale E non può coincidere con alcuno dei punti A; ma deve trovarsi sul punto ove una delle tre rette $\gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1$ segano $\varepsilon$, ed allora sarà E', rispettivamente, il punto ove la retta $\alpha'_1\alpha'_2$ sega uno dei tre piani $\gamma'_3, \gamma'_1, \gamma'_2$. Avendo E', il piano $\varepsilon'$ è determinato; come pure, per ogni caso la correlazione; perchè di $\varepsilon$ si conoscono, oltre al punto eccezionale, i tre punti $A_1, A_2, P$; e di $\varepsilon'$ le tre rette $\varepsilon'\alpha'_1$, $\varepsilon'\alpha'_2$, $E'.\varepsilon'p'$, che passano per E'. Dunque si hanno tre correlazioni; cioè $\varrho_{(2023^{P}_{p'})P} = 3$. Sostituendo si ha:

$$\pi_{(2053)} = 10.$$

*b*) Le formole (I) dànno $\psi = 23$, $\nu = 19$.

14. Del sesto gruppo dobbiamo solo studiare il sistema, che soddisfa le condizioni (2044); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A_1 A_2 B_1 \dots B_4 \gamma_1 \dots \gamma_4 \\ \alpha'_1\alpha'_2 B_1 \dots B'_4 \gamma'_1 \dots \gamma'_4 \end{matrix}\right|.$$

In questo sistema è l'ordine eguale alla classe, e quindi $\mu = \nu = 19$; ed inoltre è anche $\pi = \lambda$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere i due punti A ed un punto B; sia $\varepsilon \equiv A_1A_2B_1$; sarà $\varepsilon' \equiv B'_2B'_3B'_4$. Del primo piano conosciamo i poli $A_1, A_2$ e le rette $\varepsilon\gamma_1, \varepsilon\gamma_2, \varepsilon\gamma_3, \varepsilon\gamma_4$; del secondo piano sono date le rette polari $\varepsilon'\alpha'_1$, $\varepsilon'\alpha'_2$ e le rette coniugate $\varepsilon'\gamma'_1, \varepsilon'\gamma'_2, \varepsilon'\gamma'_3, \varepsilon'\gamma'_4$; quindi abbiamo otto condizioni per stabilire la correlazione ordinaria fra i due piani, e si sa che essa si può stabilire in un sol modo [1].

Lo stesso dicasi quando $\varepsilon$ passa per gli altri punti B; quindi è $\lambda = 4$ e $\pi = 4$.

Le formole (I) dànno $\psi = 30$.

15. Il primo sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1180); cioè

$$\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1 \dots C_8 \\ \alpha'\ B'\ C'_1 \dots C'_8 \end{matrix}\right|.$$

*a*) Ricerca di $\lambda$. Essendoci otto coppie di punti coniugati, ne segue che se $\varepsilon$ contiene tre punti C, $\varepsilon'$ dovrà contenere cinque punti C'. Dunque è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. Se la retta eccezionale $e$ si trova sopra $\beta$, sarà $e'$ una retta di $\alpha'$; ed $e$, $e'$ devono soddisfare le sette condizioni $(e.A\beta C_1 \dots C_8) = (e'.\alpha' B' C'_1 \dots C'_8)$; ciò che è impossibile; se poi $e$ non si trova su $\beta$, dovrà passare per A ed $e'$ per B', e tutte e due devono soddisfare le cinque condizioni $(e.C_1C_2 \dots C_8) = (e'.C'_1C'_2 \dots C'_8)$; ciò che è pure impossibile. Dunque è $\psi = 0$.

*c*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(1180)} = \pi_{(2150)} + \varrho_{(1160)P} + \varrho_{(1150^{P}_{p'})P} + \tau_{(1150)P}.$$

Abbiamo trovato (7,*c*) che $\pi_{(2150)} = 0$.

[1] Hirst, l. c.

Ricerca di $\tau_{(1150)\,P}$. La retta eccezionale $e$, delle correlazioni con punti e rette eccezionali, che soddisfano le undici condizioni $\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ ..\ C_5 \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ ..\ C'_5 \end{matrix}\right|$, deve passare per il punto P.

Giacchè $e$ non si trova sopra $\beta$, $e'$ passerà per B', e poichè $\alpha'$ non passa per B', $e$ passerà per A; cioè $e \equiv PA$, ed $e'$ sarà quella retta per B', che soddisfa le due condizioni $(e\,.\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4\,C_5) = (e'\,.\,C'_1\,C'_2\,C'_3\,C'_4\,C'_5)$. Se però $E \equiv A$, sarà $E' \equiv B'$; ma se $E \equiv e\beta$ sarà $E' \equiv e'\beta'$. Si hanno così due correlazioni; cioè $\tau_{(1150)\,P} = 2$.

È facile vedere che $\varrho_{(1160)\,P} = \varrho_{(1150^{P}_{p'})\,P} = 0$; cioè che non esistono correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti eccezionali e piani eccezionali, che soddisfano le date condizioni. Infatti il piano eccezionale $\varepsilon$, che in ambo i casi passa per P, deve anche passare per A; se contiene anche un punto C, i punti C', che sono cinque nel primo caso e quattro nel secondo, dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$, che già passa per B'; e ciò è impossibile.

Sostituendo si ha $\pi_{(1180)} = 4$.

*d*) Le formole (I) dànno $\mu = 1$, $\nu = 3$.

16. Il secondo sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1171); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ ..\ C_7\ \delta \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ ..\ C'_7\ \delta' \end{matrix}\right|.$$

L'ordine del sistema è $\mu = 3$, e come nel § precedente si dimostra che è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(1171)} = \pi_{(2141)} + \varrho_{(1151)\,P} + \varrho_{(1141^{P}_{p'})\,P} + \tau_{(1141)\,P}\,.$$

Si sa (§ 8, *c*) che $\pi_{(2141)} = 4$, e come nel sistema precedente si dimostra che è $\varrho_{(1151)\,P} = \varrho_{(1141^{P}_{p'})\,P} = 0$; sicchè ci resta a trovare il valore di $\tau_{(1141)\,P}$; cioè il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti e rette eccezionali, che soddisfano le undici condizioni $\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ \delta \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ C'_2\ C'_3\ C'_4\ \delta' \end{matrix}\right|$ e che hanno la retta eccezionale $e$, che passa per un dato punto P. Poichè la retta $e$ non si trova sul piano $\beta$, $e'$ deve passare per B', e poichè $\alpha'$ non passa per B', A si deve trovare sopra $e$; cioè deve essere $e = PA$. Se il punto eccezionale E non coincide con $e\beta$; sarà $E' \equiv B'$ e quindi E dovrebbe coincidere con A, e trovarsi sul piano $\delta$; ciò che è impossibile. Se poi $E \equiv e\beta$, sarà E' un punto di $\alpha'\delta'$, ed $e'$ deve trovarsi sul piano $B'.\alpha'\delta'$, deve passare per B' e soddisfare la condizione $(e\,.\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4) = (e'\,.\,C'_1\,C'_2\,C'_3\,C'_4)$; e come abbiamo visto (13,*a*) ve ne sono due. Dunque è $\tau_{(1141)\,p} = 2$.

Sostituendo si ha:

$$\pi_{(1171)} = 6\,.$$

*b*) Le formole (I) ci dànno $\psi = 3$, $\nu = 6$.

17. Il terzo sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1162), cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ ..\ C_6\ \delta_1\ \delta_2 \\ \alpha\ B'\ C'_1\ ..\ C'_6\ \delta'_1\ \delta'_2 \end{matrix}\right|.$$

L'ordine del sistema è $\mu = 6$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Se il piano eccezionale $\varepsilon$ non contenesse il punto A, sarebbe $\varepsilon' \equiv \alpha'$, e poichè B′ non si trova sopra $\alpha'$, sarebbe $\varepsilon \equiv \beta$ ed i punti C, C′ non sarebbero coniugati. Se poi $\varepsilon$ passa per A, dovrà $\varepsilon'$ passare per B′, e se $\varepsilon$ contiene due punti C, $\varepsilon'$ dovrà contenere 4 punti C′, ciò che è impossibile. Dunque è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(1162)} = \pi_{(2132)} + \varrho_{(1142)} + \varrho_{(1132\,p'}^{\,P)} + \tau_{(1132)P}.$$

Abbiamo già trovato che $\pi_{(2132)} = 5$ (9,*c*); inoltre come per i sistemi precedenti è facile vedere che è $\varrho_{(1142)} = 0$.

Ricerca di $\tau_{(1132)P}$. Le undici condizioni sono $\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ C_2\ C_3\ \delta_1\ \delta_2 \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ C'_2\ C'_3\ \delta'_1\ \delta'_2 \end{matrix}\right|$ e la retta eccezionale $e$ deve passare per il punto P. È necessario che sia $e \equiv PA$, ed allora sarà $e'$ una retta per B′. Se $\beta$ non passa per E, sarà $E' \equiv B'$, e poichè per B′ non passano i piani $\delta'$ ed il piano $\alpha'$, i piani $\delta$ dovrebbero passare per E, il quale dovrebbe coincidere con A; ciò che è impossibile. Dunque è necessario che sia $E \equiv e\beta$, ed allora sarà $E' \equiv \alpha'_1 \delta'_1 \delta'_2$, $e' \equiv B'E'$. Dunque $e\ \tau_{(1132)P} = 1$.

Ricerca di $\varrho_{(1132\,p'}^{\,P)P}$. Le correlazioni eccezionali con punti eccezionali e piani eccezionali devono soddisfare le undici condizioni su scritte, la condizione $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$ ed avere il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P. Si vede facilmente che $\varepsilon$ deve contenere A ed uno dei punti C; sia $\varepsilon \equiv PAC_1$, sarà $\varepsilon' \equiv B'C'_2C'_3$. Se $\beta$ non passasse per E, sarebbe $E' \equiv B'$, $E \equiv A$ ed i piani $\delta$, $\delta'$ non sarebbero coniugati; dunque $\beta$ deve passare per E. Se per esso non passasse alcun piano $\delta$, sarebbe $E' \equiv \alpha'\delta'_1\delta'_2$, il quale non si troverebbe sopra $\varepsilon'$; dunque deve essere $E \equiv \varepsilon\beta\delta_1$, oppure $E \equiv \varepsilon\beta\delta_2$, e sarà rispettivamente $E' \equiv \varepsilon'\alpha'\delta'_2$ oppure $E' \equiv \varepsilon'\alpha'\delta'_1$. Si hanno così due correlazioni. Lo stesso dicasi quando $\varepsilon \equiv PAC_2$, oppure $\varepsilon \equiv PAC_3$; quindi è $\varrho_{(1132\,p'}^{\,P)P} = 6$.

Sostituendo abbiamo:

$$\pi_{(1162)} = 12.$$

*c*) Le formole (I) ci dànno $\psi = 6$, $\nu = 12$.

18. Il quarto sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1153) cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ ..\ C_5\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ ..\ C'_5\ \delta'_1\ \delta'_2\ \delta'_3 \end{matrix}\right|.$$

L'ordine del sistema è $\mu = 12$, e come pel sistema precedente è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Dal teorema (II) si ha:

$$\pi_{(1153)} = \pi_{(1123)} + \varrho_{(1133)P} + \varrho_{(1123\,p'}^{\,P)P} + \tau_{(1133)P}.$$

Abbiamo trovato (9,*a*) che $\pi_{(2123)} = \lambda_{(2132)} = 3$.

Ricerca di $\tau_{(1123)P}$. Le condizioni che devono soddisfare le correlazioni con punti e rette eccezionali sono $\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1\ C_2\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \\ \alpha'\ B'\ C'_1\ C'_2\ \delta'_1\ \delta'_2\ \delta'_3 \end{matrix}\right|$; e devono avere la retta eccezionale $e$, che passa per il punto P. È necessario che sia $e \equiv PA$, ed $e'$ sarà una retta per B′; se il punto eccezionale E si trova in $e\beta$, per E′ dovrebbero passare i piani $\delta'$ ed $\alpha'$, ciò che è impossibile; se poi il piano $\beta$ non passa per E, sarà $E' \equiv B'$, e quindi E

deve coincidere con A e trovarsi contemporaneamente sui tre piani $\delta$; ciò che è pure assurdo. Dunque $\tau_{(1123)P} = 0$.

Ricerca di $\varrho_{(1133)P}$. Alle undici condizioni su scritte aggiungiamo l'altra $\left|\begin{matrix} C_3 \\ C'_3 \end{matrix}\right|$.

Il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P, deve contenere il punto A ed un punto C. Sia precisamente $\varepsilon \equiv PAC_1$; sarà $\varepsilon' \equiv C'_2C'_3B$. Se $\beta$ non passa per E, sarà $B' \equiv E'$, e quindi E deve coincidere con A e trovarsi sui piani $\delta$; se poi $\beta$ passa per E, per questo punto non può passare che un solo piano $\delta$; sicchè due piani $\delta'$ ed il piano $\alpha'$ dovrebbero avere in comune un punto di $\varepsilon'$; ciò che è pure impossibile. Dunque $\varrho_{(1133)P} = 0$.

Ricerca di $\varrho_{(1123\,{}^{P}_{p'})E}$. Le condizioni, che devono soddisfare le correlazioni eccezionali con un punto eccezionale ed un piano eccezionale, sono le undici su scritte, l'altra $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$, e quella di avere il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per P. Il piano $\varepsilon$ deve anche passare per il punto A; supponiamo che non contiene alcun punto C, sarà $\varepsilon' \equiv B'C_1'C'_2$. Inoltre come abbiamo visto altre volte è necessario che $\beta$ passi per E, e quindi $\alpha'$ per E', per il quale punto non può passare che un piano $\delta$; di modo che se $E' \equiv \varepsilon'\alpha'\delta'_1$, sarà $E \equiv \beta\delta_2\delta_3$, $\varepsilon \equiv PAE$. Essendo tre le coppie di piani coniugati si hanno tre correlazioni. Se poi il piano eccezionale $\varepsilon$ contiene un punto C, se cioè $\varepsilon \equiv PAC_1$, sarà $\varepsilon'$ un piano, che passa per $B'C'_2$. Come innanzi è necessario che $\beta$ passi per E, per il qual punto deve passare anche un piano $\delta$, cioè deve essere $E \equiv \varepsilon\beta\delta$; allora sarà E' il punto comune a due piani $\delta'$ ed al piano $\alpha'$. Essendo tre le coppie di piani coniugati si hanno tre correlazioni, ed altrettante se ne otterranno quando $\varepsilon \equiv PAC_2$. Dunque è $\varrho_{(1123\,{}^{P}_{p'})P} = 9$.

Sostituendo si ottiene:

$$\pi_{(1153)} = 12 .$$

*b*) Le formole (I) dànno $\psi = 18$, $\nu = 18$.

19. L'ultimo sistema del settimo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (1144) cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ \beta\ C_1 \ldots C_4\ \delta_1 \ldots \delta_4 \\ \alpha'\ B'\ C'_1 \ldots C'_4\ \delta'_1 \ldots \delta'_4 \end{matrix}\right| .$$

In questo sistema l'ordine è eguale alla classe ed è $\mu = \nu = 18$.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Si ha $\varepsilon \equiv AC_1C_2$, $\varepsilon' \equiv B'C'_3C'_4$. Però il piano $\varepsilon$ può contenere due punti qualunque dei quattro punti C, ed $\varepsilon'$ conterrà quei due punti C', che non sono coniugati a quelli, che contiene $\varepsilon$; si hanno così sei casi analoghi da considerare.

Nel piano $\varepsilon$ abbiamo il punto A e le cinque rette ove $\varepsilon$ è segato dai piani $\beta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$; e nel piano $\varepsilon'$ abbiamo la retta $\varepsilon'\alpha'$ polare di A, il punto B' polo di $\beta\varepsilon$, e le rette $\varepsilon'\delta'_1$, $\varepsilon'\delta'_2$, $\varepsilon'\delta'_3$, $\varepsilon'\delta'_4$, coniugate rispettivamente a quelle in cui $\varepsilon$ è segato dai piani $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$; quindi fra $\varepsilon$ ed $\varepsilon'$ si può stabilire ed in un sol modo una correlazione ordinaria [1]. Abbiamo perciò $\lambda = 6$; ed essendo per questo sistema $\pi = \lambda$, sarà anche $\pi = 6$.

[1] Hirst, l. c.

*b*) Le formole (I) dànno $\psi = 24$.

20. Dobbiamo ora considerare i sistemi di correlazioni appartenenti all'ottavo gruppo; i quali soddisfano ad una sola condizione tripla e ad altre undici condizioni semplici. Il primo sistema soddisfa le condizioni (10 11 0) cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \dots B_{11} \\ \alpha'\ B'_1 \dots B'_{11} \end{matrix} \right| .$$

*a*) Ricerca di $\lambda$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere il punto A; perchè altrimenti sopra $\alpha'$ dovrebbero trovarsi dei punti B'; inoltre $\varepsilon$, oltre il punto A, non può contenere che due punti B; quindi sopra $\varepsilon'$ devono trovarsi nove punti B', ciò che è impossibile. Quindi è $\lambda = 0$. Si ottiene lo stesso valore zero per $\lambda$, per tutti i sistemi di questo gruppo, che soddisfano a condizioni in cui vi sono più di cinque coppie di punti coniugati.

*b*) Ricerca di $\psi$. È facile vedere che non si possono stabilire correlazioni con rette eccezionali, che soddisfano le date condizioni; perciò $\psi = 0$.

*c*) Ricerca di $\pi$. Per la formola (II) si ha:

$$\pi_{(10\,11\,0)} = \pi_{(2080)} + \varrho_{(1090)\,P} + \varrho_{(1080\,\overset{P}{p'})P} + \tau_{(1080)\,P} .$$

Sappiamo già che $\pi_{(2080)} = 4$ (10, *a*).

Ricerca di $\tau_{(1080)}$. Le undici condizioni sono $\left| \begin{matrix} A\ B_1 \dots B_8 \\ \alpha'\ B'_1 \dots B'_8 \end{matrix} \right|$ e la retta $e$ deve contenere il punto P. Se $e$ passa per A, sarà $e'$ una retta del secondo spazio, che deve soddisfare le cinque condizioni $(e \,.\, B_1 B_2 \,..\, B_8) = (e' \,.\, B'_1 B'_2 B'_8)$, ciò che è impossibile; se poi $e$ non contiene A, sarà $e'$ una retta di $\alpha'$, ed $e$, $e'$ devono soddisfare le sei condizioni $(e \,.\, AB_1 \,..\, B_8) = (e' \,.\, \alpha' B'_1 \,..\, B'_8)$; e ciò è anche impossibile. Dunque è $\tau_{(10\,80)} = 0$.

È facile vedere che $\varrho_{(1090)\,P} = \varrho_{(10\,80\,\overset{P}{p'})\,P} = 0$; perchè il piano $\varepsilon$ deve passare per PA e non può contenere che un sol punto B, di modo che almeno sette punti B' dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$.

Dunque è $\pi_{(10\,11\,0)} = 4$.

*d*) Le formole (I) dànno $\mu = 1$, $\nu = 3$.

21. Il secondo sistema dell'ottavo gruppo soddisfa le condizioni (10 10 1), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \dots B_{10}\ \gamma \\ \alpha'\ B'_1 \dots B'_{10}\ \gamma' \end{matrix} \right| .$$

L'ordine di questo sistema è $\mu = 3$, e per quel che si è detto nel precedente numero $\lambda = 0$. Anche $\psi = 0$; perchè se la retta $e$ passasse per il punto A, $e$ ed $e'$ dovrebbero soddisfare le sette condizioni $(e \,.\, B_1 B_2 \,..\, B_{10}) = (e' \,.\, B'_1 B'_2 \dots B'_{10})$; una di più di quante ce ne vogliono per determinarle; e se la retta $e$ non passa per A, sarà $e'$ una retta di $\alpha'$, ed $e, e'$ devono soddisfare le sette condizioni su scritte, e l'altra che i piani $eA$, $\alpha'$ sieno corrispondenti nei due fasci projettivi $e$, $e'$.

Per mezzo delle (I) possiamo ricavare $\pi = 12$, $\nu = 9$.

22. Il terzo sistema dell'ottavo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (10 92); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \ldots B_9\ \delta_1\ \delta_2 \\ \alpha'\ B'_1 \ldots B'_9\ \delta'_1\ \delta'_2 \end{matrix} \right| .$$

L'ordine è $\mu = 9$ ed è $\lambda = 0$ $(20, a)$.

*a*) Ricerca di $\psi$. Per la formola (III) si ha:

$$\psi_{(1092)} = \psi_{(1072^{P_1}_{p'_1})} + \sigma_{(1072)P_1}$$

$$\psi_{(1072^{P_1}_{p'_1})} = \psi_{(1052^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})} + \sigma_{(1052^{P_1}_{p'_1})P_2}$$

e così continuando si ricava infine:

$$\psi_{(1092)} = \psi_{(1012^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4})} + \sigma_{(1012^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4} + \sigma_{(1032^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})P_3} + \sigma_{(1052^{P_1}_{p'_1})P_2} + \sigma_{(1072)P_1} .$$

Ricerca di $\psi_{(1012^{P_1 \ldots P_4}_{p'_1 \ldots p'_4})}$. Se la retta eccezionale $e$ non passa per A, sarà $e'$ una retta di $\alpha'$, la quale deve incontrare due rette $p'$; se $e' \equiv \alpha' p'_1 . \alpha' p'_2$ sarà $e = P_3P_4$ ma $e$ ed $e'$ non soddisfano la relazione $(e . ABP_1P_2) = (e' . \alpha' B' p'_1 p'_2)$; dunque la retta $e$ deve passare per A. Se $e$ non passa per alcun punto P, sarà $e'$ una delle due rette che si appoggiano alle quattro rette $p'$. Per ogni retta $e'$ si determina una sola retta per A, la quale soddisfa le due condizioni $(e' . BP_1P_2P_3P_4) = (e' . B' p'_1 p'_2 p'_3 p'_4)$; quindi si hanno due correlazioni. Se poi $e \equiv AP_1$, sarà $e'$ una retta che si appoggia a $p'_2, p'_3, p'_4$ e che soddisfa la condizione $(e . BP_2P_3P_4) = (e' . B' p'_2 p'_3 p'_4)$; e facilmente si dimostra che ve n'è una sola. Essendo quattro i punti P si hanno così quattro correlazioni. Dunque $\psi_{(1012^{P_1 \ldots P_4}_{p'_1 \ldots p'_4})} = 6$.

Ricerca di $\sigma_{(1012^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4}$; ossia del numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con piani e rette eccezionali, che soddisfano le condizioni scritte al piede di $\sigma$. Il piano eccezionale $\varepsilon$, che deve passare per P passa anche per A, perchè altrimenti sarebbe $\varepsilon' \equiv \alpha'$, e poichè le rette $p'$ ed il punto B' non si trovano sopra $\alpha'$, dovrebbero i punti $P_1$, $P_2$, $P_3$ ed il punto B trovarsi sopra $\varepsilon$, ciò che è impossibile. Giacchè il piano $\varepsilon$ deve passare per A, non può contenere che un sol punto P; quindi due rette $p'$ ed il punto B' dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$, ciò che è impossibile. Dunque $\sigma_{(1012^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4} = 0$.

Similmente si dimostra che $\sigma_{(1032^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})P_3} = \sigma_{(1052^{P_1}_{p'_1})P_2} = \sigma_{(1072)P} = 0$.

Sostituendo si ha $\psi_{(1092)} = 6$.

*b*) Le formole (I) ci dànno $\pi = 24$, $\nu = 21$.

23. Il quarto sistema dell'ottavo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (1083); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \ldots B_8\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \\ \alpha'\ B'_1 \ldots B'_8\ \gamma'_1\ \gamma'_2\ \gamma'_3 \end{matrix} \right| .$$

L'ordine del sistema è $\mu = 21$ e per quel che già si è detto $(20, a)$ è $\lambda = 0$.

$a$) Ricerca di $\psi$. Si ha per la formola (III).

$$\psi_{(1083)} = \psi_{(1003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4})} + \sigma_{(1003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4} + \sigma_{(1023\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})P_3} + \sigma_{(1043\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} + \sigma_{(1063)\,P_1}.$$

Ricerca di $\psi_{(1003\,{}^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})}$. Supponiamo che la retta $e$ non passa per il punto A; sarà $e'$ una retta di $\alpha'$, che deve incontrare due rette $p'$; perchè altrimenti $e$ dovrebbe passare per più di due punti P; ma se $e'$ passa per due dei quattro punti ove le rette $p'$ segano $\alpha'$, per esempio per i punti $\alpha' p'_1$, $\alpha' p'_2$, sarà $e \equiv P_3 P_4$. Essendo sei le rette, che uniscono quattro punti a due a due, si hanno in tutto sei correlazioni.

Sia ora $e$ una retta, che passa per A e non per i punti P; sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $p'$. Presa una retta $e'$, la retta $e$ dovrà soddisfare le due condizioni $(e \,.\, P_1P_2P_3P_4) = (e' \,.\, p'_1 p'_2 p'_3 p'_4)$, $(e \,.\, A\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (e' \,.\, \alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$ e come abbiamo già visto vi sono $(8, b)$ due rette $e$ per A, che le soddisfano.

Essendo due le rette $e'$, si hanno, quando $e$ passa per A e non per i punti P, quattro correlazioni.

Sia ora $e \equiv P_1A$, $e'$ sarà una retta che incontra le tre rette $p'_2$, $p'_3$, $p'_4$ e che soddisfa la condizione $(e \,.\, A\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (e' \,.\, \alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$. Le rette $e'$, che soddisfano quest'ultima condizione appartengono ad un complesso di secondo grado (perchè di esse quelle, che passano per un punto, formano un cono di secondo ordine), e quelle, che soddisfano le altre tre condizioni, cioè che si appoggiano rispettivamente a $p'_2$, $p'_3$, $p'_4$, sono le rette comuni a tre complessi lineari; dunque le quattro rette, che i quattro complessi hanno in comune, sono quelle, che soddisfano il problema.

Essendo quattro i punti P, si hanno altre sedici correlazioni; quindi $\psi_{(1003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4})} = 26$.

Si vede facilmente come nel precedente numero che:

$$\sigma_{(1003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4} = \sigma_{(1023\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})P_3} = \sigma_{(1043\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} = \sigma_{(1063)\,P_1} = 0.$$

Quindi sostituendo si ha:

$$\psi_{(1083)} = 26.$$

$b$) Le formole (I) ci dànno $\pi = 32$, $\nu = 37$

24. Il quinto sistema dell'ottavo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (1074), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1\ ..\ B_7\ \gamma_1\ ..\ \gamma_4 \\ \alpha'\ B'_1\ ..\ B'_7\ \gamma'_1\ ..\ \gamma'_4 \end{matrix} \right|.$$

L'ordine del sistema è $\mu = 37$, ed è anche $\lambda = 0$.

$a$) Ricerca di $\pi$. Per la formola (II) si ha:

$$\pi_{(1074)} = \pi_{(2044)} + \varrho_{(1054)\,P} + \varrho_{(1044\,{}^{P}_{p'})P} + \tau_{(1044)P}.$$

Abbiamo già trovato $(14, a)$, che $\pi_{(2044)} = 4$.

Ricerca di $\tau_{(1044)P}$. Le condizioni sono $\left| \begin{matrix} A\ B_1\ ..\ B_4\ \gamma_1\ ..\ \gamma_4 \\ \alpha'\ B'_1\ ..\ B'_4\ \gamma'_1\ ..\ \gamma'_4 \end{matrix} \right|$, e la retta $e$ deve passare per il punto P.

Sia $e \equiv PA$; se per il punto eccezionale E di $e$ non passasse alcun piano $\gamma$, i quattro piani $\gamma'$ dovrebbero passare per il punto eccezionale E'; se poi un piano $\gamma$ passasse per E, dovrebbero tre piani $\gamma'$ ed il piano $\alpha'$ passare per E', ed è impossibile.

Dunque la retta $e$ non può passare per A, e perciò sarà $e'$ una retta di $\alpha'$. Sia $E \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$; sarà $e \equiv PE$, $E' \equiv e'\gamma'_4$ ed $e'$ quella retta di $\alpha'$, che soddisfa le due condizioni $(e.AB_1B_2B_3B_4) = (e'.\alpha' B'_1 B'_2 B'_3 B'_4)$. Poichè i quattro piani $\gamma$ a tre a tre si segano in quattro punti si hanno quattro correlazioni.

Sia ora E un punto di $\gamma_1\gamma_2$ e quindi $e$ una retta per il punto P situata sul piano $P.\gamma_1\gamma_2$; sarà $e'$ una retta di $\alpha'$, che passa per il punto $E' \equiv \alpha'\gamma'_3\gamma'_4$; inoltre $e$, $e'$ devono soddisfare le due condizioni su scritte. Presa una retta $e$ per P sul piano $P.\gamma_1\gamma_2$; determino l'unica retta $e'$ di $\alpha'$ per E', che soddisfa la condizione $(e.AB_1B_2B_3) = (e'.\alpha' B'_1 B'_2 B'_3)$. Avuta questa retta $e'$ determino $(13, a)$ le due rette che dirò $e_1$, che soddisfano la condizione $(e_1.AB_1B_2B_4) = (e'.\alpha' B'_1 B'_2 B'_4)$, si trovano sul piano $P.\gamma_1\gamma_2$ e passano per P; sicchè un raggio $e$ del fascio di centro P, determina due raggi $e_1$ dello stesso fascio. Viceversa, si vede che un raggio $e_1$ determina due raggi $e$; quindi vi sono quattro raggi $e$ ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti. Escluso il raggio, che unisce P col punto ove la retta $B_1B_2$ sega il piano $P.\gamma_1\gamma_2$, il quale raggio soddisfa le due condizioni considerate separatamente, ma non quella $(e.AB_1B_3B_4) = (e'.\alpha' B'_1 B'_3 B'_4)$, che dalle prime due dipende, restano tre rette $e$ e quindi tre rette $e'$, che soddisfano il problema. Poichè i quattro piani $\gamma$, a due a due hanno sei rette in comune, si hanno in tutto altre diciotto correlazioni. Quindi è $\tau_{(1044)P} = 22$.

Ricerca di $\varrho_{(1044^P_{p'})P}$. Le condizioni sono: le undici scritte innanzi per la ricerca di $\tau_{(1044)P}$, e l'altra $\left|\begin{matrix} P \\ p' \end{matrix}\right|$; inoltre il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per P. È facile vedere che il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere il punto A ed uno dei punti B. Sia $\varepsilon \equiv PAB_1$; sarà $\varepsilon' \equiv B'_2B'_3B'_4$. Se fosse $A \equiv E$, per E' dovrebbero passare i quattro piani $\gamma'$; se non è $A \equiv E$, sarà E' un punto di $\alpha'\varepsilon'$ e quindi per esso può passare un sol piano $\gamma'$; di modo che tre piani $\gamma$ dovrebbero passare per il punto E, che si trova su $\varepsilon$; ciò che è impossibile. Dunque $\varrho_{(1044^P_p\ P} = 0$.

Si dimostra allo stesso modo che $\varrho_{(1054)P} = 0$.

Sostituendo si ha: $\pi_{(1074)} = 26$.

*b*) Le formole (I) dànno $\psi = 61$; $\nu = 50$.

25. Il sesto sistema dell'ottavo gruppo soddisfa le condizioni (1065); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ B_1 \ldots B_6\ \gamma_1 \ldots \gamma_5 \\ \alpha'\ B'_1 \ldots B'_6\ \gamma'_1 \ldots \gamma'_5 \end{matrix}\right|.$$

L'ordine del sistema è $\mu = 50$ ed è $(20, a)$ $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Se il punto eccezionale E coincidesse con A, per il punto eccezionale E' dell'altro spazio dovrebbero passare i cinque piani $\gamma'$, ciò che è impossibile. Poichè E non coincide con A, il punto E' si trova sopra $\alpha'$, e per esso non possono passare nè meno di due piani $\gamma'$, nè più di due. Posto $E' \equiv \alpha'\gamma'_1\gamma'_2$, sarà $E \equiv \gamma_3\gamma_4\gamma_5$, e delle due stelle, che hanno i centri in E ed E' si conoscono, il raggio EA ed il suo piano polare $\alpha'$; e le sei coppie di raggi coniugati $EB_i$, $E'B'_i$

($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$); quindi si può stabilire fra esse una correlazione ordinaria e lo si può in un sol modo [1]. Poichè con cinque piani si possono formare dieci coppie di piani, si hanno dieci correlazioni; cioè $\pi = 10$.

*b*) Le formole (I) dànno $\nu = 55$, $\psi = 95$.

26. Ci restano ora a studiare i sistemi dell'ultimo gruppo, i quali soddisfano soltanto a condizioni semplici. Le condizioni a cui soddisfa il primo sistema sono (00 14 0); cioè quattordici coppie di punti coniugati, che dinoteremo con $A_i$, $A'_i$ ove $i$ prende tutti i valori da 1 a 14.

*a*) Ricerca di $\lambda$. Osserviamo, che quando le coppie di punti coniugati sono in numero maggiore di sei non ci possono essere correlazioni con piani eccezionali; perchè il piano eccezionale del primo spazio al massimo può contenere tre punti A; sicchè i punti coniugati dei rimanenti, in numero maggiore di tre, dovrebbero trovarsi sul piano eccezionale del secondo spazio, ciò che è impossibile, essendo i punti in posizione arbitraria. Dunque è $\lambda = 0$.

*b*) Ricerca di $\psi$. Anche $\psi = 0$, perchè mentre mancano le condizioni per determinare la proiettività fra le due punteggiate $e$, $e'$, ve ne sono in numero maggiore del necessario per determinare le dette rette, che projettano i punti coniugati in modo di formare due fasci projettivi.

*c*) Ricerca di $\pi$. Si ha:

$$\pi_{(00\,14\,0)} = \pi_{(10\,11\,0)} + \varrho_{(00\,12\,0)P} + \varrho_{(00\,11\,0\,p'_P)P} + \tau_{(00\,11\,0)P}.$$

Sappiamo (20, *c*) che $\pi_{(10\,11\,0)} = 4$; inoltre è facile vedere che gli altri termini del secondo membro sono eguali a zero; quindi è $\pi_{(00\,14\,0)} = 4$.

*d*) Le formole (I) ci dànno $\mu = 1$, $\nu = 3$.

27. Il secondo sistema del nono gruppo soddisfa le condizioni (00 13 1); cioè sono date tredici coppie di punti $A_i$, $A'_i$ ed una coppia di piani $\beta$, $\beta'$ coniugati.

L'ordine di questo sistema è $\mu = 3$, e per quel che si è detto nel precedente numero risulta che è $\lambda = \psi = 0$; quindi mercè le formole (I) si trova $\pi = 12$, $\nu = 9$.

28. Analogamente per il terzo sistema, che soddisfa le condizioni (00 12 2), si ha $\mu = 9$, $\lambda = \psi = 0$, e quindi per le (I), $\pi = 36$, $\nu = 27$.

29. Le condizioni, che deve soddisfare il quarto sistema del nono gruppo sono: undici coppie di punti $A_i$, $A'_i$ coniugati, e tre coppie $\beta_k$, $\beta'_k$ di piani coniugati; cioè sono (00 11 3).

L'ordine del sistema è $\mu = 27$, ed è (26, *a*) $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\psi$. Per la formola (III) si ha:

$$\psi_{(0011\,3)} = \psi_{(0013\,p'_1 p'_2 p' p'_4 p'_5)} + \sigma_{(0013\,p'_1 p'_2 p'_3 p'_4)P_5} + \sigma_{(0033\,p'_1 p'_2 p'_3)P_4} + \sigma_{(0053\,p'_1 p'_2)P_3} + \sigma_{(0073\,p'_1)P_2} + \sigma_{(0093)P_1}.$$

[1] Il numero delle correlazioni ordinarie fra le due stelle, che soddisfano quelle otto condizioni, è eguale a quello delle correlazioni ordinarie fra due piani, che soddisfano le condizioni (10 60), cioè è eguale all'ordine del sistema, che soddisfa le condizioni (10 50), che nella citata Memoria del sig. Hirst, è stato trovato essere eguale ad uno.

Ricerca di $\psi_{(0013\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1\,p'_2\,p'_3\,p'_4\,p'_5})}$. La retta eccezionale $e$ deve contenere almeno un punto P; perchè altrimenti $e'$ dovrebbe incontrare le cinque rette $p'$; sia dunque $e$ una retta per $P_1$, la retta $e'$ sarà una delle due rette, che incontrano le quattro rette $p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$. Per ogni retta $e'$, la $e$ deve determinarsi in modo da soddisfare le due condizioni $(e.P_2P_3P_4P_5A) = (e'.p'_2p'_3p'_4p'_5A')$, e per ogni retta $e'$ ve ne è una sola. Essendo cinque i punti P si hanno dieci correlazioni.

Sia ora $e$ una delle dieci rette, che uniscono due punti P; sia per esempio $e \equiv P_1P_2$, sarà $e'$ una retta, che si appoggia alle tre rette $p'_3, p'_4, p'_5$ e soddisfa la condizione $(e.P_3P_4P_5A) = (e'.p'_3p'_4p'_5A')$; e ve n' è una sola. Dunque si hanno altre dieci correlazioni, e perciò $\psi_{(0013\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})} = 20$.

È facile vedere che gli altri termini del secondo membro dell'equazione su scritta sono eguali a zero; dunque è $\psi_{(00\,11\,3)} = 20$.

*b*) Le formole (1) dànno $\pi = 68$, $\nu = 61$.

30. Il quinto sistema soddisfa le condizioni (00104); cioè dieci coppie di punti $A_i, A'_i$ $(i = 1, .., 10)$ e quattro coppie di piani $\beta_k, \beta'_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ devono essere coniugati.

L'ordine del sistema è $\mu = 61$: e si ha ancora (26, *a*) $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\psi$. Si ha:

$$\psi_{(00\,10\,4)} = \psi_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})} + \sigma_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})P_5} + \sigma_{(0024\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1p'_2p'_3})P_4} + \sigma_{(0044\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1p'_2})P_3}$$
$$+ \sigma_{(0064\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} + \sigma_{(0084)P_1}.$$

Anche in questo caso, è facile vedere che del secondo membro solo $\psi_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})}$ non è eguale a zero, quindi:

$$\psi_{(00\,10\,4)} = \psi_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})}.$$

Ricerca di $\psi_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})}$. Le quattordici condizioni sono $\left|\begin{matrix}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\,P_1P_2P_3P_4P_5\\ \beta'_1\beta'_2\beta'_3\beta'_4\,p'_1p'_2p'_3p'_4p'_5\end{matrix}\right|$.

La retta eccezionale $e$ deve passare per uno dei punti P; se passa per $P_5$, sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano a $p_1', p_2', p_3', p_4'$. Per ogni retta $e'$ si determina $e$ in modo da soddisfare le due equazioni $(e.P_1P_2P_3P_4) = (e'.p'_1p'_2p'_3p'_4)$, $(e.\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4) = (e'.\beta'_1\beta'_2\beta'_3\beta'_4)$.

Le rette $e$, che passano per $P_5$ e soddisfano le due equazioni sono le quattro rette comuni a due coni di secondo ordine, che hanno il vertice in $P_5$; essendo due le rette $e'$ si hanno otto correlazioni. Lo stesso dicasi quando $e$ contiene un altro punto P, sicchè si hanno in tutto quaranta correlazioni.

Sia ora $e \equiv P_1P_2$, sarà $e'$ una retta, che si appoggia a $p'_3, p'_4, p'_5$ e che soddisfa la condizione $(e.\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4) = (e'.\beta'_1\beta'_2\beta'_3\beta'_4)$; e come abbiamo visto (23, *a*) ve ne sono quattro. Essendo dieci le rette, che uniscono a due a due i punti P, si hanno altre quaranta correlazioni. Dunque è:

$$\psi_{(0004\,{}^{P_1\,..\,P_5}_{p'_1\,..\,p'_5})} = \psi_{(00\,10\,4)} = 80.$$

*b*) Le formole (I) dànno $\pi = 84$, $\nu = 103$.

31. Le condizioni, che deve soddisfare il sesto sistema del nono gruppo, sono: nove coppie di punti $A_i, A'_i$ coniugati, e cinque coppie di piani $\beta_k, \beta'_k$ coniugati.

L'ordine del sistema è $\mu = 103$ ed è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\psi$. Per la formola (III) si ha:

$$\psi_{(0095)} = \psi_{(0015\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4})} + \sigma_{(0015\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})P_4} + \sigma_{(0035\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})P_3} + \sigma_{(0055\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} + \sigma_{(0075)P_1}$$

e per la formola (III)′ si ha:

$$\psi_{(0015\,{}^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})} = \psi_{(0011\,{}^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1\,\alpha_2}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1\alpha'_2})} + \tau_{(0011\,{}^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1})\alpha_2} + \tau_{(0013\,{}^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})\alpha_1}.$$

Ricerca di $\psi_{(0011\,{}^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1\,\alpha_2}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1\alpha'_2})}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A\ \beta\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ \alpha_1\ \alpha_2 \\ A'\ \beta'\ p'_1\ p'_2\ p'_3\ p'_4\ \alpha'_1\ \alpha'_2 \end{matrix}\right|$.

Se la retta $e$ non passa per alcun punto P, sarà $e'$ una qualunque delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $p'$. Poichè queste rette $e'$ non incontrano le due rette $a'$, ne segue che deve essere $e \equiv \alpha_1\alpha_2$. Le rette $e$, $e'$ sono così determinate; ma però esse non soddisfano le due condizioni $(e.A\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4) = (e'.A'\,p'_1\,p'_2\,p'_3\,p'_4)$.

Dunque la retta $e$ deve contenere dei punti P; se ne contenesse un solo, poichè allora i piani $\alpha$ non potrebbero passare per $e$, la retta $e'$ dovrebbe incontrare tre rette $p'$, e le due rette $a'$; ciò che è impossibile; perciò è necessario che sia $e$ una delle sei rette, che uniscono a due a due i quattro punti P. Sia $e \equiv P_1\,P_2$; sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano a $p'_3$, $p'_4$, $a'_1$, $a'_2$, e per ogni retta $e'$ la correlazione è completamente determinata, perchè basta stabilire la projettività fra i due fasci $e.P_3P_4A$, $e'.p'_3p'_4A'$; e la projettività fra le due punteggiate $e.\alpha_1\alpha_2\beta$, $e'.\alpha'_1\alpha'_2\beta'$.

Si ha quindi $\psi_{(0011\,{}^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1\,\alpha_2}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1\alpha'_2})} = 12$.

Ricerca di $\tau_{(0011\,{}^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1})\alpha_2}$; ossia del numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti e rette eccezionali, che soddisfano le condizioni $\left|\begin{matrix} A\,\beta\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,\alpha_1 \\ A'\,\beta'\,p'_1\,p'_2\,p'_3\,p'_4\,a'_1 \end{matrix}\right|$ e che hanno il punto eccezionale E situato sul piano $\alpha_2$. Sia la retta eccezionale $e$ una retta; che non passa per i punti P, sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $p'$. Presa una di queste rette $e'$; poichè essa non incontra $a'$, è necessario che $e$ si trovi su $\alpha_1$ e soddisfi le due condizioni $(e.A\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4) = e'.A'\,p'_1\,p'_2\,p'_3\,p'_4)$.

Le rette di $\alpha_1$, che soddisfano la condizione $(e.A\,P_1\,P_2\,P_4) = (e'.A'\,p'_1\,p'_2\,p'_3)$ inviluppano una conica, e quelle che soddisfano l'altra $(e.A\,P_1\,P_2\,P_4) = (e'.A'\,p'_1\,p'_2\,p'_3)$ inviluppano un'altra conica; queste due coniche hanno per tangente comune la retta ove $\alpha_1$ è segato dal piano $A\,P_1\,P_2$, esclusa questa, le altre tre soddisfano la questione. Sarà allora per ogni retta $e$, $E \equiv e\alpha_2$, ed $E' \equiv e'\beta'$. Essendo due le rette $e'$ si hanno sei correlazioni.

Sia ora $e$ una retta, che passa per $P_1$, sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $a'_1, p'_2, p'_3, p'_4$. Presa una delle due rette $e'$, se poniamo $E' \equiv e'a'_1$ sarà E un punto di $\alpha_2\beta$ ed $e$ quella retta per $P_1$ del piano $P_1.\alpha_2\beta$, che

soddisfa la condizione $(e.P_2P_3P_4A) = (e'.p'_2p'_3p'_4A')$, e per quel che abbiamo detto innanzi vi sono due soluzioni, e quindi due correlazioni; se poi prendiamo $E' \equiv e'\beta'$, sarà E un punto di $\alpha_1\alpha_2$, ed $e$ una qualunque delle due rette, che soddisfano la condizione su scritta, passano per $P_1$ e sono sul piano $P_1.\alpha_1\alpha_2$. Dunque per ogni retta $e'$ si hanno quattro correlazioni, ed essendo due le rette $e'$ se ne hanno in tutto otto. Lo stesso dicasi quando $e$ passa per $P_2$, o per $P_3$ oppure per $P_4$: e perciò si hanno trentadue correlazioni in cui la retta $e$ contiene un sol punto P.

Sia ora $e \equiv P_1P_2$; sarà $E = e\alpha_2$, e poichè i piani $\alpha_1$, $\beta$ non passano per E, sarà $E' \equiv \beta'\alpha'_1$ ed $e'$ la retta, che passa per E' ed incontra $p'_3, p'_4$; si ha così una correlazione. Essendo sei le rette, che uniscono a due a due i punti P, si hanno in tutto sei correlazioni. Perciò $\tau_{(0011^{P_1\,..\,P_4\,\alpha_1}_{p'_1\,..\,p'_4\alpha'_1})\alpha_2} = 44$.

Ricerca di $\tau_{(0013^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})\alpha_1}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \\ A'\ \beta'_1\ \beta'_2\ \beta'_3\ p'_1\ p'_2\ p'_3\ p'_4 \end{matrix}\right|$ ed il punto eccezionale E deve trovarsi sul piano $\alpha_1$. Se la retta eccezionale $e$ non passa per alcun punto P, sarà al solito $e'$ una delle due rette che si appoggiano a $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$. Presa una di queste due rette, se per E' non passasse alcun piano $\beta'$ dovrebbe essere E un punto comune ai quattro piani $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3$; dunque per E' deve passare un piano $\beta'$. Sia $E' \equiv e'\beta'_1$; sarà allora $E \equiv \alpha_1\beta_2\beta_3$ ed $e$ quella retta per E, che soddisfa le condizioni $(e.A\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4) = (e'.A'\,p'_1\,p'_2\,p'_3\,p'_4)$. Essendo tre i piani $\beta'$ e due le rette $e'$ si hanno sei correlazioni.

Sia ora $e$ una retta per $P_1$. È necessario che per il punto E passi un piano $\beta$, perchè se non ne passasse alcuno, sarebbe $E' \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$ ed $e'$ dovrebbe passare per E' ed incontrare le tre rette $p'_2, p'_3, p'_4$. Sia dunque E un punto di $\beta_1\alpha_1$, sarà E' un punto di $\beta'_2\beta'_3$, ed $e'$ una delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $\beta'_2\beta'_3$, $p'_2, p'_3, p'_4$. Presa una di queste rette $e'$, si determinano sopra il piano $P_1.\alpha_1\beta_1$, e per il punto $P_1$, due rette $e$, che soddisfano la condizione $(e.A\,P_2\,P_3\,P_4) = (e'.A'p'_2p'_3p'_4)$. Essendo due le rette $e'$, si hanno quattro correlazioni; e lo stesso dicasi quando per E passa il piano $\beta_2$, od il piano $\beta_3$. Se poi $E \equiv \alpha_1\beta_1\beta_2$, sarà $e \equiv P_1E$, $E' \equiv e'\beta'_3$ ed $e'$ quella retta, che si appoggia a $p'_2, p'_3, p'_4$ e soddisfa la relazione $(e.AP_2\,P_3\,P_4) = (e'.A'\,p'_2\,p'_3\,p'_4)$. Lo stesso dicasi quando $E \equiv \alpha_1\beta_2\beta_3$ od $E \equiv \alpha_1\beta_3\beta_1$; sicchè si hanno altre tre correlazioni. Dunque quando $e$ passa per un punto P si hanno quindici correlazioni; ed essendo quattro i punti P, in tutto se ne hanno sessanta.

Sia infine $e$ una delle sei rette, che passano per due punti P; per esempio, sia $e \equiv P_1P_2$; sarà $E \equiv e\,\alpha_1$, $E' \equiv \beta'_1\beta'_2\beta'_3$ ed $e'$ quella retta, che passa per E' ed incontra le due rette $p'_3, p'_4$. Si hanno così altre sei correlazioni. Dunque è $\tau_{(0013^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1p'_2p'_3\,p'_4})\alpha_1} = 72$.

Sostituendo nella seconda equazione, i risultati ottenuti si ha:

$$\psi_{(0015^{P_1\,..\,P_4}_{p'_1\,..\,p'_4})} = 12 + 44 + 72 = 128.$$

Ricerca di $\sigma_{(0015^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1p'_2p'_3})P_4}$, ovvero del numero delle correlazioni con rette eccezionali e piani eccezionali, che soddisfano le condizioni $\left|\begin{matrix} A\ \beta_1\ ..\ \beta_5\ P_1\ P_2\ P_3 \\ A'\ \beta'_1\ ..\ \beta'_5\ p'_1\ p'_2\ p'_3 \end{matrix}\right|$ e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per $P_4$.

Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere due dei tre punti $P_1, P_2, P_3$, perchè due rette p' non si trovano in uno stesso piano. Sia $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$ sarà $e' \equiv A'p'_3$. Se la retta eccezionale $e$, che si trova sopra $\varepsilon$, non passa per i punti $P_1, P_2$, sarà $\varepsilon' \equiv \varepsilon' p'_1 . \varepsilon' p'_2$ ed $e$ quella retta di $\varepsilon$, che sega le cinque rette ove $\varepsilon$ incontra i piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ in modo di formare una punteggiata projettiva alla punteggiata $e' . \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4 \beta'_5$; si ha così una correlazione. Se la retta $e$ passa per il punto $P_1$, sarà $e'$ una retta per $\varepsilon' p'_2$, e tutte e due devono soddisfare le due condizioni $(e . \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5) = (e' . \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4 \beta'_5)$. Presa a tal uopo una retta $e$ di $\varepsilon$ passante per $P_1$, determino le due rette $e'$ di $\varepsilon'$, che passano per $\varepsilon' p'_2$ e che soddisfano la condizione $(e . \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4) = (e' . \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4)$; ognuna di queste rette $e'$, mi determina due rette che dirò $e_1$, le quali soddisfano la condizione $(e . \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4) = (e' . \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4)$; sicchè una retta $e$ determina quattro rette $e_1$; e reciprocamente una retta $e_1$ determina quattro rette $e$. Vi sono allora otto rette $e$, ciascuna delle quali coincide con una delle sue corrispondenti. Escluse le tre rette del fascio $P_1$, che passano per i punti $\varepsilon\beta_1\beta_2$, $\varepsilon\beta_2\beta_3$, $\varepsilon\beta_3\beta_1$, le quali sono comprese fra queste otto, le altre cinque soddisfano il problema; e perciò vi sono cinque coppie di rette eccezionali associate, che passano rispettivamente per $P_1, \varepsilon' p'_2$; e quindi cinque correlazioni.

Altrettante ve ne sono quando $e$ passa per $P_2$ ed $e'$ per $\varepsilon' p'_1$.

Sia infine $e \equiv P_1P_2$, sarà $e'$ quella retta di $e'$, che soddisfa le due condizioni innanzi scritte. Dunque con la coppia di piani eccezionali associati $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$, $\varepsilon \equiv A'p'_3$ si hanno dodici correlazioni; ed essendo tre le coppie di piani eccezionali associati perchè può prendersi $\varepsilon \equiv P_4P_2P_3$, oppure $\varepsilon = P_4P_3P_1$; si ha $\sigma_{(0015)^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3}} = 36$.

Ricerca di $\sigma_{(0035)^{P_1P_2}_{p'_1p'_2}P_3}$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv P_3P_1P_2$ ed $\varepsilon' \equiv A'_1A'_2A'_3$. La correlazione eccezionale (con rette eccezionali) fra questi due piani si può stabilire, come abbiamo visto or ora in dodici modi; quindi abbiamo altre dodici correlazioni.

È facile vedere che $\sigma_{(0055)^{P_1}_{p'_1}P_2} = \sigma_{(0075)P_1} = 0$.

Sostituendo nella prima equazione i risultati ottenuti si ha:

$$\psi_{(0095)} = 128 + 36 + 12 = 176.$$

*b*) Le formole (I) ci dànno $\pi = 60$, $\nu = 133$.

32. Il settimo sistema del nono gruppo soddisfa le condizioni (0086); ovvero:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \dots A_8 & \beta_1 \dots \beta_6 \\ A'_1 & A'_2 \dots A'_8 & \beta'_1 \dots \beta'_6 \end{vmatrix}.$$

L'ordine è $\mu = 133$; e per quel che si è detto al numero 26,*a* è $\lambda = 0$.

*a*) Ricerca di $\pi$. Per il punto eccezionale E del primo spazio devono passare tre piani $\beta$, perchè se ne passassero due, per E' dovrebbero passare quattro piani $\beta'$.

Sia dunque $E \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$, sarà $E' \equiv \beta'_4 \beta'_5 \beta'_6$. La correlazione ordinaria si può stabilire fra le due stelle di centro E, E', ed in un sol modo; perchè si conoscono

otto coppie di raggi coniugati $EA_i$, $EA'_i$ $(i=1,..,8)$ [1]. Essendo venti i punti ove sei piani si segano a tre a tre, si hanno venti correlazioni, cioè $\pi = 20$.

*b*) Le formole (I) ci dànno $r = 143$, $\psi = 256$.

33. L'ultimo sistema del nono gruppo è quello, che soddisfa alle condizioni (0077).

In questo sistema è l'ordine eguale alla classe, ed è $\pi = \lambda$; quindi si ha $\mu = r = 143$ e (26,*a*) $\lambda = \pi = 0$. Mediante le (I) si trova $\psi = 286$.

*Correlazioni, che soddisfano a quindici condizioni elementari.*

34. Conoscendo le caratteristiche dei sistemi semplicemente infiniti di correlazioni, sappiamo il numero delle correlazioni, che soddisfano le quindici condizioni $(mnpq)$ [2], il quale numero dinoteremo col simbolo $[mnpq]$. Infatti è evidente che $[mnpq]$ è eguale all'ordine del sistema, che soddisfa le condizioni $(mnp-1q)$ od alla classe di quello, che soddisfa le condizioni $(mnpq-1)$.

Inoltre è chiaro che $[mnpq] = [nmpq]$; e poichè l'ordine del sistema, che soddisfa le quattordici condizioni $(mnp-1q)$ è eguale alla classe del sistema, che soddisfa le condizioni $(mnqp-1)$, ne segue che $[mnpq] = [mnqp]$.

Però dallo studio già fatto non possiamo ricavare il numero delle correlazioni, che soddisfano le condizioni (5000), (4100), (3200), ovvero non possiamo trovare i numeri [5000], [4100], [3200].

Il primo, cioè [5000], sappiamo che è eguale ad uno; perchè quando sono dati in uno spazio cinque punti e nell'altro i loro piani polari, la correlazione si può stabilire in un sul modo. Per la ricerca degli altri due numeri faremo uso dei seguenti teoremi:

35. *Teorema I.* Il numero delle correlazioni, che soddisfano le tredici condizioni $(mnp-2q)$ e le altre due $\left|\begin{matrix} A_1 & A_2 \\ A'_1 & A'_2 \end{matrix}\right|$ è eguale al numero delle correlazioni, che soddisfano le dette tredici condizioni e la condizione doppia $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$, aumentato del numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali, che soddisfano le tredici condizioni $(mnp-2q)$ e che hanno il piano eccezionale del primo spazio, che passa per il punto A. Cioè:

$$[mnpq] = \left[ mnp-2q \begin{matrix} A \\ a' \end{matrix} \right] + \lambda_{(mnp-2q)A}.$$

*Dimostrazione.* Se i due punti $A_1$, $A_2$ coincidono in A, il numero delle correlazioni, che soddisfano le quindici condizioni non cambia; ma però esse possono essere: correlazioni ordinarie, ed allora la retta $a' \equiv A'_1 A'_2$ è retta polare di A;
correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali in cui il piano eccezionale del primo spazio passa per A; ed allora sebbene i punti $A'_1$, $A'_2$ sono coniugati

[1] Il numero delle correlazioni ordinarie fra le due stelle, che soddisfano le su dette condizioni, è eguale a quello delle correlazioni ordinarie fra due piani, che soddisfano le condizioni (0080), cioè è eguale ad uno. Hirst, l. c.

[2] $(mnpq)$ rappresenta una soluzione dell'equazione $3m+3n+p+q=15$.

di A, la retta $A'_1A'_2$ non si trova sul piano polare di A, cioè non è polare di A. Dunque il teorema è dimostrato.

*Teorema II.* Il numero delle correlazioni, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp—3q)$ e le altre tre $\left|\begin{matrix} A & A_1 \\ a' & A'_1 \end{matrix}\right|$, è eguale a quello delle correlazioni, che soddisfano le stesse dodici condizioni e la condizione tripla $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$, aumentato del numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali, che soddisfano le condizioni $\left(mnp—3q\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right)$ e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per A; e del numero delle correlazioni di primo ordine con rette eccezionali, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp—3q)$ e che hanno la retta eccezionale $e$, che passa per A. Cioè:

$$\left[mnp—2\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right] = [m+1\,np—3q] + \lambda_{(mnp-3q^{A}_{a'})A} + \psi_{(mnp-3q)A}.$$

*Dim.* Se i due punti A, $A_1$ coincidono, il numero delle correlazioni, che soddisfano le date condizioni non varia; però esse, a causa della coincidenza dei due punti, possono essere:

correlazioni ordinarie, ed allora il piano $\alpha' \equiv a'A'_1$ è il piano polare di A;

correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali, che soddisfano le condizioni $\left(mnp—3q\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right)$ e che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$ che passa per A (quattordici condizioni) ed allora, sebbene $A'_1$ è polo coniugato di A, il piano $A'_1a'$ non è un piano polare di A;

correlazioni eccezionali di primo ordine con rette eccezionali, che soddisfano le dodici condizioni $(mnp—3q)$, ed hanno la retta eccezionale $e$, che passa per A (due condizioni); ed in tal caso, sebbene $a', A'_1$ sono coniugati di A, il piano $a'A'_1$ non è un piano polare di A. Il teorema è così dimostrato.

I teoremi correlativi sono anche veri.

36. Dai due teoremi dimostrati si ottiene:

$$\text{(IV)} \qquad [mnpq] = [m+1\,np—3q] + \lambda_{(mnp-3q)A} + \lambda_{(mnp-3q^{A}_{a'})A} + \psi_{(mnp-3q)A}.$$

37. Dalla (IV) risulta:

$$[3130] = [4100] + \lambda_{(3110)A} + \lambda_{(3100\,^{A}_{a'})A} + \psi_{(3100)A}.$$

Sappiamo che $[3130]=1$; inoltre è facile vedere che gli ultimi tre termini del secondo membro sono eguali a zero, quindi $[4100]=1$.

38. Ricerca di [3200]. Per la (IV) si ha:

$$[2230] = [3200] + \lambda_{(2210)A} + \lambda_{(2200\,^{A}_{a'})A} + \psi_{(2200)A}.$$

Essendo $[2230]=0$, tutti i termini del secondo membro devono anche essere eguali a zero, perciò $[3200]=0$. Questo risultato poteva ottenersi direttamente [1].

[1] Vedi la I parte di questa Memoria (26).

39. Conoscendo che (1):

$$[4030]=1,\ [4021]=3,\ [3130]=1,\ [3121]=1,\ [2230]=[2221]=0;$$

possiamo, applicando ripetutamente la formola (IV), trovare il valore di $[mnpq]$, ove $m, n, p, q$, rappresentano una soluzione dell'equazione $3m+3n+p=q=15$; cioè possiamo trovare il numero delle correlazioni, che soddisfano quindici date condizioni elementari $(mnpq)$, e perciò le caratteristiche dei sistemi semplicemente infinito di correlazioni.

Considereremo alcuni esempî per meglio spiegare il metodo, e per avere una verifica dei risultati già ottenuti.

40. Ricerca di [3060]. Si ha:

$$[3060]=[4030]+\lambda_{(3040)_A}+\lambda_{(3030\,{}^{A}_{\alpha'})_A}+\psi_{(3030)_A}.$$

Sappiamo che $[4030]=1$, ed è facile vedere che gli altri termini del secondo membro sono eguali a zero; dunque è: $[3060]=1$; cioè l'ordine del sistema, che soddisfa le condizioni (3050) è $\mu=1$, come abbiamo già ottenuto $(4, d)$.

Similmente si trova che:

$$[2090]=[10\,12\,0]=[00\,15\,0]=1;$$

ovvero i sistemi, che soddisfano le condizioni (2080), (10 11 0), (00 14 0), sono dello stesso ordine, che è $\mu=1$; come abbiamo già ottenuto $(10, b;\ 20, d;\ 26, d)$.

41. Dal valore $[4021]=3$, mediante la formola (IV), ricaviamo come innanzi:

$$[3051]=[2081]=[10\,11\,1]=[00\,14\,1]=3$$

cioè i sistemi, che soddisfano le condizioni (3041), (2071), (10 10 1), (00 13 1) sono del terzo ordine (5, 11, 21, 27).

42. Dal valore $[3130]=1$, si ricava ancora che:

$$[2160]=[1190]=1,$$

cioè i sistemi, che soddisfano le condizioni (2150), (1180) sono del primo ordine $(7, d;\ 15, d)$.

43. Ricerca di [2151]. Per la (IV), si ha:

$$[2151]=[3121]+\lambda_{(2131)_A}+\lambda_{(2121\,{}^{A}_{\alpha'})_A}+\psi_{(2121)_A}.$$

Sappiamo che $[3121]=1$.

Ricerca di $\lambda_{(2131)_A}$. Le correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali, devono soddisfare le condizioni $\left|\begin{matrix} B_1 & B_2 & \gamma & P_1 & P_2 & P_3 & \delta \\ \beta'_1 & \beta'_2 & C' & P'_1 & P'_2 & P'_3 & \delta' \end{matrix}\right|$ ed inoltre il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per un dato punto A. Poichè $\varepsilon$ non coincide con $\gamma$, $\varepsilon'$ deve passare per il punto C', polo di $\gamma$; e poichè i piani $\beta'$ non passano per C', i punti B' devono trovarsi sopra $\varepsilon$, cioè deve essere $\varepsilon=AB_1B_2$. I punti P non sono sopra $\varepsilon$, quindi i loro coniugati devono essere sopra $\varepsilon'$; ciò che è impossibile. Dunque $\lambda_{(2131)_A}=0$.

Ricerca di $\lambda_{(2121\,{}^{A}_{\alpha'})_A}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & B_1 & B_2 & \gamma & P_1 & P_2 & \delta \\ \alpha' & \beta'_1 & \beta'_2 & C' & P'_1 & P'_2 & \delta' \end{matrix}\right|$ ed il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per A.

Per quel che si è detto innanzi, è necessario che $\varepsilon \equiv AB_1B_2$, ed allora sarà $\varepsilon' \equiv C'P'_1P'_2$.

Del piano $\varepsilon$ si conoscono i punti A, $B_1$ $B_2$ e le rette $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$; del piano $\varepsilon'$ si conoscono il punto $\gamma'a'$ coniugato di A, il polo C' di $\gamma$, la retta $\varepsilon'\delta'$ coniugata di $\varepsilon\delta$, e le rette $\varepsilon'\beta'_1$, $\varepsilon'\beta'_2$ polari di $B'_1, B'_2$, quindi si può stabilire ed in un sol modo la correlazione ordinaria fra i due piani, e perciò è $\lambda_{(2121\,{}^{A}_{a'})A} = 1$.

Ricerca di $\psi_{(21\,21)A}$. La retta eccezionale $e$ deve passare per il punto A, e poichè non giace sul piano $\gamma$, ne segue che $e'$ deve passare per C'; ma per questo punto non passano i piani $\beta'$, perciò i punti $B_1$, $B_2$ devono trovarsi sopra $e$, ciò che non è. Dunque $\psi_{(2121)A} = 0$.

Sostituendo si ottiene $[2151] = 1 + 1 = 2$.

44. Ricerca di [1181]. Si ha:

$$[1181] = [2151] + \lambda_{(1161)A} + \lambda_{(1151\,{}^{A}_{a'})A} + \psi_{(1151)A}.$$

Abbiamo $[2151] = 2$; inoltre è facile vedere che $\lambda_{(1161)A} = \lambda_{(1151\,{}^{A}_{a'})A} = 0$; sicchè ci resta a trovare il valore di $\psi_{(1151)A}$; cioè il numero delle correlazioni con rette eccezionali, che hanno la retta eccezionale $e$, che passa per un dato punto A, e che soddisfano le dodici condizioni $\left|\begin{matrix} B & \gamma & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & \delta \\ \beta' & C' & P'_1 & P'_2 & P'_3 & P'_4 & P'_5 & \delta' \end{matrix}\right|$.

In tal caso deve essere $e \equiv AB$, ed $e'$ sarà una retta per C', che soddisfa le due condizioni $(e.P_1P_2P_3P_4P_5) = (e'.P'_1P'_2P'_3P'_4P'_5)$. Dunque è $\psi_{(1151)A} = 1$.

Sostituendo si ha:

$$[11\,81] = 2 + 1 = 3,$$

cioè l'ordine del sistema, che soddisfa le condizioni (1171) è tre (16).

Dal valore $[1181] = 3$, possiamo ricavare quello di $[01\,11\,1]$; ma sappiamo che $[01\,11\,1] = [10\,11\,1] = 3$.

## PARTE TERZA

1. In due spazî a tre dimensioni, le correlazioni, che sono soggette a tredici condizioni, formano un sistema doppiamente infinito. In questo sistema sono compresi tre sistemi semplicemente infiniti di correlazioni eccezionali di primo ordine ed un numero finito di correlazioni eccezionali di secondo ordine, di cui dinoteremo con $\varrho$ il numero di quelle con punti e piani eccezionali, con $\sigma$ il numero di quelle con piani e rette eccezionali e con $\tau$ il numero di quelle con rette e punti eccezionali.

Dei tre sistemi semplicemente infiniti di correlazioni eccezionali di primo ordine, il primo è formato di correlazioni con punti eccezionali, il secondo di correlazioni con piani eccezionali, il terzo di correlazioni con rette eccezionali; e sin da ora dinoteremo con $\pi_A$ o $\pi_\alpha$, $\lambda_A$ o $\lambda_\alpha$, $\psi_A$ o $\psi_\alpha$ il numero di quelle con punti eccezionali, con piani eccezionali, con rette eccezionali, per le quali due dati punti o due dati piani sono coniugati.

I punti eccezionali formano, in ogni spazio, una curva gobba, i piani eccezionali una superficie sviluppabile, e le rette eccezionali una superficie rigata; e fra le due curve gobbe, come fra le due superficie formate dai piani eccezionali o dalle rette eccezionali, esiste una corrispondenza univoca, ritenendo come elementi corrispondenti due punti, due piani o due rette eccezionali associate. In questa terza parte, ci occuperemo delle relazioni, che legano le correlazioni eccezionali di primo ordine a quelle di secondo ordine, e della ricerca delle correlazioni eccezionali di secondo ordine, che soddisfano tredici condizioni elementari.

2. Consideriamo un sistema semplicemente infinito di correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, soggette a tredici condizioni.

Sieno A, B, due punti del primo spazio, le rette polari della retta AB, rispetto a tutte le correlazioni del sistema, formano una superficie, sulla quale si trova la curva luogo dei punti eccezionali del secondo spazio.

Di che ordine è questa superficie? Prendo una retta $r'$, del secondo spazio, e sopra essa un punto A'; A ed A' sono coniugati, rispetto a $\pi_A$ correlazioni del sistema, i piani polari di B, rispetto a queste correlazioni segheranno $r'$ in $\pi_A$ punti B'; sicchè un punto A' di $r'$, determina $\pi_A$ punti B' della stessa retta. Reciprocamente un punto B' determina $\pi_A$ punti A'; quindi vi sono $2\pi_A$ punti A', ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti B'.

Nel sistema suddetto di correlazioni con punti eccezionali vi sono $\varrho$ correlazioni eccezionali di secondo ordine con punti e piani eccezionali, e $\tau$ correlazioni eccezionali anche di secondo ordine con punti e rette eccezionali.

Ora i piani polari di A, B, rispetto a ciascuna delle prime $\varrho$ correlazioni, coincidono col piano eccezionale $\varepsilon'$ del secondo spazio, e quelli, rispetto a ciascuna delle altre $\tau$ correlazioni, passano per la retta eccezionale $e'$, la quale fa parte della superficie anzidetta. Esclusi dai $2\pi_A$ punti di coincidenza, i $\varrho$ punti ove $r'$ sega i $\varrho$ piani eccezionali $\varepsilon'$, i rimanenti sono i punti ove $r'$ sega la superficie. Dunque la superficie luogo delle rette polari di AB è dell'ordine $2\pi_A - \varrho$.

Osserviamo ancora che la retta polare di AB, rispetto ad ognuna delle $\varrho$ correlazioni con punti e piani eccezionali, è una retta, che dirò $s'$, di $\varepsilon'$ la quale passa per il punto eccezionale, ed è una generatrice della superficie.

3. Sia C un terzo punto del primo spazio, i piani polari di esso, rispetto alle correlazioni del sistema semplicemente infinito avanti detto, formano una superficie sviluppabile. Un piano tangente di questa superficie ed una generatrice della superficie luogo delle rette polari di AB, li diremo corrispondenti, se sono polari di C e di AB, rispetto ad una stessa correlazione. Il luogo dei punti comuni ai piani della prima superficie ed alle rette corrispondenti della seconda è una curva gobba, che è il luogo dei poli del piano ABC, rispetto a tutte le correlazioni del sistema.

Qual' è l'ordine di questa curva gobba; cioè sopra un piano arbitrario $\alpha'$ quanti poli ci sono del piano ABC?

Il piano $\alpha'$ sega la superficie, luogo delle rette polari di AB, secondo una curva dell' ordine $2\pi_A - \varrho$, che dirò $\varphi'$. Presso un punto C' di questa curva, esso è il polo di AB, rispetto ad una certa correlazione; il piano polare di C, rispetto a questa correlazione, sega $\varphi'$ in $2\pi_A - \varrho$ punti, che dirò $C'_1$; viceversa dato $C'_1$, esso e C sono coniugati rispetto a $\pi_A$ correlazioni, e le rette polari di AB, rispetto a queste correlazioni, segano $\varphi'$ in $\pi_A$ punti C'. Sulla curva $\varphi'$, vi è quindi una corrispondenza $(2\pi_A - \varrho, \pi_A)$; perciò vi sono $3\pi_A - \varrho$ punti C', ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti. Esclusi i $\varrho$ punti ove $\alpha'$ sega le rette $s'$, ed i $\tau$ punti ove $\alpha'$ sega le rette eccezionali $e'$, che evidentemente non sono poli del piano ABC, i rimanenti sono tali, che per essi passano i piani polari di A, B, C. Dunque la curva, luogo dei poli del piano ABC, è dell' ordine $3\pi_A - 2\varrho - \tau$.

Se il polo di ABC, rispetto ad una correlazione, si trova sopra $\alpha'$, vuol dire che i piani ABC, $\alpha'$ sono coniugati, rispetto a quella correlazione; ma due piani qualunque lo sono, rispetto a $\pi_A$ correlazioni; quindi abbiamo:

$$\pi_A = 3\pi_A - 2\varrho - \tau . \qquad (I)$$

Questa curva gobba, luogo dei poli del piano ABC, non è una curva semplice. Infatti affinchè due piani ABC, $\alpha'$ sieno coniugati, rispetto ad una correlazione, è necessario che uno di essi passi per un punto eccezionale. Se il piano ABC, passa per un punto eccezionale, il suo polo è un indeterminato punto di una retta, che passa per l' altro punto eccezionale; sicchè la detta curva gobba, è formata della curva luogo dei punti eccezionali del secondo spazio, e di un numero di rette eguale all'ordine della curva, luogo dei punti eccezionali del primo spazio.

3.[bis] Correlativamente si dimostra, che in un sistema semplicemente infinito di correlazioni eccezionali di primo ordine con piani eccezionali, esiste la relazione:

$$\lambda_A = 3\lambda_A - 2\varrho - \sigma \qquad (II)$$

ove $\varrho$ e $\sigma$ rappresentano rispettivamente il numero delle correlazioni eccezionali di

secondo ordine con punti e piani eccezionali, e con piani e rette eccezionali, che soddisfano le tredici condizioni, che determinano il sistema.

*Correlazioni eccezionali di secondo ordine*
*che soddisfano a tredici condizioni elementari.*

4. Risolvendo l'equazione $3m+3n+p+q=13$ [1], si hanno tutte le combinazioni di tredici condizioni elementari, che dinoteremo con $(mnpq)$, le quali determinano tutti i sistemi di correlazioni doppiamente infiniti, soggetti a tredici elementari condizioni.

Ci proponiamo di trovare per ciascun sistema i numeri $\varrho$, $\sigma$, $\tau$.

Osserviamo intanto che $(mnpq)$, $(nmpq)$ rappresentano effettivamente le stesse condizioni; e che conoscendo i valori di $\varrho$, $\sigma$, $\tau$ del sistema, che soddisfa le condizioni $(mnpq)$, per avere quelli del sistema, soggetto alle condizioni $(mnqp)$, basta scambiare il valore di $\sigma$ con quello di $\tau$, restando $\varrho$ lo stesso; sicchè ci resta a trovare i valori di questi tre numeri, per i sistemi, che soddisfano le seguenti combinazioni di tredici condizioni, che divideremo in nove gruppi; cioè:

| | | |
|---|---|---|
| I | gruppo | (4010), |
| II | » | (3110), |
| III | » | (2210), |
| IV | » | (3040), (3031), (3022), |
| V | » | (2140), (2131), (2122), |
| VI | » | (2070), (2061), (2052), (2043), |
| VII | » | (1170), (1161), (1152), (1143), |
| VIII | » | (10 10 0), (1091), (1082), (1073), (1064), (1055), |
| IX | » | (00 13 0), (00 12 1), (00 11 2), (00 10 3), (0094), (0085), (0076). |

5. Ci serviremo spesso del seguente teorema:

Il numero delle correlazioni eccezionali di secondo ordine, con punti e rette eccezionali, che soddisfano le undici condizioni $(mnp-2q)$ e le altre due $\left|\begin{matrix} A & A_1 \\ A' & A'_1 \end{matrix}\right|$; è eguale a quello delle dette correlazioni, che soddisfano le stesse undici condizioni e la condizione doppia $\left|\begin{matrix} A \\ a' \end{matrix}\right|$, aumentato dal numero $\theta_{(mnp-2q)A}$ delle correlazioni eccezionali di terzo ordine, che soddisfano le undici condizioni, e che hanno il piano eccezionale del primo spazio, che passa per A; cioè:

$$\tau_{(mnpq)} = \tau^{A}_{(mnp-2q\,a')} + \theta_{(mnp-2q)A}. \qquad \text{(III)}$$

Dimostrazione. Se i punti A ed $A_1$ coincidono il numero delle correlazioni eccezionali con punti eccezionali e rette eccezionali non cambia; però esse allora possono essere: di secondo ordine e la retta $\overline{A'A'_1} \equiv a'$ sarà la polare di A; oppure di terzo ordine che hanno il piano eccezionale $\varepsilon$, che passa per A, e soddisfano le undici

[1] I numeri $m, n, p, p$, hanno lo stesso significato, che abbiamo loro dato nella I e II parte di questa Memoria.

condizioni ($mnp$—$2q$) ed allora i punti $A', A'_1$ sono coniugati di A; ma la retta $A'A'_1$ non è la retta polare di A. Dunque il teorema è dimostrato (1).

Il teorema correlativo è anche vero.

6. Il primo sistema è quello, che soddisfa le condizioni (4010), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & B \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & B' \end{matrix} \right| .$$

Se esistessero correlazioni eccezionali di secondo ordine con piani e punti eccezionali o con piani e rette eccezionali, il piano eccezionale $\varepsilon$ del primo spazio, dovrebbe contenere tre punti A, perchè altrimenti due piani $\alpha'$ dovrebbero coincidere col piano eccezionale $\varepsilon'$. Posto dunque $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$, sarà $\varepsilon' \equiv \alpha'_4$; ma dei punti B e B', nessuno si trova su un piano eccezionale quindi non possono essere coniugati (2). Da ciò risulta che $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Poichè per la retta eccezionale $e'$ non possono passare più di due piani $\alpha'$, e sulla retta $e$ non si possono trovare più di due punti A, è necessario che sia $e$ una delle sei rette, che uniscono a due a due i quattro punti A, ed $e'$ una delle altre sei, ove si segano a due a due i quattro piani $\alpha'$. Posto $e \equiv A_1A_2$, sarà $e' \equiv \alpha'_3\alpha'_4$, ed i piani polari di B, B' saranno $e'B'$, $eB$. Il punto eccezionale E deve coincidere con $A_1$ o con $A_2$, perchè i due piani $\alpha'_1$, $\alpha'_2$ non segano $e'$ nello stesso punto; nel primo caso sarà $E' \equiv e'\alpha'_2$, nel secondo $E' \equiv e'\alpha'_1$. Per ogni coppia di rette eccezionali si hanno due correlazioni; essendo sei le coppie, si ha $\tau = 12$.

7. Le condizioni a cui è soggetto il sistema del secondo gruppo sono (3110); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & \beta & C \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B' & C' \end{matrix} \right| .$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano $\varepsilon$ deve almeno contenere due punti A; allora, poichè $\beta$ non può coincidere con esso, sarà $\varepsilon'$ un piano per il punto B'; ma per B' non passano i piani $\alpha'$; quindi deve essere $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$. Il piano polare di C è il piano eccezionale $\varepsilon'$; quindi $\varepsilon'$ deve passare per C'. Se $\beta$ non passasse per E, con questo dovrebbero coincidere i tre punti A; ma se $\beta$ passa per E, sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ ed $\varepsilon' \equiv E'B'C'$. Il punto E è poi quell'unico punto della retta $\beta\varepsilon$, tale che il fascio formato con i quattro raggi $EA_1$, $EA_2$, $EA_3$, $\varepsilon\beta$; risulta projettivo al fascio $\varepsilon'\alpha'_1$, $\varepsilon'\alpha'_2$, $\varepsilon'\alpha'_3$, $E'B'$. Dunque è $\varrho = 1$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Come innanzi deve essere $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$ ed $\varepsilon'$ un piano per $B'C'$. Se $\beta$ non contiene la retta eccezionale $e$, sarà B' un punto della retta $e'$, e poichè i piani $\alpha'$ non passano per B', i tre punti A dovrebbero trovarsi sopra $e$; se poi fosse $\beta\varepsilon \equiv e'$, i tre piani $\alpha'$ dovrebbero passare per $e'$; ambo i casi impossibili; dunque $\sigma = 0$.

*c*) Ricerca di $\tau$. La retta eccezionale $e$ deve passare almeno per un punto A, ed $e'$ si troverà su due o sopra un piano $\alpha'$ e perciò non passerà per B'. Il piano $\beta$ polare di B' dovrà allora passare per $e$; ciò che è impossibile perchè esso non passa per alcun punto A. Dunque $\tau = 0$.

(1) Questo teorema, come il suo correlativo, è vero qualunque sieno le undici condizioni, che abbiamo dinotato con ($mnp$—$2q$).

(2) È bene che il lettore tenga presente, quanto abbiamo detto nella prima parte (12, 13, 14).

8. Per il sistema del terzo gruppo, che è quello, che soddisfa le condizioni (2210), si ha evidentemente $\varrho = \sigma = \tau = 0$ (1).

9. Passiamo ora a considerare i sistemi del quarto gruppo; il primo è soggetto alle condizioni (3040), ovvero:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 \end{matrix} \right| .$$

*a*) È facile vedere che $\varrho = \sigma = 0$. Infatti, se il piano eccezionale $\varepsilon$ non contenesse qualcuno dei tre punti A; sul piano $\alpha'$ polare di esso dovrebbero trovarsi i punti B'; se poi $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$, il piano $\varepsilon'$ dovrebbe passare per i quattro punti B', ciò che è impossibile.

*b*) Ricerca di $\tau$. La retta eccezionale $e$ deve almeno passare per un punto A; sia precisamente $A_1$ il punto per il quale essa passa; sarà allora $e' \equiv \alpha'_2\alpha'_3$, e la $e$ deve soddisfare le tre condizioni $(e . A_2A_3B_1B_2B_3B_4) = (\alpha'_2\alpha'_3 . \alpha'_2\alpha'_3B'_1B'_2B'_3B'_4)$; ciò che non è possibile. Sia ora $e \equiv A_1A_2$, sarà $e'$ una retta di $\alpha'_3$, che soddisfa le due condizioni $(e . A_3B_1B_2B_3B_4) = (e' . \alpha'_3B'_1B'_2B'_3B'_4)$, e come è noto ve n' è una sola (2). Inoltre il punto eccezionale E deve coincidere con $A_1$ o con $A_2$; nel primo caso è $E' \equiv e'\alpha'_2$, nel secondo $E' \equiv e'\alpha'_1$; sicchè si hanno due correlazioni. Lo stesso dicasi quando $e \equiv A_2A_3$, oppure $e \equiv A_3A_1$; quindi è $\tau = 6$.

10. Il secondo sistema del quarto gruppo è soggetto alle condizioni (30 31); ossia:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 & \gamma \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B'_1 & B'_2 & B'_3 & \gamma' \end{matrix} \right| .$$

Ricerca di $\varrho$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$ ed $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2B'_3$. Se il punto eccezionale E non coincidesse con alcuno dei punti A, i tre piani $\alpha'$ dovrebbero passare per E', che si trova su $\varepsilon'$, se poi E coincidesse con un punto A, per esempio con $A_1$, i piani $\alpha'_2, \alpha'_3, \gamma'$ dovrebbero passare per E'; ambo i casi impossibili; dunque $\varrho = 0$.

Ricerca di $\sigma$. Come innanzi $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$, $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2B'_3$. Inoltre è necessario che la retta eccezionale $e$ contenga due punti A; se $e \equiv A_1A_2$, sarà $e' \equiv \varepsilon'\alpha'_3$, e la correlazione è determinata perchè della retta $e$ si conoscono tre punti $A_1, A_2, e\gamma$, e della $e'$ i punti corrispondenti $e'\alpha'_1, e'\alpha'_2, \varepsilon'\gamma'$; ciò che è sufficiente per determinare la projettività fra $e$ ed $e'$. Lo stesso dicasi quando $e \equiv A_2A_3$ oppure $e \equiv A_3A_1$; dunque è $\sigma = 3$.

*c*) Ricerca di $\tau$. Sia la retta eccezionale $e$ una retta per $A_1$, sarà $e' \equiv \alpha'_2\alpha'_3$ ed $e$ quella retta per $A_1$, che soddisfa le due condizioni $(e . A_2A_3B_1B_2B_3) = (\alpha'_2\alpha'_3 . \alpha'_2\alpha'_3B'_1B'_2B'_3)$. Se il punto eccezionale E coincide con $A_1$ sarà $E' \equiv e'\gamma'$; se poi $E \equiv e\gamma$ sarà $E' \equiv e'\alpha'_1$; si hanno quindi due correlazioni. Lo stesso dicasi quando $e$ passa per $A_2$ o per $A_3$.

Sia inoltre $e \equiv A_1A_2$; sarà $e'$ una retta di $\alpha'_3$. Il punto eccezionale E deve coincidere con $A_1$ o con $A_2$ oppure con $e\gamma$; ed E' sarà rispettivamente il punto ove $\alpha'_2\gamma'$, od $\alpha'_1\gamma'$, oppure $\alpha'_1\alpha'_2$ sega $\alpha'_3$. In ognuno di questi tre casi, $e'$ sarà quella

(1) Vedi la parte I (26).
(2) Parte II (5, 6).

retta situata sopra $\alpha'_3$, che passa per E' e soddisfa la condizione $(e.A_3B_1B_2B_3) = (e'.\alpha'_3B'_1B'_2B'_3)$.

Si hanno così tre correlazioni ed altrettante se ne hanno quando $e \equiv A_2A_3$ oppure $e \equiv A_3A_1$. Dunque è $\tau = 15$.

11. Il terzo sistema del quarto gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (30 22); ovvero:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & B'_1 & B'_2 & \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{matrix} \right| .$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere i punti A, cioè deve essere $\varepsilon \equiv A_1A_2A_3$; ed $\varepsilon'$ sarà un piano per $B'_1B'_2$ da determinarsi. Se il punto eccezionale E coincidesse con un punto A, due piani $\alpha'$ e i due piani $\gamma'$ dovrebbero passare per E'; se poi E non coincide con alcun punto A; sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$, $\varepsilon' \equiv E'B'_1B'_2$ ed $E \equiv \varepsilon\gamma_1\gamma_2$. Dunque è $\varrho = 1$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Se prendiamo come retta $e$ una retta, che passa per un punto A, per esempio per $A_1$, sarà $e' \equiv \alpha'_2\alpha'_3$; ciò che è impossibile perchè questa retta non si trova in uno stesso piano con $B'_1B'_2$. Se poi $e \equiv A_1A_2$, sarà $e'$ una retta di $\alpha'_3$, passante pel punto $\alpha'_3.B'_1B'_2$, e che soddisfa la condizione $(A_1A_2.A_1A_2\gamma_1\gamma_2) = (e'.\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2)$; ma è noto che fra i raggi di un fascio ve ne sono due, che segano quattro piani dati secondo una punteggiata projettiva ad un'altra data; dunque per ogni lato del triangolo $A_1A_2A_3$, preso come retta $e$, si hanno due correlazioni, e perciò $\sigma = 6$.

È evidente che $\tau = \sigma = 6$.

12. Il primo sistema del quinto gruppo soddisfa le condizioni (21 40); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 \end{matrix} \right| .$$

*a*) In questo sistema è $\varrho = \sigma = 0$. Infatti il piano $\varepsilon'$ deve passare per B', perchè altrimenti sarebbe $\varepsilon \equiv \beta$ ed i piani $\alpha'$ dovrebbero coincidere con $\varepsilon'$. Inoltre il piano $\varepsilon'$, che passa per B', non può contenere al massimo che due punti C'; quindi i due punti A e i due punti C dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon$, ciò che è impossibile.

*b*) Ricerca di $\tau$. Se $\varepsilon$ si trovasse sopra $\beta$ sarebbe $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$ ed $e$ dovrebbe soddisfare le quattro condizioni $(e.A_1A_2\beta C_1C_2C_3C_4) = (\alpha'_1\alpha'_2.\alpha'_1\alpha'_2B'C'_1C'_2C'_3C'_4)$; ciò che è impossibile. Poichè $e$ non si trova su $\beta$, sarà $e'$ una retta, che passa per B' ed $e \equiv A_1A_2$. Se non è $E \equiv e\beta$ sarà $E' \equiv B'$ e quindi i punti A devono coincidere con E; dunque deve essere $E \equiv e\beta$ ed allora sarà E' un punto di $\alpha'_1\alpha'_2$ ed $e'$ una qualunque delle due rette del piano $B'.\alpha'_1\alpha'_2$, che passano per B', e soddisfano la condizione $(e.C_1C_2C_3C_4) = (e'.C'_1C'_2C'_3C'_4)$. Dunque è $\tau = 2$.

13. Il secondo sistema del quinto gruppo soddisfa le condizioni (21 31); ossia:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & \delta \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & \delta' \end{matrix} \right| .$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ può essere uno dei tre piani $A_1A_2C_1$, $A_1A_2C_2$, $A_1A_2C_3$ ed $\varepsilon'$ sarà rispettivamente $B'C'_2C'_3$, $B'C'_3C'_1$, $B'C'_1C'_2$. È facile vedere che il punto eccezionale E deve trovarsi sulla retta $\beta\varepsilon$; poichè $A_1$, $A_2$ non coincidono con E, sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\varepsilon'$, e poichè per E' non passa il piano $\delta'$, sarà $E \equiv \varepsilon\beta\delta$. Quindi è $\varrho = 3$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Come innanzi, può essere $\varepsilon$ uno dei tre piani, che passano per la retta $A_1A_2$ e per uno dei tre punti C, ed $\varepsilon'$ sarà uno dei tre piani, che passano per B′ e per due punti C′; e precisamente se $\varepsilon \equiv A_1A_2C_1$ sarà $\varepsilon' \equiv B'C'_2C'_3$. Se fosse $\beta\varepsilon \equiv e$, i piani $\alpha'_1$, $\alpha'_2$ dovrebbero passare per la stessa retta di $\varepsilon'$, ciò che non avviene; quindi $e$ non può trovarsi sopra $\beta$ e perciò $e'$ deve passare per B′, e poichè i piani $\alpha'$ non passano per B′, deve essere $e \equiv A_1A_2$. La retta $e'$, è quella retta di $\varepsilon'$, che passa per B′ e soddisfa la condizione $(A_1A_2.A_1A_2\beta\delta) = (e'.\alpha'_1\alpha'_2B'\delta')$. Dunque è $\sigma = 3$.

*c*) Ricerca di $\tau$. È facile vedere, che la retta $e$ deve coincidere con $A_1A_2$; e la retta $e'$ deve passare per B′. Se il punto eccezionale E non coincidesse con $e\beta$, sarebbe $E' \equiv B'$ e quindi E dovrebbe trovarsi sul piano $\delta$ e coincidere con i punti A; poichè dunque $E \equiv \beta e$, sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\delta'$ ed $e' \equiv B'E'$. Si ha così $\tau = 1$.

14. L'ultimo sistema del quinto gruppo soddisfa le condizioni (2122); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & C_1 & C_2 & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B' & C'_1 & C'_2 & \delta'_1 & \delta'_2 \end{matrix} \right|.$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere i due punti A. Supponiamo anzitutto, che non contenga alcun punto C; sarà allora $\varepsilon' \equiv B'C'_1C'_2$. Se il piano $\beta$ passasse per E, sarebbe $E' \equiv \varepsilon'\alpha'_1\alpha'_2$ ed $E \equiv \beta\delta_1\delta_2$, $\varepsilon \equiv A_1A_2E$; perciò si otterrebbe una correlazione. Se poi $\beta$ non passa per E, la correlazione non si può stabilire.

Sia ora $\varepsilon \equiv A_1A_2C_1$; sarà $\varepsilon'$ un piano per $B'C'_2$ da determinarsi. Come innanzi il piano $\beta$ deve passare per E; anzi deve essere $E = \varepsilon\beta\delta_1$ oppure $E \equiv \varepsilon\beta\delta_2$; nel primo caso sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\delta'_2$, nel secondo $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\delta'_1$, ed in ambo i casi il piano $\varepsilon'$ è determinato da B′, C′$_2$, e dal punto E′. Si hanno perciò due correlazioni, ed altre due se ne avranno se $\varepsilon \equiv A_1A_2C_2$. Dunque $\varrho = 5$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Sia $\varepsilon$ un piano per $A_1A_2$ ed $\varepsilon' = B'C'_1C'_2$. Se $\beta$ non passa per $e$, sarà B′ un punto di $e'$, e poichè i piani $\alpha'$ non passano per B′, sarà $e \equiv A_1A_2$, e la retta $e'$, che giace sul piano $\varepsilon'$ e passa per B′, dovrebbe ancora soddisfare le due condizioni $(A_1A_2.A_1A_2\beta\delta_1\delta_2) = (e'.\alpha'_1\alpha'_2B'\delta'_1\delta'_2)$, e ciò è impossibile.

Se poi $\beta$ passasse per $\varepsilon$, sarebbe $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$, e questa retta non si trova sopra $\varepsilon'$, come dovrebbe. Sia allora $\varepsilon \equiv A_1A_2C_1$, sarà $\varepsilon'$ un piano per $B'C'_2$. Se $\beta$ passasse per $e$ sarebbe $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$, e questa retta non si trova in uno stesso piano con la retta $B'C'_2$; dunque è necessario che sia $e \equiv A_1A_2$ ed $e'$ quella retta, che passa per B′ e soddisfa le due condizioni su scritte. Il piano $\varepsilon'$ è allora quello delle due rette $B'C'_2$, $e'$, e la correlazione è completamente determinata. Lo stesso dicasi quando $\varepsilon \equiv A_1A_2C_2$; quindi $\sigma = 2$.

Per dualità si ricava $\tau = 2$.

15. Il primo sistema del sesto gruppo è soggetto alle condizioni (2070); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & .. & B_7 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & .. & B'_7 \end{matrix} \right|.$$

*a*) Per questo sistema si ha: $\varrho = \sigma = 0$. Infatti se il piano eccezionale $\varepsilon'$ coincidesse con un piano $\alpha'$, sarebbe $\varepsilon$ un piano, che dovrebbe contenere un punto A ed i sette punti B. Se poi $\varepsilon'$ non coincide con alcun piano $\alpha'$, il piano $\varepsilon$ passerà per

$A_1, A_2$ e dei punti B non potrà contenerne più di uno, sicchè $\varepsilon'$ dovrebbe passare per sei punti B'.

*b*) Ricerca di $\tau$. Per il teorema già dimostrato (5) abbiamo:

$$\tau_{(2070)} = \tau_{(2050\,{}^{P}_{p'})} + \theta_{(2050)\,P}$$

$$\tau_{(2050\,{}^{P}_{p'})} = \tau_{(2030\,{}^{P\,P_1}_{p'p'_1})} + \theta_{(2030\,{}^{P}_{p'})\,P} \quad .$$

$$\tau_{(2030\,{}^{P\,P_1}_{p'p'_1})} = \tau_{(2010\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'_1p'_2})} + \theta_{(2010\,{}^{P\,P_1}_{p'p'_1})P_1}$$

dalle quali si ricava:

$$\tau_{(2070)} = \tau_{(2010\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'_1p'_2})} + \theta_{(2050)\,P} + \theta_{(2030\,{}^{P}_{p'})P_1} + \theta_{({}^{P\,P_1}_{p'p'_1})P_2} \quad .$$

Ricerca di $\tau_{(2010\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'_1p'_2})}$. Supponiamo che la retta eccezionale $e$ non contiene alcun punto A, sarà $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$, e poichè le tre rette $p'$, non segano $e'$, i tre punti P' dovrebbero trovarsi sopra $e$, ciò che è impossibile. Sia ora $e$ una retta per $A_1$; sarà $e'$ una retta di $\alpha'_2$; se $e'$ non incontra una retta $p'$, un punto P si deve trovare sopra $e$; quindi è necessario che sia $e'$ una delle rette, che uniscono due dei tre punti ove le rette $p'$ segano $\alpha'_2$, ed $e$ la retta, che unisce $A_1$ con quel punto P, che è coniugato a quella retta $p'$ non segata da $e'$. Le rette $e$, $e'$ sono così determinate; ma esse non soddisfano la condizione $(e.A_2B_1P_1P_2) = (e'.\alpha'_2B'_2p'_1p'_2)$. È necessario dunque che sia $e = A_1A_2$; sarà allora $e'$ quella retta, che incontra le tre rette $p', p'_1, p'_2$ e soddisfa la condizione $(e.B_1PP_1P_2) = (e'.B'_1p'p'_1p'_2)$. Il punto eccezionale E deve coincidere con $A_1$ o con $A_2$, e sarà allora $E' \equiv e'\alpha'_2$ oppure $E' \equiv e'\alpha'_1$. Dunque è $\tau_{(2010\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'_1p'_2})} = 2$.

Ricerca di $\theta_{(2050)P}$. Il piano $\varepsilon$ deve passare per $PA_1A_2$; e quindi $\varepsilon'$ dovrebbe contenere, i cinque punti B'; dunque $\theta_{(2050)P} = 0$.

Ricerca di $\theta_{(2030\,{}^{P}_{p'})P_1}$. Anche in questo caso deve essere $\varepsilon \equiv PA_1A_2$, ed allora $\varepsilon'$ dovrebbe contenere i tre punti B' e la retta $p'$; quindi $\theta_{(2030\,{}^{P}_{p'})P_1} = 0$.

Similmente si dimostra che $\theta_{(2010\,{}^{P\,P_1}_{p'p'_1})P_2} = 0$.

Sostituendo si ottiene $\tau_{(2070)} = 2$.

16. Il secondo sistema del sesto gruppo è quello che soddisfa, le condizioni (2061). Come nel caso precedente (15,*a*) si vede che è $\varrho = \sigma = 0$.

*a*) Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(2061)} = \tau_{(2001\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'\,p'_2})} + \theta_{(2041)P} + \theta_{(2021\,{}^{P}_{p'})P_1} + \theta_{(2001\,{}^{P\,P_1}_{p'p'_1})P_2} \quad .$$

Ricerca di $\tau_{(2001\,{}^{P\,P_1\,P_2}_{p'p'_1p'_2})}$.

Le condizioni sono:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & \beta & P & P_1 & P_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \beta' & p' & p'_1 & p'_2 \end{matrix} \right| .$$

È necessario che la retta eccezionale $e$ contenga un punto A; sia per esempio $A_1$; sarà allora $e'$ uno dei tre lati del triangolo, che sopra $\alpha'_2$ determinano i punti ove $\alpha'_2$ è segato dalle tre rette $p'$, ed $e$ sarà una delle tre rette, che uniscono $A_1$ con i tre punti P, e precisamente quella, che contiene il punto P coniugato alla retta $p'$ che non sega $e'$. Per esempio se $e \equiv A_1P$, sarà $e' \equiv \alpha'_2 p'_1 . \alpha'_2 p'_2$. Se $E \equiv A_1$ sarà $E' \equiv e'\beta'$; ma se $E \equiv e\beta$ sarà $E' \equiv \alpha'_1 e'$; quindi si hanno in tutto sei correlazioni, ed altrettante quando $e$ passa per $A_2$. Sia infine $e \equiv A_1A_2$, sarà $e'$ una retta, che si appoggia a $p', p'_1, p'_2$. Se $E \equiv A_1, A_2, e\beta$, sarà rispettivamente E' un punto di $\alpha'_2\beta'$, $\alpha'_1\beta', \alpha'_1\alpha'_2$; ed in ciascuno dei tre casi sarà $e'$ una delle due rette, che incontrano quattro rette date, cioè le tre $p'$ ed una di quelle sulle quali deve trovarsi il punto E'. Abbiamo così altre sei correlazioni e perciò $\tau_{(2001\,\substack{P\,P_1\,P_2 \\ p'p'_1p'_2})} = 18$.

Come nel caso precedente, è facile vedere che gli altri termini del secondo membro sono eguali a zero; quindi è $\tau_{(2061)} = 18$.

17. Il terzo sistema del sesto gruppo soddisfa le condizioni (2052); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 \ldots B_5 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 \ldots B'_5 & \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{matrix} \right| .$$

Come nei casi precedenti è $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(2052)} = \tau_{(2032\,\substack{P \\ p'})} + \theta_{(2032)P} .$$

Ricerca di $\tau_{(2032\,\substack{P \\ p'})}$. Sia anzitutto $e$ una retta, che non passa nè per $A_1$ nè per $A_2$; sarà allora $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$ ed $e$ quella retta, che passa per P e soddisfa le due condizioni $(e . A_1A_2B_1B_2B_3) = (\alpha'_1\alpha'_2 . \alpha'_1\alpha'_2 B'_1B'_2B'_3)$. Se $E \equiv e\gamma_1$ oppure $E \equiv e\gamma_2$, sarà rispettivamente $E' \equiv e'\gamma'_2$, $E' \equiv e'\gamma'_1$; sicchè abbiamo due correlazioni.

Sia $e \equiv A_1P$, sarà $e'$ situata sopra $\alpha'_2$. Se $E \equiv A_1, e\gamma_1, e\gamma_2$, sarà rispettivamente $E' \equiv \alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2, \alpha'_2\gamma'_2\alpha'_1, \alpha'_2\alpha'_1\gamma'_1$; ed in ognuno di questi tre casi sarà $e'$ quella retta di $\alpha'_2$ per E', che soddisfa la relazione $(e . A_2B_1B_2B_3) = (e' . \alpha'_2B'_1B'_2B'_3)$. Abbiamo così tre correlazioni, ed altrettante se ne hanno quando $e \equiv A_2P$.

Sia ora $e$ una retta per $A_1$ e non per P, sarà $e'$ situata sopra $\alpha'_2$ e passerà per il punto $\alpha'_2p'$. Se fosse $E \equiv A, e\gamma_1, e\gamma_2$, sarebbe $E' \equiv \alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2, \alpha'_2\alpha'_1\gamma'_2, \alpha'_2\alpha'_1\gamma'_1$, ed $e' \equiv E' . \alpha'_2p'$.

La $e$ per ognuno di questi tre casi, è quella retta, che passa per $A_1$ e soddisfa le due condizioni: $(e . A_2B_1B_2B_3P) = (e' . \alpha'_2B'_1B'_2B'_3p')$. Se poi E è un punto della retta $\gamma_1\gamma_2$ sarà E' un punto della retta $\alpha'_1\alpha'_2$; ed $e, e'$, di cui la prima si trova sul piano $A_1 . \gamma_1\gamma_2$ e passa per $A_1$ e la seconda sul piano $\alpha'_2$ e passa per $\alpha'_2p'$, devono soddisfare le due condizioni innanzi scritte. Come abbiamo trovato nella parte II (24, $a$) vi sono tre rette $e$, e tre rette $e'$, che soddisfano le condizioni date. Dunque quando $e$ passa per A e non per P vi sono sei correlazioni; ed altrettante se ne hanno quando $e$ passa per $A_2$ e non per P.

Sia infine $e \equiv A_1A_2$; se $E \equiv A_1, A_2, e\gamma_1, e\gamma_2$ sarà $E' \equiv \alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2$, $\alpha'_1\gamma'_1\gamma'_2$, $\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_2$, $\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_1$, ed in ognuno di questi quattro casi sarà $e'$ quella retta, che passa per il punto eccezionale E', giace sul piano $E'.p'$ e soddisfa la condizione $(e.B_1B_2B_3P) = (e'.B_1B_2B_3p')$. Si hanno così altre quattro correlazioni; quindi è $\tau_{(2032\,{}^{P}_{p'})} = 24$.

Ricerca di $\theta_{(2032)P}$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv PA_1A_2$, $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2B'_3$. La retta $e$ deve contenere almeno uno dei punti A; perchè altrimenti i due piani $\alpha'$ dovrebbero passare per una stessa retta $e'$ di $\varepsilon'$. Sia $A_1$ il punto, che si trova sopra $e$; sarà $e' \equiv \varepsilon'\alpha'_2$. Se fosse $E \equiv A_1$, per E', che è un punto di $e'$, dovrebbero passare i due piani $\gamma'$; e se fosse E il punto ove $e$ sega un piano $\gamma$, per E' dovrebbe passare il piano $\alpha'_1$ ed un piano $\gamma'$; dunque è necessario che sia $E \equiv \varepsilon\gamma_1\gamma_2$, ed allora sarà $e \equiv A_1E$, ed $E' \equiv \alpha'_1e'$. Si ha così una correlazione eccezionale di terzo ordine, ed un'altra se ne ottiene ponendo $E \equiv \varepsilon\gamma_1\gamma_2$, $e \equiv A_2E$, $e' \equiv \alpha'_1\varepsilon'$, $E' \equiv e'\alpha'_2$.

Se poi $e \equiv A_1A_2$, non si può stabilire la correlazione, perchè se anche si fa coincidere E con uno dei punti $A_1, A_2, e\gamma_1, e\gamma_2$; per E' devono passare tre piani, ciò che è impossibile. Dunque $\theta_{(2032)P} = 2$.

Sostituendo si ha:

$$\tau_{(2052)} = 26.$$

18. Il quarto sistema del sesto gruppo soddisfa le condizioni (20 43); ossia:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & B'_1 & B'_2 & B'_3 & B'_4 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{matrix} \right|.$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano eccezionale $\varepsilon$, sarà uno dei quattro piani, che passano per $A_1A_2$ e per un punto B. Sia dunque $\varepsilon \equiv A_1A_2B_1$; sarà $\varepsilon' \equiv B'_2B'_3B'_4$. Se E coincide con $A_1$, per E' dovrebbero passare i quattro piani $\alpha'_2, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$; se poi E non coincide con alcun punto A, sarà $E' \equiv \varepsilon'\alpha'_1\alpha'_2$, e per E oltre il piano $\varepsilon$ dovrebbero passare i tre piani $\gamma$; ciò che è impossibile. Dunque $\varrho = 0$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Sia, come innanzi, $\varepsilon \equiv A_1A_2B_1$ ed $\varepsilon' \equiv B'_2B'_3B'_4$. Se $e' \equiv \varepsilon'\alpha'_1$, sarà $e$ quella retta, che passa per $A_2$ e soddisfa la condizione $(e.A_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (e'.\alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$; se $e' \equiv \varepsilon'\alpha'_2$ sarà $e$ quella retta per $A_1$, che soddisfa la condizione $(e.A_1\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (e'.\alpha'_1\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$; se poi per $e'$ non passano i piani $\alpha'$, sarà $e \equiv A_1A_2$ ed $e'$ quella retta di $\varepsilon'$, che soddisfa le due condizioni $(A_1A_2.A_1A_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (e'.\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$. Si hanno così, per ogni coppia di piani eccezionali associati, tre correlazioni; ed essendo quattro queste coppie, perchè quattro sono i punti B, si hanno in tutto dodici correlazioni; cioè $\sigma = 12$.

*c*) Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(2043)} = \tau_{(2023\,{}^{P}_{p'})} + \theta_{(2023)P}.$$

Ricerca di $\tau_{(2023\,{}^{P}_{p'})}$. Se $e$ non contiene i punti A, deve passare per P, e deve essere $e' \equiv \alpha'_1\alpha'_2$. Dei piani $\gamma'$ uno solo deve passare per E'; perchè se non ne passasse alcuno sarebbe $E \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $e \equiv PE$; ma $e$ ed $e'$ non soddisferebbero la condizione $(e.A_1A_2B_1B_2) = (\alpha'_1\alpha'_2.\alpha'_1\alpha_2B'_1B'_2)$. Se $E' \equiv e'\gamma'_1, e\gamma'_2, e'\gamma'_3$, sarà E un punto di $\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_2$ ed in ognuno di questi tre casi, la retta $e$ deve passare

per P, trovarsi sul piano, che passa per P e contiene la retta sulla quale si trova il punto E, e soddisfare la condizione $(e.A_1A_2B_1B_2) = (\alpha'_1\alpha'_2.\alpha'_1\alpha'_2B'_1B'_2)$, e come si sa ve ne sono due; quindi abbiamo sei correlazioni.

Sia $e \equiv A_1P$, sarà $e'$ una retta di $\alpha'_2$. Se E coincidesse con $A_1$, o con $e\gamma$, per E' dovrebbero passare tre piani, cioè i piani $\gamma'$ nel primo, il piano $\alpha'_1$ e due piani $\gamma'$ nel secondo, ciò che è impossibile, perchè E' si trova sopra $\alpha'$.

Sia allora $e$ una retta per $A_1$ e non per P, sarà $e'$ situata sopra $\alpha'_2$ e passerà pel punto $\alpha'_2p'$. Per la ragione anzidetta non può E coincidere con $A_1$, nè trovarsi sopra un sol piano $\gamma$; quindi è necessario che per E passino due o tre piani $\gamma$. Sia $E \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, sarà $e \equiv A_1E$, $E' \equiv \alpha'_1e'$, ed $e'$ è quella retta di $\alpha'_2$, che passa per il punto $\alpha'_2.p'$ e soddisfa la relazione $(e.A_2B_1B_2P) = (e'.\alpha'_2B'_1B'_2p')$; quindi si ha una correlazione. Sia ora E un punto della retta $\gamma_1\gamma_2$, sarà $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\gamma'_3$, $e' \equiv E'.\alpha'_2p'$ ed $e$ una delle due rette del piano $A.\gamma_1\gamma_2$, che passano per A e soddisfano la condizione ora scritta. Si hanno così due correlazioni ed altrettante se ne avranno quando E trovasi su $\gamma_2\gamma_3$ o sopra $\gamma_3\gamma_1$. Quindi quando $e$ passa per $A_1$ si hanno sette correlazioni, e lo stesso dicasi quando passa per $A_2$.

Sia infine $e \equiv A_1A_2$, è facile vedere che la correlazione eccezionale non si può stabilire, perchè qualunque posizione si dia ad E', risulta che per E' devono passare quattro piani, ciò che non è. Dunque si ha $\tau_{(2023\,\frac{P}{p'})} = 20$.

Ricerca di $\theta_{(2023)P}$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv PA_1A_2$, ed $\varepsilon'$ un piano, che passa per $B'_1B'_2$. Se i punti A fossero tutti e due fuori di $e$, la retta $\alpha'_1\alpha'_2$ dovrebbe trovarsi sopra $\varepsilon'$ e quindi dovrebbe incontrare $B'_1B'_2$; se poi fosse $e \equiv A_1A_2$, qualunque posizione si desse ad E sopra $e$, per E' dovrebbero passare quattro piani; dunque è necessario che $e$ contenga un sol punto A. Sia $A_1$ il punto per il quale passa $e$; se fosse $E \equiv A_1$ oppure $e\gamma$ per E' dovrebbero passare quattro piani; dunque bisogna che sia $E \equiv \gamma_1\gamma_2\varepsilon$, oppure $\gamma_2\gamma_3\varepsilon$, $\gamma_3\gamma_1\varepsilon$, ed allora sarà per ogni caso $e \equiv A_1E$, e rispettivamente $E' \equiv \alpha'_1\alpha'_2\gamma'_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_1$, $\alpha'_1\alpha'_2\gamma'_2$ ed $e'$ in ognuno dei tre casi sarà la retta comune al piano $\alpha'_2$ ed al piano $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2E'$. Si hanno così tre correlazioni, ed altrettante se ne hanno quando $e$ passa per $A_2$; quindi è $\theta_{(2023)P} = 6$,

Sostituendo si ottiene:

$$\tau_{(2043)} = 26.$$

19. Il primo sistema del settimo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni (11 70); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A & \beta & C_1 & C_2 & .. & C_7 \\ \alpha' & B' & C'_1 & C'_2 & .. & C'_7 \end{matrix} \right|.$$

*a*) In questo sistema è $\varrho = \sigma = 0$. Infatti se fosse $\beta \equiv \varepsilon$, sarebbe $\alpha' \equiv \varepsilon'$ ed i punti C, C' non potrebbero essere coniugati, se poi $\beta$ non coincidesse con $\varepsilon$, allora questo piano dovrebbe passare per A ed $\varepsilon'$ per B'; e poichè su $\varepsilon$ non ci possono essere più di due punti C, cinque punti C' dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$; ciò che è pure assurdo.

*b*) Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(1170)} = \tau_{(1150\,\frac{P}{p'})} + \theta_{(1150)\,P}.$$

Per quel che si è detto innanzi ($a$), è chiaro che $\theta_{(1150)P} = 0$; sicchè ci resta a trovare il valore di $\tau_{\left(1150\,\frac{P}{p'}\right)}$. Se $e$ si trovasse sopra $\beta$, la retta $e'$ dovrebbe passare pel punto $\alpha' p'$, trovarsi su $\alpha'$, e tutte e due dovrebbero soddisfare le cinque condizioni $(e \,.\, A\beta C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 P) = (e' \,.\, \alpha' B' C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5 p')$, due di più di quante ce ne vogliono per determinarle. Giacchè le rette eccezionali non sono situate sopra i piani $\beta$, $\alpha'$, è necessario che esse passino rispettivamente per A, B'. Se poi $e \equiv AP$, sarà $e'$ quella retta per B', che soddisfa le due condizioni $(e \,.\, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5) = (e' \,.\, C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5)$, e secondo che si prende $E \equiv A$ od $E \equiv e\beta$, sarà $E' \equiv B'$ oppure $E' \equiv e'\alpha'$ e si hanno due correlazioni. Se $e$ passa per A e non per P, sarà $e'$ situata sul piano $B'p'$ e passerà per B', ed $e, e'$ dovranno soddisfare le tre condizioni $(e \,.\, P C_1 C_2 C_3 C_4 C_5) = (e' \,.\, p' C'_1 C'_2 C'_3 C'_4 C'_5)$. Per trovare il numero delle coppie di rette $e$, $e'$, che soddisfano le dette condizioni, prendo sopra il piano $B'p'$, una retta $e'$ per B', e determino l'unica retta $e$ per A, che soddisfa le due condizioni $(e \,.\, P C_1 C_2 C_3 C_4) = (e' \,.\, p' C'_1 C'_2 C'_3 C'_4)$. Avuta così la retta $e$ determino sopra $B'p'$, l'unica retta per B' che dico $e'_1$, la quale soddisfa la condizione $(e \,.\, P C_1 C_2 C_5) = (e' \,.\, p' C'_1 C'_2 C'_5)$; sicchè un raggio $e'$ del fascio B' determina un raggio $e'_1$ dello stesso fascio. Reciprocamente dato $e'_1$, il luogo delle rette $e$, che soddisfano la condizione ora scritta, è un cono di secondo ordine, che contiene le rette $AP, AC_1, AC_2, AC_5$. Presa su questo cono una retta $x$, formo il fascio $x \,.\, P C_1 C_2 C_3$, e sul piano $B'p'$ determino quella retta, che dirò $e'_2$, la quale soddisfa la condizione $(x \,.\, P C_1 C_2 C_3) = (e'_2 \,.\, p' C'_1 C'_2 C'_3)$. Avuta $e'_2$, il luogo delle rette, che passano per A e che dirò $y$, e soddisfano la condizione $(y \,.\, P C_1 C_2 C_4) = (e'_2 \,.\, p' C'_1 C'_2 C'_4)$ è un altro cono di secondo ordine, che ha col primo le generatrici $AP, AC_1, AC_2$ in comune e che quindi lo sega secondo una retta $y$; sicchè ad una generatrice $x$ del primo cono si può far corrispondere un'altra sua generatrice $y$, e viceversa; perciò vi sono due generatrici $x$, ciascuna delle quali coincide con la sua corrispondente $y$. Ora quando $x$ coincide con la sua corrispondente $y$, il raggio $e'_2$ non è altro che un raggio $e'$; dunque possiamo dire che ad un raggio $e'_1$ corrispondono due raggi $e'$; e perciò vi sono tre raggi $e'$ ciascuno dei quali coincide col suo corrispondente. Di questi tre raggi escluso quello, che passa per il punto ove il piano $B'p'$ è segato dalla retta $C'_1 C'_2$, gli altri due soddisfano la quistione.

Abbiamo così due coppie di rette eccezionali associate $e$, $e'$; e per ogni coppia si hanno due correlazioni; perchè il punto E si può far coincidere con A o con $e\beta$ ed allora E' dovrà coincidere con B' o con $e'\alpha'$. Dunque è $\tau_{\left(1150\,\frac{P}{p'}\right)} = 6$; e perciò $\tau_{(1170)} = 6$.

20. Il secondo sistema del settimo gruppo è soggetto alle condizioni (11 61) cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ \beta\ C_1 \ldots C_6\ \delta \\ \alpha'\ B'\ C'_1 \ldots C'_6\ \delta' \end{matrix} \right| .$$

Come nel numero precedente è $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Le rette eccezionali devono passare rispettivamente per A, B'. Inoltre se E non si trovasse su $\beta$, sarebbe $E' \equiv B'$ ed $E \equiv A$, ed i piani $\delta, \delta'$ non sarebbero coniugati, dunque è necessario che E si trovi su $\beta$ ed E' sopra $\alpha'$. Se $E \equiv e\beta$, sarà E' un punto della retta $\alpha'\delta'$, ed $e'$ una retta per B', del piano $B' \,.\, \alpha'\delta'$, mentre che $e$ è soggetta alla condizione di passare per A; inoltre $e, e'$ devono soddisfare le

tre condizioni $(e.C_1C_2..C_6)=(e'.C'_1C'_2..C'_6)$. Col metodo tenuto precedentemente (19, *b*) si trovano tre coppie di rette eccezionali associate, che soddisfano le date condizioni.

Similmente se E è un punto di $\beta\delta$, sarà $e$ una retta per A situata sul piano $A.\beta\delta$, $e'$ una retta per B', ed $E'\equiv e'\alpha'$; e le rette $e, e'$ devono soddisfare le tre condizioni su scritte; perciò si hanno altre tre coppie di rette eccezionali associate. Dunque è $\tau=6$.

21. Il terzo sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1152); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha' & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & C'_5 & \delta'_1 & \delta'_2 \end{matrix}\right|.$$

Anche per questo sistema è $\varrho=\sigma=0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(1152)}=\tau_{(1112\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1p'_2})}+\theta_{(1132)P_1}+\theta_{(1112\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2}.$$

Ricerca di $\tau_{(1112\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1p'_2})}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & \beta & C & \delta_1 & \delta_2 & P_1 & P_2 \\ \alpha' & B' & C' & \delta'_1 & \delta'_2 & p'_1 & p'_2 \end{matrix}\right|$. Se fosse $e$ una retta di $\beta$ sarebbe $e'\equiv\alpha'p'_1.\alpha'p'_2$ ed $e$ dovrebbe soddisfare le due condizioni $(e.AC\beta P_1P_2)=(e'.\alpha'B'C'p'_1p'_2)$; e sul piano $\beta$ vi è una sola retta che le soddisfa. Preso $E\equiv e\delta_1$, $e\delta_2$, sarà $E'\equiv e'\delta'_2$, $e'\delta'_1$; perciò si hanno due correlazioni.

Se $e$ non è sopra $\beta$, allora passerà per A, ed $e'$ per B'. Se $e$ non passa per alcun punto P, sarà $e'$ quella retta che è comune ai due piani $B'p'_1$, $B'p'_2$. Il punto E' può coincidere soltanto con $e'\alpha'$ e sarà $E\equiv\beta'\delta'_1\delta'_2$, $e\equiv AE$; sicchè abbiamo un'altra correlazione.

Se $e$ contenesse alcun punto P, se fosse per esempio $e\equiv AP_1$, sarebbe $e'$ situata sul piano $B'p'_2$ e passerebbe per B'; ma se E coincidesse con A, sarebbe $E'\equiv B'$ ed i piani $\delta, \delta'$ non sarebbero coniugati; se $e$ non coincide con A; sarà $E\equiv e\beta$ ed $E'\equiv\alpha'\delta'_1\delta'_2$; ciò che è impossibile, perchè questo punto non si trova sul piano $B'p'_2$.

Dunque è $=\tau_{(1112\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1p'_2})}=3$.

Ricerca di $\theta_{(1132)P}$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ può essere uno dei tre piani, che passano per PA e contengono uno dei tre punti C. Sia per esempio $\varepsilon\equiv PAC_1$; sarà $\varepsilon'\equiv B'C'_2C'_3$. Se fosse $e\equiv\varepsilon\beta$, sarebbe $e'\equiv\varepsilon'\alpha'$, e se $E\equiv e\delta_1$, $e\delta_2$ sarebbe $E'\equiv e'\delta'_2$, $e'\delta'_1$; sicchè si avrebbero due correlazioni. Se $\beta$ non passa per $e$, le due rette $e, e'$ passeranno per A, B'; però è necessario che $\beta$ passi per E; perchè altrimenti i punti eccezionali coinciderebbero con A, B' ed i piani $\delta, \delta'$, non sarebbero coniugati; se $E\equiv\beta\delta_1\varepsilon$ oppure $\beta\delta_2\varepsilon$, sarà $E'\equiv\alpha'\delta'_2\varepsilon'$, oppure $\alpha'\delta'_1\varepsilon'$. Le rette $e, e'$ sono così determinate, e perciò si hanno altre due correlazioni. Essendo tre le coppie di piani eccezionali associati, si ha: $\theta_{(1132)P}=12$.

Ricerca di $\theta_{(1112\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2}$. Sia $\varepsilon\equiv P_2AC$, sarà $\varepsilon'\equiv B'p'_1$; se fosse $e\equiv\beta\varepsilon$ sarebbe $e'\equiv\alpha'\varepsilon'$; e se $E\equiv e\delta_1$ od $e\delta_2$, sarebbe $E'\equiv e'\delta'_2$, $e'\delta'_1$; e si avrebbero due correlazioni; se poi $\beta$ non passasse per $e$, si dovrebbe avere come nel caso precedente $E\equiv\beta\delta_1\varepsilon$, oppure $\beta\delta_2\varepsilon$ ed $E'\equiv\alpha'\delta'_2\varepsilon'$, od $\alpha'\delta'_1\varepsilon'$ e le rette $e, e'$ sarebbero AE,

$B'E'$; e perciò si avrebbero altre due correlazioni. Sia $\varepsilon \equiv P_2P_1A$, sarà $\varepsilon'$ un piano per $B'C'$. Se $e \equiv \beta\varepsilon$, sarà $e'$ la retta che passa per i due punti ove $\alpha'$ è segato dalle rette $B'C', p'$: e quindi sarebbe $\varepsilon' \equiv B'C'.e'$; e potendo il punto E coincidere con $e\delta_1$, o $e\delta_2$, sarà $E' \equiv e'\delta'_1$, $e'\delta'_2$; ed abbiamo così due correlazioni. Se $\beta$ non passa per $e$, sarà $e$ una retta per A ed $e'$ per $B'$. Secondo che si ha $E \equiv \beta\delta_1\varepsilon$, oppure $E \equiv \beta\delta_2\varepsilon$, sarà $E'$ un punto di $\alpha'\delta'_2$ o di $\alpha'\delta'_1$, ed $e'$ quella retta, che passa per $B'$ e si appoggia a $p'_1$ e $\alpha'\delta'_2$ oppure alle due rette $p', \alpha'\delta'_1$. Avendo le rette $e'$, si hanno i punti $E'$ ed i piani $\varepsilon'$; quindi abbiamo altre due correlazioni.

Sia infine $e \equiv AP$; è necessario che sia $E \equiv e\beta$, ed allora sarà $E' \equiv \alpha'\delta'_1\delta'_2$, $\varepsilon' \equiv B'C'E'$ ed $e'$ la retta, che unisce $B'$ col punto $E'$. Dunque è $\theta_{(1112\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} = 9$.

Sostituendo si ha:

$$\tau_{(1152)} = 24.$$

22. Il quarto sistema del settimo gruppo soddisfa le condizioni (1143); cioè:

$$\left|\begin{matrix} A & \beta & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \alpha' & B' & C'_1 & C'_2 & C'_3 & C'_4 & \delta'_1 & \delta'_2 & \delta'_3 \end{matrix}\right|.$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano eccezionale $\varepsilon$ deve contenere il punto A e due punti C; sia $\varepsilon \equiv AC_1C_2$ ed $\varepsilon' \equiv B'C'_3C'_4$. Qualunque sia la posizione che si dà ad E, si vede che per $E'$ devono passare oltre al piano $\varepsilon'$, più di due altri piani; perciò $\varrho = 0$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Sia come innanzi $\varepsilon \equiv AC_1C_2$, $\varepsilon' \equiv B'C'_3C'_4$; se $e \equiv \beta\varepsilon$, sarà $e' \equiv \alpha'\varepsilon'$ e la correlazione è determinata; se $\beta$ non passa per $e$, $e$ ed $e'$ passeranno rispettivamente per A, $B'$ e dovranno soddisfare le due condizioni $(e.A\beta\delta_1\delta_2\delta_3) = (e'.\alpha'B'\delta'_1\delta'_2\delta'_3)$, e come si può vedere con un metodo analogo a quello tenuto nel numero 19, *b*, vi sono due coppie di rette, che le soddisfano. Dunque per ogni coppia di piani eccezionali associati si hanno tre correlazioni; ed essendo sei le coppie dei piani $\varepsilon$, $\varepsilon'$ si ha $\sigma = 18$.

*c*) Ricerca di $\tau$. Sia anzi tutto $e$ sopra $\beta$, sarà $e'$ sopra $\alpha'$.

Se $E \equiv \beta\delta_1\delta_2$, $\beta\delta_2\delta_3$, $\beta\delta_3\delta_1$ sarà rispettivamente $E'$ un punto di $\alpha'\delta'_3$, $\alpha'\delta'_1$, $\alpha'\delta'_2$; se poi E è un punto di $\beta\delta_1$, $\beta\delta_2$, $\beta\delta_3$ sarà rispettivamente $E' \equiv \alpha'\delta'_2\delta'_3$, $\alpha'\delta'_3\delta'_1$, $\alpha'\delta'_1\delta'_2$. Abbiamo così sei casi analoghi da considerare, e per ogni caso le rette $e$, $e'$ devono soddisfare le tre condizioni $(e.A\beta C_1C_2C_3C_4) = (e'.\alpha'B'C'_1C'_2C'_3C'_4)$. Consideriamone uno, e precisamente quello in cui $e$ è una retta del piano $\beta$, ed $e'$ si trova su $\alpha'$ e passa pel punto eccezionale $E'$. Presa una retta $e'$ per $E'$ e sopra $\alpha'$, esiste sopra $\beta$ una sola retta $e$, che soddisfa la condizione doppia $(e.A\beta C_1C_2C_3) = (e'.\alpha'B'C'_1C'_2C'_3)$. Avuta la retta $e$ formo il fascio $e.A\beta C_1C_4$, e trovo sopra $\alpha'$ per $E'$ quella sola retta $e'_1$, con la quale si può formare il fascio $e'_1.\alpha'B'C'_1C'_4$ projettivo al precedente; sicchè ad una retta $e'$ si può far corrispondere una retta $e'_1$. Reciprocamente data $e'_1$, tutte le rette di $\beta$, che projettano $A, \beta, C_1, C_4$ in modo di formare un fascio projettivo al fascio $e'.\alpha'B'C'_1C'_4$ formano un fascio che dirò $(B_1)$. Preso un raggio $x$ del fascio $(B_1)$, trovo su $\alpha'$ per $E'$ una retta che dirò $e'_2$ tale da soddisfare la condizione $(x.A\beta C_1C_2) = (e_2.\alpha'B'C'_1C'_2)$; avuta $e'_1$ determino il raggio, che dirò $y$, di $(B_1)$ che soddisfa la condizione: $(y.A\beta C_1C_3) = (e'_2.\alpha'B'C'_1C'_3)$; sicchè nel fascio $B_1$ ad un raggio $x$, corrisponde un raggio $y$, e viceversa ad un raggio $y$ corrisponde un

raggio $x$, sicchè vi sono due raggi $x$, ciascuno dei quali coincide col suo corrispondente. Quando $x$ coincide col suo corrispondente $y$, il raggio $e'_2$ che essi determinano non è altro che un raggio $e'$; dunque ad ogni raggio $e'_1$ corrispondono due raggi $e'$. Nella corrispondenza (1, 2) fra i raggi $e'$, $e'_1$ del fascio di centro E', vi sono quindi tre coincidenze, e perciò vi sono tre coppie di rette $e$, $e'$, che soddisfano le condizioni date.

Dunque per tutti i sei casi si hanno diciotto correlazioni.

Supponiamo ora che $e$ non sia sopra $\beta$, le due rette $e$, $e'$ passeranno rispettivamente per A, B'. Se $E \equiv \beta\delta_1\delta_2, \beta\delta_2\delta_3, \beta\delta_3\delta_1$, sarà $e \equiv AE$, E' un punto di $\alpha'\delta'_3$, $\alpha'\delta'_1$, $\alpha'\delta'_2$ ed $e'$ in ogni caso una delle due rette per B', del piano, che passa per B' e per la retta che contiene il punto E', e che soddisfano la condizione $(e \,.\, C_1C_2C_3C_4) = (e' \,.\, C'_1C'_2C'_3C'_4)$.

Si hanno così sei correlazioni, ed altrettante se ne ottengono quando il punto E si trova su una delle tre rette $\beta\delta_1$, $\beta\delta_2$, $\beta\delta_3$, ed E' coincide con uno dei tre punti $\alpha'\delta'_2\delta'_3$, $\alpha'\delta'_3\delta'_1$, $\alpha'\delta'_1\delta'_2$. Abbiamo dunque $\tau = 30$.

23. Il primo sistema dell'ottavo gruppo è quello, che soddisfa le condizioni: (10100); cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \ldots B_{10} \\ \alpha'\ B'_1 \ldots B'_{10} \end{matrix} \right|.$$

In questo sistema è $\varrho = \sigma = 0$. In fatti se $\varepsilon'$ coincidesse con $\alpha'$, il piano $\varepsilon$ dovrebbe passare per i dieci punti B; se $\varepsilon'$ non coincidesse con $\alpha'$, dovrebbe $\varepsilon$ passare per A: e poichè non può contenere più di due punti B, ne segue che $\varepsilon'$ dovrebbe passare per otto punti B'. Lo stesso risultato si ottiene per i sistemi di questo gruppo, che soddisfano condizioni fra le quali ci sono più di cinque coppie di punti coniugati.

Anche $\tau = 0$; perchè se $e$ passa per A, $e$ ed $e'$ dovrebbero soddisfare le sette condizioni $(e \,.\, B_1 \,..\, B_{10}) = (e' \,.\, B'_1 \,..\, B'_{10})$, e perciò non si possono determinare; se poi $e$ non passa per A, $e'$ si troverebbe su $\alpha'$, e dovrebbero soddisfare otto condizioni, ciò che è pure impossibile.

24. Il secondo sistema dell'ottavo gruppo, è quello che soddisfa le condizioni (10091), cioè:

$$\left| \begin{matrix} A\ B_1 \ldots B_9\ \gamma \\ \alpha'\ B'_1 \ldots B'_9\ \gamma' \end{matrix} \right|.$$

Sia (23) $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(10091)} = \tau_{\left(1011\,{}^{P_1P_2P_3P_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4}\right)} + \theta_{(1071)P_1} + \theta_{\left(1051\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2} + \theta_{\left(1031\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2}\right)P_2} + \theta_{\left(1011\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3}\right)P_3}.$$

Ricerca di $\tau_{\left(1011\,{}^{P_1P_2P_3P_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4}\right)}$. Le condizioni sono $\left| \begin{matrix} A\ B\ \gamma\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \\ \alpha'\ B'\ \gamma'\ p'_1\ p'_2\ p'_3\ p'_4 \end{matrix} \right|$.

È necessario, come si può facilmente vedere, che $e$ passi per A. Se non contiene alcun punto P, $e'$ sarà una delle due rette, che incontrano le quattro rette $p'$. Presa una di queste due rette, sarà $e$ quella retta per A che soddisfa le due condizioni $(e \,.\, BP_1P_2P_3P_3) = (e' \,.\, B'p'_1p'_2p'_3p'_4)$. Se poi $E \equiv A$, $e\gamma$, sarà rispettivamente $E' \equiv e'\gamma'$, $e'\alpha'$; sicchè si hanno quattro correlazioni.

Sia ora $e \equiv AP$, sarà $e'$ quella retta, che si appoggia alle tre rette $p'$ non coniugate a P, e che soddisfa la condizione $(\alpha . B' P_l P_m P_n) = (e' . B' p'_l p'_m p'_n)$. Se $E \equiv A$, $e\gamma$, sarà $E' \equiv e'\gamma'$, $e'\alpha'$; quindi si hanno due correlazioni per ogni retta $e = AP$, ed essendo quattro i punti P, in tutto se ne hanno otto; perciò $\tau_{\left(1011 \begin{smallmatrix} P_1 \ldots P_4 \\ p'_1 \ldots p'_4 \end{smallmatrix}\right)} = 12$.

È facile vedere che gli altri termini del secondo membro sono eguali a zero; quindi è $\tau_{(10\,91)} = 12$.

25. Il terzo sistema dell'ottavo gruppo soddisfa le condizioni (10 82); ed in esso è $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha la formola:

$$\tau_{(1082)} = \tau_{\left(1002 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 P_4 \\ p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 \end{smallmatrix}\right)} + \theta_{(1062)\,P_1} + \theta_{\left(1042 \begin{smallmatrix} P_1 \\ p'_1 \end{smallmatrix}\right) P_2} + \theta_{\left(1022 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 \\ p'_1 p'_2 \end{smallmatrix}\right) P_3} + \theta_{\left(1002 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 \\ p'_1 p'_2 p'_3 \end{smallmatrix}\right) P_4}.$$

Del secondo membro, come facilmente si può vedere, il solo primo termine non è zero; passiamo quindi alla ricerca di $\tau_{\left(1002 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 P_4 \\ p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 \end{smallmatrix}\right)}$.

Le condizioni sono:

$$\left| \begin{matrix} A & \beta_1 & \beta_2 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \alpha' & \beta'_1 & \beta'_2 & p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \end{matrix} \right|.$$

Se $e$ non passa per A, sarà $e'$ uno dei sei lati del quadrangolo completo i cui vertici sono i punti ove le rette $p'$ segano $\alpha'$. Presa $e' \equiv \alpha' p'_1 . \alpha' p'_2$, sarà $e \equiv P_3 P_4$, e secondo che si ha $E \equiv e\beta_1$, od $E \equiv e\beta_2$, sarà rispettivamente $E' \equiv e'\beta'_2$ ed $E' \equiv e'\beta'_1$; quindi si hanno in tutto dodici correlazioni.

Se $e$ passa per A e non per i punti P, sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano alle quattro rette $p'$. Il punto eccezionale E' deve coincidere col punto $e'\alpha'$; sicchè sarà E' un punto di $\beta'_1 \beta'_2$, ed $e$ deve trovarsi sul piano $A . \beta_1 \beta_2$, passare per A e soddisfare la condizione $(e . P_1 P_2 P_3 P_4) = (e' . p'_1 p'_2 p'_3 p'_4)$, e per ogni retta $e'$ vi sono due rette $e$, che vi soddisfano; dunque abbiamo quattro correlazioni.

Supponiamo ora che $e$ passi per A e per un punto P; sia per esempio $e \equiv AP_1$. Se $E \equiv e\beta_1, e\beta_2, A$, sarà rispettivamente E' un punto di $\alpha'\beta'_2, \alpha'\beta'_1, \beta'_1\beta'_2$, e in ognuno di questi tre casi si hanno due rette $e'$, che sono quelle che incontrano la retta, che contiene E', e le rette $p'_2, p'_3, p'_4$. Per ogni punto P si hanno così sei correlazioni, e perciò in tutto se ne hanno ventiquattro. Dunque è $\tau_{\left(1002 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 P_4 \\ p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 \end{smallmatrix}\right)} = 40$, ed anche $\tau_{(1082)} = 40$.

26. Il quarto sistema dell'ottavo gruppo soddisfa le condizioni (10 73).

In questo sistema si ha $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(1073)} = \tau_{\left(1013 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 \\ p'_1 p'_2 p'_3 \end{smallmatrix}\right)} + \theta_{(1053)\,P_1} + \theta_{\left(1033 \begin{smallmatrix} P_1 \\ p'_1 \end{smallmatrix}\right) P_2} + \theta_{\left(1013 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 \\ p'_1 p'_2 \end{smallmatrix}\right) P_3}.$$

Ricerca di $\tau_{\left(1013 \begin{smallmatrix} P_1 P_2 P_3 \\ p'_1 p'_2 p'_3 \end{smallmatrix}\right)}$. Le condizioni sono: $\left| \begin{matrix} A & B & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \alpha' & B' & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & P'_1 & P'_2 & P'_3 \end{matrix} \right|$.

Supponiamo che $e$ non passa per A, allora $e'$ dovrà trovarsi sopra $\alpha'$, e passare almeno per uno dei punti ove le rette $p'$ segano $\alpha'$; se $e'$ passa per il punto $p'_1 \alpha'$

sarà $e \equiv P_2P_3$. Il punto E deve coincidere con uno dei tre punti $e\gamma_1$, $e\gamma_2$, $e\gamma_3$, e sarà rispettivamente $E' \equiv \alpha'\gamma'_2\gamma'_3$, $\alpha'\gamma'_3\gamma'_1$, $\alpha'\gamma'_1\gamma'_2$. Conoscendo E' la retta $e'$ è anche determinata. Si hanno così tre correlazioni, e lo stesso avviene quando $e'$ passa pel punto $\alpha'p'_2$, o $\alpha'p'_3$. Sia ora $e'$ un lato del triangolo, i cui vertici sono i punti ove $\alpha'$ è segato dalle rette $p'$; e sia per esempio $e' \equiv \alpha'p'_1 . \alpha'p'_2$; allora passerà la retta $e$ per il punto $P_3$. È necessario che dei piani $\gamma'$ uno passi per E'; se è $E' \equiv e'\gamma'_1$, sarà E un punto di $\gamma_2\gamma_3$, ed $e$ una o l'altra delle due rette del piano $P_3 . \gamma_2\gamma_3$, che passano per $P_3$ e soddisfano la condizione $(e . A B P_1 P_2) = (e' . \alpha' B' p'_1 p'_2)$. Essendo tre i piani $\gamma'$ si hanno sei correlazioni. Altrettante se ne hanno se $e' \equiv \alpha'p'_2 . \alpha'p'_3$, oppure se $e' \equiv \alpha'p'_3 . \alpha'p'_1$. Dunque riepilogando, quando $e$ non passa per A si hanno ventisette correlazioni.

Sia ora $e$ una retta per A e non per i punti P; la retta $e'$ dovrà incontrare le tre rette $p'_1, p'_2, p'_3$. Se nessun piano $\gamma$ passasse per E, i piani $\gamma'$ passerebbero tutti e tre per E', ciò che è impossibile; perchè per un punto qualunque non passa alcuna retta, che incontra tre rette date. Similmente se un sol piano $\gamma$ passasse per E, il piano $\alpha'$ e due piani $\gamma'$ dovrebbero passare per E'; dunque è necessario che per E passino due o tre piani $\gamma$; se ne passano due, per esempio $\gamma_1\gamma_2$, sarà E' un punto di $\alpha'\gamma'_3$, $e'$ una delle due rette, che incontrano le altre quattro $\alpha'\gamma'_3, p'_1, p'_2, p'_3$, e per ognuna di queste due rette $e'$, si hanno due rette $e$, che passano per A, sono nel piano $A . \gamma_1\gamma_2$ e soddisfano la condizione $(e . B P_1 P_2 P_3) = (e' . B' p'_1 p'_2 p'_3)$; e si hanno perciò quattro correlazioni. Essendo lo stesso quando per E passano i piani $\gamma_2\gamma_3$ oppure $\gamma_3\gamma_1$; in tutto si hanno dodici correlazioni.

Se poi $E \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, sarà $e \equiv AE$, $E' \equiv e'\alpha'$, ed $e'$ quella retta, che incontra $p'_1, p'_2, p'_3$ e soddisfa la condizione $(e . B P_1 P_3 P_3) = (e' . B' p'_1 p'_2 p'_3)$. Perciò si ha un' altra correlazione.

Sia infine $e \equiv AP_1$; se $E \equiv A_1$, sarà $E' \equiv \gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3$ ed $e'$ quella retta, che passa per E' ed incontra le due rette $p'_2, p'_3$; se $E \equiv e\gamma_1, e\gamma_2, e\gamma_3$, sarà rispettivamente $E' \equiv \alpha'\gamma'_2\gamma'_3$, $\alpha'\gamma'_3\gamma'_1$, $\alpha'\gamma'_1\gamma'_2$ ed è in ogni caso $e'$ quella retta, che passa per E ed incontra $p'_2, p'_3$.

Lo stesso si ottiene quando $e \equiv AP_2$, oppure $e \equiv AP_3$, e perciò si hanno dodici correlazioni. Dunque è $\tau_{\left(1013\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3}\right)} = 52$.

Ricerca di $\theta_{(1053)P}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & B_1 \,..\, B_5 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha' & B'_1 \,..\, B'_5 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{matrix}\right|$ ed inoltre il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per P. È necessario, che $\varepsilon$ contenga il punto A, e poichè dei punti B non può contenerne più di uno, ne segue che quattro punti B' dovrebbero trovarsi sopra $\varepsilon'$. Dunque è $\theta_{(1053)P} = 0$.

Ricerca di $\theta_{\left(1033\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & B_1 & B_2 & B_3 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & P_1 \\ \alpha' & B'_1 & B'_2 & B'_3 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & p'_1 \end{matrix}\right|$, ed il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per $P_2$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv AP_1P_2$, $\varepsilon' \equiv B'_1B'_2B'_3$. Se $e' \equiv \alpha'\varepsilon'$, la retta $e$ dovrà passare per P; e secondo che è $E' \equiv \alpha'\varepsilon'\gamma'_1$, $\alpha'\varepsilon'\gamma'_2$, $\alpha'\varepsilon'\gamma'_3$, sarà rispettivamente $E \equiv \varepsilon\gamma_2\gamma_3$, $\varepsilon\gamma_3\gamma_1$, $\varepsilon\gamma_1\gamma_2$ ed in ogni caso sarà $e \equiv P_1E$. Sicchè si hanno tre correlazioni. Se poi $\alpha'$ non passa per $e'$, si può stabilire la correlazione

in altri tre modi, ponendo cioè $E \equiv \gamma_1\gamma_2\varepsilon$, $\gamma_2\gamma_3\varepsilon$, $\gamma_3\gamma_1\varepsilon$; $E' \equiv \alpha'\gamma'_3\varepsilon'$, $\alpha'\gamma'_1\varepsilon'$, $\alpha'\gamma'_2\varepsilon'$ ed $e \equiv AE$, $e' \equiv \varepsilon' p'_1 . E'$. Dunque è $\theta_{(10\,33\,{}^{P_1}_{p'_1})_{P_2}} = 6$.

Ricerca di $\theta_{(1013\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})_{P_3}}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & B & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & P_1 & P_2 \\ \alpha' & B' & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & p'_1 & p'_2 \end{matrix}\right|$ ed inoltre il piano $\varepsilon$ deve passare per $P_3$. Si vede facilmente che il piano $\varepsilon$ deve passare anche per A e per $P_1$ o $P_2$; cioè deve essere $\varepsilon \equiv P_3AP_1$ oppure $\varepsilon \equiv P_3AP_2$, ed in tali casi sarà $\varepsilon' \equiv B'p'_2$ od $\varepsilon' \equiv B'p'_1$; sicchè abbiamo due casi analoghi da considerare e perciò ci basta studiarne un solo. Sia dunque $\varepsilon \equiv P_3AP_1$, $\varepsilon' \equiv B'p'_2$; se $e' \equiv \alpha'\varepsilon'$, poichè $p'_1$ non incontra $e'$, sarà $P_1$ un punto di $e$. Dei piani $\gamma'$ uno solo deve passare per E', posto che sia $\gamma'_1$, sarà $E \equiv \varepsilon\gamma_2\gamma_3$ ed $e \equiv PE$; sicchè abbiamo tre correlazioni, quanti sono i piani $\gamma'$. Se poi $\alpha'$ non passa per $e'$, sarà A un punto di $e$, ed è necessario che sia $E' \equiv \alpha'\varepsilon'\gamma'_1$, oppure $\alpha'\varepsilon'\gamma'_2$, $\alpha'\varepsilon'\gamma'_3$. Si ha allora rispettivamente $e' \equiv E'.\varepsilon' p'_1$, $E \equiv \varepsilon\gamma_2\gamma_3$, oppure $\varepsilon\gamma_3\gamma_1$, $\varepsilon\gamma_1\gamma_2$ ed $e \equiv AE$; e perciò altre tre correlazioni. Dunque è $\theta_{(1013\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})_{P_3}} = 12$.

Sostituendo abbiamo:

$$\tau_{(1073)} = 70 .$$

27. Il quinto sistema dell'ottavo gruppo è soggetto alle condizioni (1064). In esso si ha $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. La formola (III) ci dà:

$$\tau_{(1064)} = \tau_{(1004\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})} + \theta_{(1044)\,P_1} + \theta_{(1024\,{}^{P_1}_{p'_1})_{P_2}} + \theta_{(1004\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2})_{P_3}} .$$

Ricerca di $\tau_{(1004\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3})}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \alpha' & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 & p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{matrix}\right|$.

Se la retta $e$ non passa per A, sarà $e'$ sopra $\alpha'$ e dovrà passare almeno per uno dei tre punti ove $\alpha'$ è segato dalle tre rette $p'$. Supponiamo che passa per $\alpha' p'_1$; sarà $e \equiv P_2P_3$. Dei tre piani $\beta$ un solo può passare per E; quindi tre piani $\beta'$ devono passare per E'; ma questo si trova sopra $\alpha'$, dunque è impossibile stabilire la correlazione nel caso in cui la retta $e$ passa per il punto $\alpha' p'_1$.

Sia allora $e' \equiv \alpha' p'_1 . \alpha' p'_2$; sarà $e$ una retta, che passa per $P_3$. Il punto E' deve coincidere con uno dei quattro punti, ove $e'$ sega i piani $\beta'$; posto $E' \equiv e'\beta'_1$, sarà $E \equiv \beta_2\beta_3\beta_4$ ed $e' \equiv P_3E$; così abbiamo quattro correlazioni; ma possiamo similmente prendere $e' \equiv \alpha' p'_2 . \alpha' p'_3$, oppure $e' \equiv \alpha' p'_3 . \alpha' p'_1$, quindi in tutto si hanno dodici correlazioni.

Sia $e \equiv AP_1$, sarà $e'$ una retta, che incontra $p'_2$, $p'_3$; però qualunque sia la posizione di E sopra $e$, ne viene che per E' dovrebbero passare quattro dei cinque piani $\alpha'$, $\beta'_1$, $\beta'_2$, $\beta'_3$, $\beta'_4$; dunque se $e$ passa per A non può contenere alcun punto P. Giacchè $e$, che passa per A, non contiene i punti P, la retta $e'$ dovrà incontrare le tre rette $p'$. Il punto E può coincidere soltanto con uno dei quattro punti $\beta_2\beta_3\beta_4$, $\beta_3\beta_4\beta_1$, $\beta_4\beta_1\beta_2$, $\beta_1\beta_2\beta_3$; e sarà $e \equiv AE$, e rispettivemente E' sarà un punto di $\alpha'\beta'_1$, $\alpha'\beta'_2$, $\alpha'\beta'_3$, $\alpha'\beta'_4$, e per ogni caso si hanno due rette $e'$, le quali sono quelle, che incontrano

le rette $p'_1, p'_2, p'_3$, e l'altra su cui si trova E'. Abbiamo così altre otto correlazioni e perciò $\tau_{\left(1004\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3}\right)} = 20$.

Ricerca di $\theta_{(10\,44)P}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A\ B_1\ ..\ B_4\ \gamma_1\ ..\ \gamma_4 \\ \alpha'\ B'_1\ ..\ B'_4\ \gamma'_1\ ..\ \gamma'_4 \end{matrix}\right|$ ed il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per P. Sia $\varepsilon \equiv AB_1P$, sarà $\varepsilon' \equiv B'_2B'_3B'_4$; il punto eccezionale E non può coincidere con A; perchè i quattro piani $\gamma'$ non passano per uno stesso punto di $\varepsilon'$; quindi E' deve trovarsi sopra $\alpha'$, e per esso non potrà passare che un sol piano $\gamma'$; di modo che tre piani $\gamma$ dovrebbero passare per E, che si trova su $\varepsilon$. Dunque è $\theta_{(1044)P} = 0$.

Ricerca di $\theta_{\left(1024\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2}$. Sia $\varepsilon = P_1P_2A$, sarà $\varepsilon'$ un piano, che passa per $B'_1B'_2$. Se il piano $\alpha'$ passasse per E', per questo punto dovrebbero passare due piani $\gamma'$; posto $E' \equiv \alpha'\gamma'_1\gamma'_2$, sarà $E \equiv \varepsilon\gamma_3\gamma_4$ ed $\varepsilon' \equiv E'B'_1B'_2$. In ogni caso secondo che si pone $e' \equiv \alpha'\varepsilon'$ od $E'.\varepsilon'p'_1$, sarà rispettivamente $e \equiv P_1E$ od AE. Essendo sei le coppie di piani $\gamma'$, si hanno dodici correlazioni.

Sia ora $\varepsilon \equiv P_2AB_1$, sarà $\varepsilon' \equiv p'_1B'_2$; ma come abbiamo visto nella ricerca di $\theta_{(10\,44)P}$, la correlazione non si può stabilire. Lo stesso dicasi se $\varepsilon \equiv P_2AB_2$, $\varepsilon' \equiv p'_1B'_1$; dunque è $\theta_{\left(1024\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)} = 12$.

Ricerca di $\theta_{\left(1004\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2}\right)P_3}$. Sia $\varepsilon \equiv P_1P_2P_3$, sarà $\varepsilon' \equiv \alpha'$. È necessario che per E' passino due piani $\gamma'$; posto $E' \equiv \alpha'\gamma'_1\gamma'_2$, si ha $E \equiv \varepsilon\gamma_3\gamma_4$ e per ogni coppia di punti eccezionali E, E' si hanno due correlazioni; perchè se $e \equiv P_1E$ oppure $P_2E$ sarà $e' \equiv \alpha'p'_2.E'$, oppure $\alpha'p'_1.E'$; e perciò si hanno in tutto dodici correlazioni.

Poniamo ora $\varepsilon \equiv P_3AP_1$ sarà $\varepsilon'$ un piano per $p'_2$, e la correlazione, come abbiamo visto nella ricerca di $\theta_{\left(1024\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2}$, si può stabilire in dodici modi. Lo stesso dicasi se $\varepsilon \equiv P_3AP_2$ e $\varepsilon'$ un piano per $p'_1$; quindi è $\theta_{\left(1004\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2}\right)P_3} = 36$.

Sostituendo si ha:

$$\tau_{(1064)} = 68.$$

28. Il sesto sistema dell'ottavo gruppo è soggetto alle condizioni (1055), cioè:

$$\left|\begin{matrix} A\ B_1\ ..\ B_5\ \gamma_1\ ..\ \gamma_5 \\ \alpha'\ B'_1\ ..\ B'_5\ \gamma'_1\ ..\ \gamma'_5 \end{matrix}\right|.$$

*a*) Ricerca di $\varrho$. Il piano $\varepsilon$ deve passare per A e per due dei cinque punti B. Sia per esempio, $\varepsilon \equiv AB_1B_2$; sarà $\varepsilon' \equiv B'_3B'_4B'_5$. Se fosse $E \equiv A$, i cinque piani $\gamma'$ dovrebbero passare per E'; se poi non è $E \equiv A$, anche se per esso passassero due piani $\gamma$, per il punto E', dovrebbero passare $\alpha'$ e tre piani $\gamma'$. Dunque è $\varrho = 0$.

*b*) Ricerca di $\sigma$. Abbiamo dieci coppie di piani eccezionali associati, e quindi dieci casi analoghi da considerare. Ci basta studiarne uno. Sieno $\varepsilon \equiv AB_1B_2$, $\varepsilon' \equiv B'_3B'_4B'_5$. Se fosse $e' \equiv \varepsilon'\alpha'$, sarebbe $e$ quella retta di $\varepsilon$, che soddisfa le due condizioni $(e.\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5) = (e'.\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4\gamma'_5)$; ed avremmo perciò una correlazione.

Se $e'$ non si trova su $\alpha'$, la retta $e$ dovrà passare per A ed $e$, $e'$ dovranno soddisfare le tre condizioni $(e.A\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5) = (e'.\alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4\gamma'_5)$.

Presa una retta $e$ per A, trovo sul piano $\varepsilon'$ la retta $e'$, che soddisfa le due condizioni $(e.A\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = (e'.\alpha'.\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4)$. Avuta $e'$, trovo sopra $\varepsilon$ e per A, quella retta, che dico $e_1$, la quale soddisfa la condizione $(e_1.A\gamma_1\gamma_2\gamma_5) = (e'.\alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_5)$.

Sicchè nel fascio di centro A, ad un raggio $e$ corrisponde un raggio $e_1$. Reciprocamente, data $e_1$, le rette $e'$ di $\varepsilon'$, che soddisfano la condizione $(e_1.A\gamma_1\gamma_2\gamma_5) = (e'.\alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_5)$, inviluppano una conica tangente alle rette d'intersezione di $\varepsilon'$ con i piani $\alpha', \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_5$. Presa una tangente $x'$ della conica, trovo quel raggio del fascio di centro A, che dirò $e_2$, che soddisfa la condizione $(e_2.A\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = (x'.\alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3)$; avuta $e_2$ determino quella tangente $y'$ della conica, che soddisfa l'altra condizione $(e_2.A\gamma_1\gamma_2\gamma_4) = (y'.\alpha'\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_4)$; sicchè una tangente $x'$ della conica determina un'altra tangente $y'$ della stessa, e viceversa una tangente $y'$, ne determina una $x'$; sicchè vi sono due tangenti $x'$, ciascuna delle quali coincide con la sua corrispondente $y'$. Quando $x'$ coincide con $y'$, la retta $e_2$ non è altro che una retta $e$; dunque ad un raggio $e_1$, corrispondono due raggi $e$. Nel fascio di centro A, vi è fra i raggi $e, e_1$, una corrispondenza $(1, 2)$; perciò vi sono tre raggi $e$, ciascuno dei quali coincide col suo corrispondente $e_1$. Da questi escluso il raggio $A.\varepsilon\gamma_1\gamma_2$, gli altri due, e le rette corrispondenti $e'$, soddisfano il problema. Abbiamo così altre due correlazioni, e perciò per ogni coppia di piani eccezionali associati se ne hanno tre. Dunque è $\sigma = 30$. Per dualità si ricava $\tau = 30$.

29. Passiamo ora allo studio dei sistemi del nono gruppo. Per i primi due sistemi; cioè per quelli, che sono soggetti alle condizioni (00130), (00121) si ha $\varrho = \sigma = \tau = 0$. Il terzo sistema è quello, che soddisfa le condizioni (00112) ed anche in esso si ha $\varrho = \sigma = 0$; perchè per poterci essere correlazioni aventi piani eccezionali, è necessario che il numero delle coppie dei punti coniugati non superi il sei. Ci resta dunque a trovare il valore di $\tau$. Applicando la nota formola abbiamo:

$$\tau_{(00112)} = \tau_{\left(0012\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)} + \theta_{(0092)\,P_1} + \theta_{\left(0072\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2} + \theta_{\left(0052\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2}\right)P_3} + \theta_{\left(0032\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3}\right)P_4}$$
$$+ \theta_{\left(0012\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4}\right)P_5}.$$

Come facilmente si può vedere, solo il primo termine del secondo membro non è eguale a zero; sicchè dobbiamo trovare il valore di $\tau_{\left(0012\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)}$.

Dinotiamo con A, A' la coppia di punti coniugati, e con $\beta_1, \beta'_1; \beta_2, \beta'_2$ le due coppie di piani coniugati. Poichè $e'$ non può incontrare le cinque rette $p'$, è necessario che $e$ passi almeno per un punto P. Passi la retta $e$ per $P_1$; sarà $e'$ una delle due rette, che incontrano le quattro rette $p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$; presa una di queste rette $e'$, si determina $e$ in modo di soddisfare le due condizioni $(e.AP_2P_3P_4P_5) = (e'.A'p'_2p'_3p'_4p'_5)$. Abbiamo così due coppie di rette eccezionali, e per ogni coppia abbiamo due correlazioni; perchè preso $E \equiv e\beta_1$ od $E \equiv e\beta_2$, sarà $E' \equiv e'\beta'_2$, oppure $E' \equiv e'\beta'_1$. Essendo cinque i punti P, abbiamo venti correlazioni.

Sia ora $e$ una delle dieci rette, che uniscono a due a due i punti P, per esempio sia $e \equiv P_1P_2$, sarà $e'$ quella retta, che si appoggia a $p'_3, p'_4, p'_5$ e soddisfa la condizione $(e.AP_3P_4P_5) = (e'.A'p'_3p'_4p'_5)$. Abbiamo così dieci coppie di rette eccezionali

associate, e per ogni coppia abbiamo due correlazioni; perchè se $E \equiv e\beta_1$, $e\beta_2$, sarà $E' \equiv e'\beta'_2$, $e'\beta'_1$. Dunque è $\tau_{(00\,11\,2)} = \tau_{\left(0012\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)} = 40$.

30. Il quarto sistema è soggetto alle condizioni (00103); ed in esso si ha $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(00\,10\,3)} = \tau_{\left(0003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)} + \theta_{(0083)\,P_1} + \theta_{\left(0063\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2} + \theta_{\left(0043\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2}\right)P_3} + \theta_{\left(0023\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_3}\right)P_4} + \theta_{\left(0003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4}\right)P_5}.$$

Come nel numero precedente, del secondo membro solo il primo termine non è eguale a zero; sicchè ci resta a trovare il valore di $\tau_{\left(0003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)}$.

Le condizioni semplici sono tre coppie di piani coniugati, che dinoteremo con $\alpha_i$, $\alpha'_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Passi la retta $e$ per $P_1$; sarà $e'$ una delle due rette, che si appoggiano a $p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$. Per ogni retta $e'$, se poniamo $E' \equiv e'\alpha'_1$, sarà E un punto di $\alpha_2\alpha_3$ ed $e$ una qualunque delle due rette del piano $P_1.\alpha_2\alpha_2$, che passano per $P_1$ e soddisfano la condizione $(e.P_2P_3P_4P_5) = (e'.p'_2p'_3p'_4p'_5)$. Essendo tre le coppie di piani coniugati e due le rette $e'$ si hanno dodici correlazioni. Lo stesso dicasi quando $e$ passa per un altro punto P; dunque abbiamo sessanta correlazioni in cui la retta $e$ passa per un punto P.

Sia ora $e$ una delle dieci rette, che uniscono a due a due i cinque punti P; sia per esempio $e \equiv P_1P_2$; se poniamo $E \equiv e\alpha_1$, sarà E' un punto di $\alpha'_2\alpha'_3$ ed $e'$ una qualunque delle due rette, che incontrano le altre quattro $p'_3, p'_4, p'_5, \alpha'_2\alpha'_3$. Essendo tre le coppie di piani coniugati abbiamo sei correlazioni; e quindi vi sono altre sessanta correlazioni in cui la retta $e$ contiene due dei cinque punti P.

Si ha perciò:

$$\tau_{(0010\,3)} = \tau_{\left(0003\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4 p'_5}\right)} = 120.$$

31. Il quinto sistema soddisfa le condizioni (0094).

Si ha ancora $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau$. Si ha:

$$\tau_{(0094)} = \tau_{\left(0014\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4}\right)} + \theta_{\left(0014\,{}^{P_1\,P_2\,P_3}_{p'_1 p'_2 p'_0}\right)P_4} + \theta_{\left(0034\,{}^{P_1\,P_2}_{p'_1 p'_2}\right)P_3} + \theta_{\left(0054\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)} + \theta_{(0074)\,P_1}.$$

Ricerca di $\tau_{\left(0014\,{}^{P_1\,P_2\,P_3\,P_4}_{p'_1 p'_2 p'_3 p'_4}\right)}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ A' & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 & p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \end{matrix}\right|$.

Supponiamo prima che $e$ non contenga alcun punto P; si hanno due rette $e'$, che sono quelle, che si appoggiano a $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$. Per ognuna di queste due rette si ha $E' \equiv e'\gamma'_1$ oppure $e'\gamma'_2$, $e'\gamma'_3$, $e'\gamma'_4$, e rispettivamente $E \equiv \gamma_2\gamma_3\gamma_4$, $\gamma_3\gamma_4\gamma_1$, $\gamma_4\gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$; e la retta $e$ sarà per ogni caso, quella retta, che passa per E e soddisfa le due condizioni $(e.AP_1P_2P_3P_4) = (e'.A'p'_1p'_2p'_3p'_4)$. Si hanno così otto correlazioni.

Se $e$ contiene un punto P, per esempio $P_1$, $e'$ incontrerà le tre rette $p'_2, p'_3, p'_4$, e dovranno $e$ ed $e'$ soddisfare la condizione $(e.AP_2P_3P_4) = (e'.A'p'_2p'_3p'_4)$. Se

$E \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$, oppure $\beta_2\beta_3\beta_4$, $\beta_3\beta_4\beta_1$, $\beta_4\beta_1\beta_2$, sarà in ogni caso $e$ determinata, e vi sarà una retta $e'$, che soddisferà le date condizioni. Il punto E' sarà quello ove $e'$ incontrerà rispettivamente i piani $\beta'_4$, $\beta'_1$, $\beta'_2$, $\beta'_3$.

Se poi E è un punto di una delle sei rette, ove a due a due si segano i piani $\beta$; se per esempio E è un punto di $\beta_1\beta_2$, si troverà E' sopra $\beta'_3\beta'_4$, $e'$ sarà una qualunque delle due rette, che incontrano le altre quattro $\beta'_3\beta'_4$, $p'_2$, $p'_3$, $p'_4$, e per ogni retta $e'$ si avranno due rette $e$, situate sul piano $P_1.\beta_1\beta_2$, che passano per $P_1$ e soddisfano la condizione $(e.AP_2P_3P_4) = (e'.A'p'_2p'_3p'_4)$. Dunque quando $e$ passa per $P_1$ si hanno vent'otto correlazioni, e perciò ve ne saranno $28\times4=112$ nelle quali la retta $e$ contiene un sol punto P.

Sia ora $e$ una delle sei rette, che uniscono a due a due i punti P; sia per esempio $e \equiv P_1P_2$. Se $E \equiv e\beta_1$, oppure $e\beta_2$, $e\beta_3$, $e\beta_4$, sarà rispettivamente $E' \equiv \beta'_2\beta'_3\beta'_4$, oppure $\beta'_3\beta'_4\beta'_1$, $\beta'_4\beta'_1\beta'_2$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$; ed in ogni caso sarà $e'$ la retta comune ai due piani $E'p'_3$, $E'p'_4$. Dunque vi sono ventiquattro correlazioni nelle quali la retta $e$ contiene due punti P.

Dunque abbiamo $\tau_{\left(0014\,{}^{P_1P_2P_3P_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4}\right)} = 144$.

Ricerca di $\theta_{\left(0014\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3}\right)P_4}$. Il piano eccezionale $\varepsilon$, che deve passare per $P_4$, deve contenere due degli altri tre punti P; perciò può essere $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$, $P_4P_2P_3$, $P_4P_3P_1$; ed $\varepsilon'$ sarà rispettivamente $A'p'_3$, $A'p'_1$, $A'p'_2$. Consideriamo il primo caso, cioè $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$, $\varepsilon' \equiv A'p'_3$. Il punto E può coincidere con uno dei sei punti ove le sei rette $\beta_1\beta_2$, $\beta_1\beta_3$, $\beta_1\beta_4$, $\beta_2\beta_3$, $\beta_2\beta_4$, $\beta_3\beta_4$ segano il piano $\varepsilon$, ed E' sarà rispettivamente uno dei sei punti ove le rette $\beta'_3\beta'_4$, $\beta'_2\beta'_4$, $\beta'_2\beta'_3$, $\beta'_1\beta'_4$, $\beta'_1\beta'_3$, $\beta'_1\beta'_2$ segano il piano $\varepsilon'$; e per ognuno di questi sei casi, secondo che si pone $e \equiv EP_1$ o $e \equiv EP_2$, sarà $e' \equiv E'.\varepsilon'p'_2$, od $e' \equiv E'.\varepsilon'p'_1$. Per ogni coppia di piani eccezionali associati si hanno dodici correlazioni; quindi è $\theta_{\left(0014\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3}\right)P_4} = 36$.

Ricerca di $\theta_{\left(0034\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2}\right)P_3}$. Le condizioni sono $\left|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & \beta_1 & \ldots & \beta_4 & P_1 & P_2 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & \beta'_1 & \ldots & \beta'_4 & p'_1 & p'_2 \end{matrix}\right|$ ed inoltre il piano eccezionale $\varepsilon$ deve passare per $P_3$. È necessario che sia $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$, $\varepsilon' \equiv A'_1A'_2A'_3$, e come abbiamo visto nella ricerca precedente la correlazione si può stabilire in dodici modi; cioè $\theta_{\left(0034\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2}\right)P_3} = 12$.

Inoltre è facile vedere che $\theta_{\left(0054\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2} = \theta_{(0074)\,P_1} = 0$; quindi sostituendo si ha $\tau_{(0094)} = 192$.

32. Il sesto sistema del nono gruppo soddisfa le condizioni (0085).

Non dobbiamo trovare che il valore di $\tau_{(0085)}$, perchè come già sappiamo è $\varrho = \sigma = 0$.

Si ha:

$$\tau_{(0085)} = \tau_{\left(0005\,{}^{P_1P_2P_3P_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4}\right)} + \theta_{\left(0005\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3}\right)P_4} + \theta_{\left(0025\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2}\right)P_3} = \theta_{\left(0045\,{}^{P_1}_{p'_1}\right)P_2} + \theta_{(0065)\,P_1}.$$

Ricerca di $\tau_{\left(0005\,{}^{P_1P_2P_3R_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4}\right)}$. Dinotiamo con $\alpha_i$, $\alpha'_i$ $(i = 1,2,3,4,5)$ le cinque coppie di piani coniugati. Se la retta eccezionale $e$ non passasse per alcun punto P;

poichè per E non possono passare al massimo che tre piani $\alpha$, per esempio $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ne segue che la retta $e'$ dovrebbe incontrare le cinque rette $\alpha'_4\alpha'_5, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$; ciò che è impossibile.

Similmente se $e$ passasse per due punti P, per E non potrebbe passare che un sol piano $\alpha$, quindi quattro piani $\alpha'$ dovrebbero passare per E'; dunque è necessario che $e$ passi per un sol punto P.

Se $e$ passa per un punto P, per esempio per $P_1$, è necessario che E coincida con uno dei dieci punti ove si segano a tre a tre i cinque piani $\alpha$; posto $E \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, sarà $E' \equiv e'.\alpha'_4\alpha'_5$; ed $e'$ una delle due rette, che incontrano le altre quattro $\alpha'_4\alpha'_5$, $p'_2, p'_3, p'_4$; sicchè si hanno venti correlazioni quando $e$ passa per $P_1$. Essendo quattro i punti P si ha $\tau_{(0005\,{}^{P_1P_2P_3P_4}_{p'_1p'_2p'_3p'_4})} = 80$.

Ricerca di $\theta_{(0005\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3})P_4}$. Il piano eccezionale $\varepsilon$, che deve passare per $P_4$, può coincidere con uno dei tre piani $P_4P_1P_2$, $P_4P_2P_3$, $P_4P_3P_1$; ed $\varepsilon'$, passerà rispettivamente per $p'_3, p'_1, p'_2$. Sia dunque $\varepsilon \equiv P_4P_1P_2$, ed $\varepsilon'$ un piano per $p'_3$. Il punto E sarà uno dei dieci punti ove le dieci rette, ove si segano a due a due i piani $\alpha$, segano $\varepsilon$; se poniamo $E \equiv \varepsilon\alpha_1\alpha_2$, sarà $E' \equiv \alpha'_3\alpha'_4\alpha'_5$, $\varepsilon' \equiv E'p'_3$; e secondo che si prende $e \equiv EP_1$ od $EP_2$, si ha $e' \equiv E'p'_2$, od $E'p'_1$. Essendo tre i piani $\varepsilon$, si ha $\theta_{(0005\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3})} = 60$.

Ricerca di $\theta_{(0025\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2})P_3}$. Si hanno fra le condizioni, due coppie di punti coniugati, che dinoterò con $B_1, B'_1$; $B_2, B'_2$. Se poniamo $\varepsilon \equiv P_3P_1P_2$, sarà $\varepsilon'$ un piano per $B'_1B'_2$, e ci troviamo nelle stesse condizioni della ricerca precedente, e perciò abbiamo venti correlazioni. Se invece si pone $\varepsilon \equiv P_3P_1B_1$, sarà $\varepsilon' \equiv B'_2p'_2$; e poichè dei piani $\alpha$ al massimo due possono passare per E, ne segue che tre piani $\alpha'$ dovrebbero passare per E', che si trova sopra $\varepsilon'$. Dunque è $\theta_{(0025\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2})P_3} = 20$.

Si trova che $\theta_{(0045\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} = \theta_{(0065)\,P_1} = 0$.

Sostituendo si ha:

$$\tau_{(0085)} = 160.$$

33. Ci resta infine da considerare l'ultimo sistema del nono gruppo, che è quello, che è soggetto alle condizioni (00 76).

Anche per questo si ha $\varrho = \sigma = 0$.

Ricerca di $\tau_{(0076)}$. Dinotiamo con $A_i, A'_i$ $(i = 1,2,3,4,5,6,7)$, le coppie di punti coniugati e con $\beta_k, \beta'_k$, $(k = 1,2,3,4,5,6)$ le coppie di piani coniugati. È necessario che sia E uno dei venti punti, ove si segano a tre a tre i sei piani $\beta$, e lo stesso dicasi per E'; sicchè posto $E \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$, sarà $E' \equiv \beta'_4\beta'_5\beta'_6$. Le rette $e$, $e'$ passano per E, E' e devono soddisfare le quattro condizioni $(e.A_1A_2...A_7) = (e'.A'_1A'_2...A'_7)$; e come si può dimostrare vi sono tre coppie di rette $e$, $e'$ che le soddisfano; quindi vi sono sessanta correlazioni. Giungiamo allo stesso risultato col solito metodo tenuto innanzi. Si ha:

$$\tau_{(0076)} = \tau_{(0016\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3})} + \theta_{(0016\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2})P_3} + \theta_{(0036\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} + \theta_{(0056)\,P_1}.$$

Ricerca di $\tau_{(0016\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3})}$. Si hanno venti coppie di punti eccezionali associati. Sia una coppia $E \equiv \beta_1\beta_2\beta_3$, $E' \equiv \beta'_4\beta'_5\beta'_6$; abbiamo le tre correlazioni, che si ottengono ponendo $e \equiv EP_1$, $EP_2$, $EP_3$, e rispettivamente $e' \equiv E'p'_2 . E'p'_3$, $E'p'_3 . E'p'_1$, $E'p'_1 . E'p'_2$; quindi è $\tau_{(0016\,{}^{P_1P_2P_3}_{p'_1p'_2p'_3})} = 60$.

Ricerca di $\theta_{(0016\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2})P_3}$. Abbiamo ancora venti coppie di punti E, E'; il piano $\varepsilon$, deve passare per E, per $P_3$ e per il punto $P_1$ o $P_2$, se $\varepsilon \equiv EP_3P_1$; $\varepsilon'$ dovrebbe passare per E', A', e per la retta $p'_2$; dunque $\theta_{(0016\,{}^{P_1P_2}_{p'_1p'_2})P_3} = 0$. Similmente si dimostra che $\theta_{(0036\,{}^{P_1}_{p'_1})P_2} = \theta_{(0056)P_1} = 0$. Sostituendo si ha:

$$\tau_{(0076)} = 60.$$

*Correlazioni eccezionali di primo ordine,*
*che soddisfano a quattordici condizioni elementari.*

34. Supposto noto il valore di $\pi$ corrispondente al sistema, che soddisfa le quattordici condizioni elementari $(mnpq)$; cioè il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine, che soddisfano le quattordici condizioni $(mnpq)$; questo numero $\pi$, per definizione (1), non è altro che il $\pi_A$ del sistema, che soddisfa le tredici condizioni $(mnp-1q)$. Conoscendo i numeri $\varrho$, $\sigma$, $\tau$ corrispondenti a questo ultimo sistema, mediante la (I) possiamo trovare $\pi_\alpha$, cioè il numero delle correlazioni eccezionali di primo ordine con punti eccezionali, che soddisfano le quattordici condizioni $(mnp-1q+1)$.

Similmente conoscendo il valore di $\lambda$ corrispondente al sistema, che soddisfa le dette quattordici condizioni, possiamo trovare quello di $\lambda$, che corrisponde al sistema, che soddisfa le altre $(mnp-1q+1)$, (mediante la (II) ed i valori su detti di $\varrho, \sigma, \tau$).

Dunque conoscendo i numeri $\varrho$, $\sigma$, $\tau$, corrispondenti ai sistemi, che soddisfano tredici elementari condizioni, dati i valori di $\pi$ e $\lambda$, che corrispondono ad un sistema soddisfacente quattordici condizioni, possiamo trovare i valori di $\pi$ e di $\lambda$ per tutti i sistemi appartenenti allo stesso gruppo al quale appartiene il sistema di cui si conoscono i valori di $\pi$ e $\lambda$.

Ora sappiamo che per i sistemi, che soddisfano le condizioni:

(4020), (3120), (2220), (3050), (2150), (2080), (1180), (10110), (00140)

i valori di $\pi$ sono: (Vedi parte II, § 1, 4, 7, 10, 15, 20, 26)

4, 1, 0, 4, 2, 4, 4, 4, 4

e quelli di $\lambda$ sono:

0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

quindi abbiamo:

| | | | $\varrho$ | $\sigma$ | $\tau$ | $\pi_A$ | $\pi_\alpha$ | $\lambda_A$ | $\lambda_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | gruppo | (4010) . . . . | 0, | 0, | 12, | 4, | 0, | 0, | 0. |
| II | » | (3110) . . . . | 1, | 0, | 0, | 1, | 1, | 1, | 1. |
| III | » | (2210) . . . . | 0, | 0, | 0, | 0, | 0, | 0, | 0. |

| | | $\varrho$ | $\sigma$ | $\tau$ | $\pi_A$ | $\pi_\alpha$ | $\lambda_A$ | $\lambda_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IV gruppo | (3040) . . . . | 0, | 0, | 6, | 4, | 6, | 0, | 0, |
| | (3031) . . . . | 0, | 3, | 15, | 6, | 3, | 0, | 1, |
| | (3022) . . . . | 1, | 6, | 6, | 3, | 1, | 1, | 3. |
| V „ | (2140) . . . . | 0, | 0, | 2, | 2, | 4, | 0, | 0, |
| | (2131) . . . . | 3, | 3, | 1, | 4, | 5, | 0, | 3, |
| | (2122) . . . . | 5, | 2, | 2, | 5, | 3, | 3, | 5. |
| VI „ | (2070) . . . . | 0, | 0, | 2, | 4, | 10, | 0, | 0, |
| | (2061) . . . . | 0, | 0, | 18, | 10, | 12, | 0, | 0, |
| | (2052) . . . . | 0, | 0, | 26, | 12, | 10, | 0, | 0, |
| | (2043) . . . . | 0, | 12, | 26, | 10, | 4, | 4, | 0. |
| VII „ | (1170) . . . . | 0, | 0, | 6, | 4, | 6, | 0, | 0, |
| | (1161) . . . . | 0, | 0, | 6, | 6, | 12, | 0, | 0, |
| | (1152) . . . . | 0, | 0, | 24, | 12, | 12, | 0, | 0, |
| | (1143) . . . . | 0, | 18, | 30, | 12, | 6, | 6, | 0. |
| VIII „ | (10100) . . . | 0, | 0, | 0, | 4, | 12, | 0, | 0, |
| | (1091) . . . . | 0, | 0, | 12, | 12, | 24, | 0, | 0, |
| | (1082) . . . . | 0, | 0, | 40, | 24, | 32, | 0, | 0, |
| | (1073) . . . . | 0, | 0, | 70, | 32, | 26, | 0, | 0, |
| | (1064) . . . . | 0, | 0, | 68, | 26, | 10, | 0, | 0, |
| | (1055) . . . . | 0, | 30, | 30, | 10, | 0, | 10, | 0. |
| IX „ | (00130) . . . | 0, | 0, | 0, | 4, | 12, | 0, | 0, |
| | (00121) . . . | 0, | 0, | 0, | 12, | 36, | 0, | 0, |
| | (00112) . . . | 0, | 0, | 40, | 36, | 68, | 0, | 0, |
| | (00103) . . . | 0, | 0, | 120, | 68, | 84, | 0, | 0, |
| | (0094) . . . . | 0, | 0, | 192, | 84, | 60, | 0, | 0, |
| | (0085) . . . . | 0, | 0, | 160, | 60, | 20, | 0, | 0, |
| | (0076) . . . . | 0, | 0, | 60, | 20, | 0, | 0, | 0. |

I valori di $\pi_A$, $\pi_\alpha$; $\lambda_A$ e $\lambda_\alpha$ sono appunto quelli di $\pi$ e $\lambda$, che abbiamo ottenuto nella parte II, nello studio dei sistemi soddisfacenti quattordici condizioni elementari; sicchè abbiamo un' altra verifica di quei risultati.

# Molluschi fossili del Monte Mario presso Roma.

## Memoria del Socio G. PONZI e dell'ing. R. MELI [1]

*letta nella seduta del 7 febbraio 1886.*

(Con una tavola)

Nell'anno 1854, fu pubblicato a Versailles un catalogo di 272 specie di fossili raccolti al Monte Mario presso Roma, redatto dal conte di Rayneval, da monsig. Van den Hecke e da me, a fine di far conoscere la fauna di quella interessante collina e con essa molte conchiglie e zoofiti fino allora restati incogniti. Però, a dire il vero, il numero degli esemplari stampati riuscì assai scarso; inoltre la maggior parte di essi rimase in Francia; soltanto pochi furono distribuiti in Italia e perciò spesso ebbi richieste per parte dei nostri scienziati, senza poter essere in grado di soddisfarli. Si era quindi da noi pensato di farne una ristampa. Frattanto progredivano le nostre ricerche e colla scoperta di nuovi fossili per gradi si faceva sentire sempre maggiore il bisogno di una seconda edizione più ampia e corretta. Ma i progetti andarono falliti, avvegnachè la nostra associazione dovette sciogliersi per l'avvenuta morte del Rayneval, presto seguita da quella del Van den Hecke.

Intanto lo scultore Angelo Conti nel 1864, dopo aver fatta una copiosa raccolta di fossili del Monte Mario e di altre località prossime a Roma, ne pubblicò il catalogo ricco di 634 specie, col titolo: *Il Monte Mario e i suoi fossili subappennini.* Peraltro l'autore, per raggiungere il maggior numero delle specie, attribuì al Monte Mario fossili di altre località, senza riguardo alla stratigrafia, e considerò talvolta come specie distinte le semplici varietà, o le medesime in età diversa. Ad ogni modo, in mancanza di uno migliore, il catalogo del Conti fu accettato negli studî di comparazione. In seguito, nell'anno 1871, lo stesso autore nel donare una raccolta di fossili del M. Mario al Museo civico di Ferrara, sua patria, mise fuori una seconda edizione del suo catalogo, correggendo in questa alcune delle specie erroneamente determinate nella 1ª edizione e portando collo stesso metodo di prima il numero delle specie a 692: penso

[1] Questa Memoria si rinvenne tra le carte del defunto Socio prof. G. Ponzi, il quale la cominciò a scrivere circa il 1877 e la lasciò incompiuta. La Memoria portava il titolo di *Nuovo catalogo dei fossili del Monte Mario,* giacchè era intenzione del Ponzi e del Meli di pubblicare l'enumerazione di tutti i fossili raccoltivi. Il presente lavoro contiene un capitolo d'introduzione scritto quasi in totalità dal Ponzi e l'indicazione, ora riveduta, delle prime 153 specie di molluschi conchiferi fossili nelle marne sabbiose grigie e nelle sabbie gialle del Monte Mario.

che probabilmente tale numero, attribuito alle specie fossili rinvenute nelle sabbie gialle del Monte Mario dal Conti, sia alquanto ingrandito.

In questo stato di cose si rendeva sempre più urgente un riordinamento della lista dei fossili del Monte Mario, purgandola da ciò che non le appartiene e riducendola al vero numero delle specie, per avere con precisione la fisonomia e l'epoca di questa interessante fauna. Il lungo e paziente ufficio in certo modo riguardava me per diverse ragioni, specialmente per aver avuto parte nella redazione del primo catalogo. Nè a me mancava il coraggio di affrontare un'impresa, in cui occorreva tornare da capo, come se il lavoro non fosse mai stato fatto. Ma l'età e lo stato di salute mi facevano non piccolo ostacolo, laonde era necessario associarmi ad altri, che mi soccorresse nell' impresa. Nè questo mi è mancato, imperocchè con mia piena soddisfazione ha corrisposto l'assistente al Museo geologico universitario, ing. Romolo Meli già conosciuto e sperimentato per la sua abilità nel riconoscere e determinare i fossili. Così costituita una nuova associazione, si fecero i necessarî preparativi e si pose mano ad un lavoro accurato che ci ha occupati per qualche tempo.

Ma non avevamo più il materiale di studio di confronto, di cui si era fatto uso nella redazione del primo catalogo, perchè la collezione Rayneval fu trasferita in Francia, e la mia manomessa dalla inondazione del Tevere nel 1870. Ciò per altro non ci fu di ostacolo, giacchè ampiamente ha supplito per i confronti la ricca suppellettile di fossili terziarî del Gabinetto universitario, risultante di parecchie raccolte fatte nelle diverse contrade d'Italia ed anche nei contorni di Roma, fra le quali si trovano pure i resti della mia antica collezione.

Ci siamo poi serviti del materiale estratto dal 1875 fino ad oggi da uno di noi, il Meli, con paziente cura dalle sabbie della Farnesina e di Acquatraversa esistente nel Gabinetto di Geologia della Università di Roma, e principalmente della bella e ricca collezione di fossili di queste località che egli conserva presso di sè, la quale cominciata quando era adolescente, circa venti anni fa, è molto bene ordinata, assai numerosa di specie e di perfetti esemplari tutti di esatta provenienza. Questa interessante raccolta ci è stata di grande aiuto nella compilazione del nostro catalogo, il quale si può dire quasi tutto redatto su quella.

E perchè il numero degli oggetti di studio risultasse maggiore vi abbiamo altresì aggiunto quelli estratti dalle sabbie, alle radici del colle della Farnesina presso il il ponte Milvio, siccome spettanti alla medesima zona fossilifera, non che dalle sabbie gialle di alcune località fossilifere, recentemente rinvenute dal Meli nell' esplorare il gruppo delle colline del Monte Mario.

Non ci sono inoltre mancati gli scritti e le figure di comparazione fatte nella compilazione del primo catalogo, da me in parte conservati. Sono state inoltre consultate le opere di paleontologia in buon numero esistenti nella biblioteca del nostro gabinetto e molti dei cataloghi di fossili pliocenici fin quì pubblicati, non escluso quello del Conti che vogliamo correggere.

Però intendiamo bene: l'opera nostra non è che un semplice catalogo e non un lavoro sistematico, e perciò nel riferire le specie non ho creduto di dover riportare la sinonimia di ciascuna specie, potendola il lettore riscontrare in tante opere moderne. Laonde ci siamo ristretti alle semplici indicazioni dei fossili trovati,

classificandoli in ordini, famiglie, generi, specie e varietà. È poi naturale che in una scrupolosa rassegna, al cospetto di una grande quantità di esemplari, ci si manifestassero anche quelli fin qui non conosciuti e meritevoli di uno studio speciale per essere definita la loro diagnosi. Questo è stato fatto, e le nuove specie risultanti sono state descritte e verranno figurate perchè siano apprezzati i loro caratteri. Però non intendiamo togliere il diritto di priorità a chicchesia che le avesse prima di noi riconosciute e pubblicate e delle quali non avessimo avuta alcuna notizia.In ciascuna specie abbiamo notato, se è emigrata, ovvero estinta, come altresì il grado di frequenza o rarità di rinvenimento. Infine vi abbiamo fatte le annotazioni necessarie perchè siano eliminati gli errori e reso meno imperfetto il catalogo dei fossili di quella tipica località.

Molto copiosi sono i fossili che si vedono in quella zona di sabbie gialle, che nei passati tempi resero noto il Monte Mario. Presi insieme, offrono al paleontologo una fisionomia a contorni netti e precisi. Sono tutti marini e costituiscono una fauna che molto somiglia a quella tuttora vivente nel Mediterraneo; anzi sarebbe identica, se alcune specie non ne fossero emigrate ed alcune altre estinte. Si compone quasi esclusivamente di invertebrati, i resti di vertebrati essendo estremamente rari al Monte Mario e rappresentati fin quì soltanto da otoliti, da rarissimi denti, da qualche placca dermica e da una vertebra di pesce. I molluschi abbondano e predominano sulle altre classi; tra essi i conchiferi sono in maggioranza, sia per il numero delle specie, che per la frequenza degli esemplari. Succedono poi i gasteropodi per il numero delle specie, ma in generale rappresentati da scarsi individui; rarissimi i pteropodi; i brachiopodi ristretti al genere *Terebratula*; piuttosto abbondanti i molluscoidi; rari gli echinodermi; non frequenti i coralli ed i crostacei, all'infuori di qualche specie dei Balanidi; i foraminiferi rappresentati da parecchie specie.

Però, tra i molluschi, alcune specie si presentano con un numero tale d'individui che incontransi per tutto, tanto da dare una impronta caratteristica a quella collina. Tali sono: *Ostrea lamellosa* in grandi dimensioni, *Pecten opercularis, Mactra triangula, Corbula gibba, Pectunculus inflatus, Cyprina islandica, Venus ovata, Turritella tricarinata, Nassa semistriata,* ecc. Quasi tutte si trovano nello stato di perfetta integrità, a valve riunite e in posizione normale; in taluni punti si vedono aggruppate in famiglie e così numerose da costituire conglomerati conchigliari legati da poca sabbia indurita. Nè vi manca altresì qualche rarissimo vestigio di animali terrestri trasportati dalle acque da terre circostanti, come sono le ossa di grossi pachidermi, esempio il bel molare di *Elephas meridionalis* Nesti, rinvenuto nelle sabbie gialle alla quota di 132 m. circa sul mare nel fare il pozzo per l'acqua potabile nel fortino militare costruito sulla sommità del monte (1).

La fauna del Monte Mario trovasi compresa nei depositi di sabbie grigie e gialle, che nella serie delle rocce si vedono succedere alle marne turchine e servon di letto alle brecce, tutte concordanti nella stratificazione per indicare esser state depositate successivamente da un medesimo mare. Se non che al Monte Mario tutta la serie delle assise subappennine, che lo costituiscono, si trova spostata dalla sua originaria posizione

(1) Di questo rinvenimento il Ponzi fece comunicazione all'Accademia (Ved. R. Accad. Lincei, Serie 3.ª *Transunti* Vol. II, pag. 130-131). Però il molare fu riferito all'*E. antiquus* Falc., mentre per la forma del dente e la disposizione delle lamine è da riportarsi indubbiamente all'*E. meridionalis* Nesti.

e inclinata leggermente, in guisa che i letti delle sabbie gialle dall'alto di quella collina si vedono scendere per perdersi alle radici del colle della Farnesina presso il Ponte Milvio.

L'epoca di formazione delle sabbie gialle indicata dalla loro ricca fauna non lascia dubbio. Dalla generalità dei geologi viene oggi riferita al finire del gran periodo terziario, ossia al piano superiore del pliocene denominato dal Mayer piano Astiano. Adottata questa definizione non basta, imperocchè oggi si vuol conoscere altresì per mezzo delle osservazioni quali condizioni regnavano nella Natura nello scorrere di quei rimoti secoli. Le fine sabbie di sedimento marino non intercalate da banchi di grosse brecce o ciottoli, ma solo di minuta ghiajuola: la loro regolare giacitura in letti pressochè orizzontali: la grande quantità di resti fossili che contengono nella loro normale posizione: tutto accenna ad un deposito tranquillo.

Se si faccia un confronto fra la fauna delle marne inferiori del Monte Vaticano (1), che rappresentano il terreno tortoniano del Mayer o il declinare dell'epoca miocenica (2), e la fauna pliocenica del Monte Mario, subito si scorgerà una notevole differenza. La Vaticana accenna ad un clima, se non tropicale, di certo più elevato del presente; mentre la Mariana si offre poco diversa dalle condizioni attuali. Dunque fra quei due tempi geologici corse un periodo di abbassamento di temperatura climatologica. Ma lo stato di calma apparente dei tempi pliocenici, non fu duraturo, avvegnachè l'abbassamento di temperatura, giunto a condensare i vapori atmosferici, diede origine a tremende burrasche e a dirottissime piogge. I banchi di brecce e di ciottoli, che sovrastano le sabbie gialle, costituiti da detriti di rocce appennine, nei quali rarissima è qualsiasi traccia di vita, fanno argomentare immani torrenti discesi dai monti, per consegnare le materie trasportate alle onde marine. Tale fu l'epoca del diluvio appennino, che segnò il confine fra il gran periodo terziario e l'agitato quaternario, che gli succedette.

Ma le piogge diluviali non furono che l'esordio del più grande cataclisma a cui avanti l'epoca nostra fu assoggettato tutto intero il pianeta. Per un rapido abbassamento di temperatura sul globo, la cui causa ancora non conosciamo con sicurezza, le piogge si convertirono in nevi; ed ecco cangiata la scena, si compiono tutti i fenomeni dei terreni morenici, che dànno una impronta caratteristica al periodo glaciale risentito dal pianeta, ed ecco un' efferato vulcanismo mettere a soqquadro l' Italia, sfigurarla e coi sismici sovvertimenti darle definitivamente la forma, che tuttora presenta. A tali violenze vulcaniche devesi attribuire il sollevamento anticlinale dei monti Mario e Vaticano, che produsse la faglia, per la quale la fiancata destra della gran valle tiberina presso Roma si trova più rilevata e la sua scala stratigrafica messa allo scoperto, risultando così discordante con quella della sinistra sponda.

In tal modo il Monte Mario colle sue assise sedimentarie e coi suoi numerosi

(1) Ponzi G., *I fossili del monte Vaticano.* (Atti R. Accad. Lincei. Serie 2ª, vol. III, 1876).

(2) Secondo altri, le marne del Vaticano spetterebbero alla parte inferiore del pliocene antico. Sembrano sincrone colle marne, rappresentanti un deposito di mare profondo, rinvenute recentemente sul nostro littorale a Torre Caldara presso Anzio ed a Castel Campanile presso Palidoro (via Aurelia).

fossili, divenne un archivio in cui si conservano documenti preziosi per la cronologia del nostro paese e la traccia dei grandi avvenimenti tellurici, che vi si operarono. Dopo queste premesse, non ci resta che l'esposizione dei fossili costituenti il nuovo Catalogo (1).

---

## MOLLUSCA

### Classe Lamellibranchiata. — Ord. Siphonida.

### I. Sinupalliata.

#### Famil. *Gastrochaenidae* Gray.

#### Gen. **Clavagella** Lamk.

1. *Clavagella bacillaris* Desh. — Conchiglia non rara nelle sabbie gialle; meno frequente nelle sottostanti marne sabbiose grigie; d'ordinario si ha in frammenti per la fragilità del suo tubo; è l'*Aspergillum maniculatum* Phil., di cui il Conti fece una specie distinta nella 1ª edizione del suo catalogo. La specie è estinta.

#### Gen. **Gastrochaena** Spengler.

2. *Gastrochaena dubia* Penn. (*Mya*). — Specie comune, che trovasi sempre colle valve congiunte e spesso contenute nel suo tubo ben conservato. La specie vive nel littorale romano. Alcuni esemplari vivi di questa specie furono raccolti da uno di noi negli scogli del molettone Panfili a Porto d'Anzio.

#### Fam. *Myidae* Desh.

#### Gen. **Corbula** Brug.

3. *Corbula gibba* Olivi (*Tellina*). — E una delle conchiglie più frequenti nelle varie località fossilifere del Monte Mario. La specie è pure vivente sul littorale romano; Meli ne raccolse esemplari vivi nella rada di Civitavecchia.

#### Gen. **Neaera** Gray.

4. *Neaera cuspidata* Olivi (*Tellina*). — Assai meno comune della precedente, come pure non è molto abbondante la specie vivente nel Mediterraneo.

(1) Disponendo ora di una enorme quantità di materiale, proveniente dalle sabbie grigie e gialle del Monte Mario e di altre località dei dintorni di Roma, che trovasi non soltanto nella mia privata collezione, ma che è accumulato nel Gabinetto di geologia dell'Università cogli acquisti fatti in questi ultimi anni delle collezioni Zuccari e Rigacci, è mia intenzione di continuare il catalogo delle specie fossili rinvenute in queste località, pubblicandone un'esteso e ragionato elenco sistematico.

R. Meli.

5. *Neaera costellata* Desh. (*Corbula*).— Assai rara al Monte Mario (Farnesina); una sola valva ben conservata nella coll. Meli (1); vivente sulle coste dell'Inghilterra e nel Mediterraneo (2).

Fam. *Mactridae* Desh.

Gen. **Mactra** Lin.

6. *Mactra corallina* Lin.— Poche valve rinvenute nelle sabbie gialle di Acquatraversa sulla via Cassia, le quali fanno continuazione a quelle del Monte Mario. Qualche altra valva venne estratta dalle sabbie gialle dell'altro versante del Monte Mario, a Malagrotta in prossimità della via Aurelia a circa 10 miglia da Roma. Gli esemplari determinati dal Conti per *Mactra stultorum* Lin. provengono appunto dalla seconda di queste località, le cui sabbie sembrano alquanto più recenti di quelle del Monte Mario.

Gen. **Trigonella** Da Costa.

7. *Trigonella subtruncata* Da Costa (= *Mactra triangula* auct.).— È una delle specie più frequenti del Monte Mario. Vi si trova anche la forma triangolare, che è la *M. triangula* Ren. Località: Farnesina, Valle dell'Inferno, Acquatraversa, Madonna del Rosario, ove si rinviene in modelli spatizzati.

Gen. **Lutraria** Lamk.

8. *Lutraria oblonga* Chemn. (*Mya*).

9. *Lutraria elliptica* Lamk.

Nelle sabbie gialle si rinvengono belli esemplari di entrambi queste specie di Lutrarie, generalmente colle due valve unite. (Farnesina, Valle dell'Inferno); più rare nelle marne sabbiose (Farnesina e Macchia Madama).

10. *Lutraria intermedia* Sow. = *L. gracilis* Conti. — Il march. Monterosato riporta dubitativamente la *L. gracilis* di Conti alla *L. elliptica* (3). Anche noi eravamo inclinati a fare di questa specie una varietà (var. *gracilis*). Ma il sig. G. Jeffreys, avendo studiato uno degli esemplari comunicatigli dal Meli, la identificò colla *L. intermedia* Sow. — Alcuni esemplari dalle marne sabbiose della Farnesina. La specie è vivente nell'America boreale.

Gen. **Eastonia** Gray.

11. *Eastonia rugosa* Gmel. (*Mactra*). — Alcuni esemplari estratti dalle sabbie gialle di Malagrotta. Una valva fresca di questa specie fu rinvenuta dal Meli sulla spiaggia tra Anzio e Nettuno nel nostro littorale, e le valve di altro esemplare vivente furono raccolte dal sig. B. Donati nella darsena di Civitavecchia.

(1) Indichiamo in seguito con (coll. M.) la collezione Meli.

(2) Siccome la massima parte delle specie, indicate in questo catalogo come fossili al Monte Mario, abitano tuttora nel Mediterraneo, così in seguito avvertiremo solamente se la specie è conosciuta vivente in altri mari, ovvero se sia ritenuta estinta, intendendo che vive nel Mediterraneo, quando non trovisi alcuna indicazione in proposito.

(3) Monterosato, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee* — Parte I$^{a}$ pag. 13.

Gen. **Cardilia** Desh.

12. *Cardilia Michelotti* Desh. — Pochi esemplari di questa graziosa specie furono estratti dalle sabbie di Acquatraversa e sono nella collezione Meli. La specie non è segnata nei precedenti cataloghi dei fossili del Monte Mario (1). La *C. Michelotti* ritrovasi nel pliocene di Asti, i cui esemplari confrontati con i nostri risultarono del tutto uguali. Rinviensi anche nelle sabbie di Peccioli in Val d'Era. Specie estinta.

Fam. *Anatinidae* Gray.

Gen. **Anatina** Lamk.

13. *Anatina praetenuis* Pultn. (*Mya*) = *A. oblonga* Phil. — Rarissima. Una valva delle marne della Farnesina, mostrante ben conservato il dente cardinale; altro esemplare proviene pure dalle sabbie della Farnesina.

Gen. **Thracia** Leach.

14. *Thracia pubescens* Pultn. (*Mya*).— Rarissima; nelle marne sabbiose della Farnesina (coll. M.).

15. *Thracia convexa* Wood = *Th. ventricosa* Phil.— Meno rara della precedente: nelle marne sabbiose della Farnesina; trovasi anche nelle soprastanti sabbie gialle.

16. *Thracia corbuloides* Desh. — Rara. Trovasi insieme alla *Th. convexa.*

17. *Thracia papyracea* Poli (*Tellina*).— Un' unico esemplare nella coll. M., proveniente dalle sabbie gialle di una nuova località fossilifera, esistente nel versante del Monte Mario, che guarda la Valle dell'Inferno, alla base del Pigneto Sacchetti (2).

Gen. **Pandora** Brug.

18. *Pandora inaequivalvis* Lin. (*Solen*) = *P. rostrata* Lamk.— Rarissima; nelle sabbie gialle di Acquatraversa.

19. *Pandora obtusa* Leach. — Rara: poche valve nelle marne sabbiose della Farnesina.

Gen. **Lyonsia** Turton.

20. *Lyonsia corruscans* Scacc. (*Pandorina*) = *L. norvegica* Chemn. (*Mya*).— Una valva,non integra, dalle sabbie gialle (Farnesina).

(1) Venne per la prima volta indicata nella lista di fossili raccolti ad Acquatraversa, che trovasi pubblicata nelle « *Notizie ed osservazioni sui resti organici rinvenuti nei tufi leucitici della provincia di Roma* » (*Bull. d. R. Comitato Geologico* anno 1881 n. 9-10. — Ved. pag. 450, n. 30).

(2) Questa località fu sconosciuta al Conti, al Rigacci, al Van den Hecke, al Rayneval. Fu trovata dal Meli nel 1874. È importante perchè contiene fossili ben conservati, e frequentemente gasteropodi: *Triton affine* Desh., *Triton nodiferum* Lamk., *Murex cristatus* Brocc., *Trophon craticulatus* (Brocc.), *Trophon squamulatus* (Brocc.), *Euthria cornea* (Lin.), *Fusus longiroster* (Brocc.), *Cassidaria echinophora* (Lin.), *Morio tyrrhena* (Chemn.), *Cassis saburon* (Brug.), *Siliquaria anguina* (Lin.), *Turbo rugosus* Lin., *Columbella subulata* (Brocc.), *Mitrella minor* (Scacc.), *Ovula spelta* (Lin.), *Cypraea physis* Brocc., *Conus striatulus* Brocc., ecc., a differenza delle altre località dello stesso colle, ove i gasteropodi sono in generale rari, mentre abbondano le bivalvi.

Fam. *Pholadomyidae* Desh.

Gen. **Pholadomya** Sow.

21. *Pholadomya alpina* Math. = *Ph. candida* Conti (non Sow.). — Rarissima; un' esemplare delle sabbie gialle nella coll. M. (Farnesina). Specie estinta.

Fam. *Glycimeridae* Desh.

Gen. **Panopaea** Ménard.

22. *Panopaea glycimeris* Born. (*Mya*) var. = *P. Faujasii* Mén. — Questa specie si rinviene in belli e ben conservati esemplari al Monte Mario, (Farnesina, Villa Madama, Pigneto Sacchetti). Il Conti stabilì sopra alcuni individui di *Panopaea* due nuove specie (*P. truncata, P. compressa*). Non avendo sott'occhio gli esemplari di queste nuove specie, siamo incerti se debbano essere accettate. Meli, che, qualche anno fa, visitò la collezione Conti, che trovasi conservata nel Museo di storia naturale a Ferrara, riportò l'opinione che possano essere varietà della *P. Faujasii*.

23. *Panopaea* (?) *plicata* Montg. (*Mytilus*) = *Myrina pelagica* Conti. (non Forbes). — Rarissima. Monterosato nella sua « *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*. Parte I[a] (1878 pag. 15) » pone questa specie dubitativamente sotto il genere seguente *Saxicava*, come ve la collocarono Nyst (1) e Wood (2). Weinkauff (3) la mette col genere *Panopaea*. (loc. Farnesina; sabbie e marne sabbiose). Trovasi fossile anche nel Palermitano.

Gen. **Saxicava** Fleuriau de Bellevue.

24. *Saxicava rugosa* Lin. (*Mya*).

25. Idem var. *arctica* (= *Mya arctica* Lin.).

Entrambi non frequenti nelle marne sabbiose della Farnesina. La var. *arctica* fu rinvenuta anche nelle sabbie gialle della Valle dell'Inferno. Esemplari viventi di questa specie furono raccolti nella rada di Anzio sul littorale romano.

Fam. *Solenidae* Lamk. (emend. Adams.)

Gen. **Solen** Lin.

26. *Solen vagina* Lin. — Raro e quasi sempre in frammenti. Ne furono estratti grossi frammenti, mostranti la cerniera, caratteristica della specie, dalle sabbie di Acquatraversa e da quelle di Malagrotta. (coll. M.).

(1) Nyst. P. H., *Descript. d. coquil. et d. polypiers foss. d. terr. tertiar. de la Belgique.* pag. 97, n. 55 tav. IV fig. 10 *a, b* (*Saxicava fragilis* ?).

(2) Wood S. W., *A Monograph of the Crag Mollusca*, Part. II, pag. 288 n. 3, tav. XXIX fig. 6, *a-c* (*Saxicava* ? *fragilis*).

(3) Weinkauff, *Die Conchyl. d. Mittelm.* Vol. II, pag. 436 (*Panopaea plicata*).

Gen. **Ensis** Schum.

27. *Ensis ensis* Lin. (*Solen*). — Come il precedente, raro ed in frammenti nelle sabbie gialle e grigie della Farnesina e nelle sabbie gialle di Malagrotta.

Gen. **Polia** D'Orb.

28. *Polia legumen* Lin. (*Solen*).— Una sola valva dalle sabbie di Acquatraversa. (coll. M.).

Gen. **Solecurtus** Blainv.

29. *Solecurtus strigilatus* Lin. (*Solen*). — Specie comune, sia nelle sabbie gialle che nelle marne sabbiose della Farnesina, dalla quale località provengono i migliori esemplari; meno frequente alla Valle dell'Inferno.

30. *Solecurtus candidus* Ren. (*Solen*). — Non raro nelle sopraccennate località.

Gen. **Azor** Gray.

31. *Azor antiquatus* Pultn. (*Solecurtus*) = *Solecurtus coarctatus* Gmel. (*Solen*).— Meno frequente delle due specie antecedenti; rinvenuto anche nelle sabbie d'Acquatraversa.

Fam. *Mesodesmidae* Desh.

Gen. **Mesodesma** Desh.

32. *Mesodesma cornea* Poli (*Mactra*). — Piuttosto frequente nelle sabbie gialle di Acquatraversa, ove si rinviene coi *Donax* in valve isolate: non si conoscono finora esemplari delle altre località fossilifere, all'infuori di una piccola valva logorata delle marne sabbiose della Farnesina.

Fam. *Scrobiculariidae Adams.*

Gen. **Semele** Schum.

33. *Semele angulosa* Ren. (*Tellina*). — Molto frequente nelle sabbie gialle e nelle marne sabbiose della Farnesina; Acquatraversa.

Gen. **Syndosmya** Récluz.

34. *Syndosmya alba* Wood (*Mactra*).— Comune, ma un poco meno frequente della specie che precede.

Gen. **Scrobicularia** Schum.

35. *Scrobicularia plana* Da Costa (*Trigonella*). — Assai rara. Nella coll. M. se ne conserva una valva rinvenuta nelle sabbie di Acquatraversa.

Fam. *Tellinidae* Lamk.

Gen. **Tellina** Lin.

Sectio Tellinella Gray.

36. *Tellina pulchella* Lamk. — Molto comune, specialmente nelle sabbie gialle. Van den Hecke, Ponzi e Rayneval segnano nel loro catalogo una varietà; anche il Conti fa una varietà di tale specie.

37. *Tellina serrata* Ren. — Frequente ed in completi esemplari alla Farnesina.

38. *Tellina incarnata* Lin. — Bellissimi esemplari completi si sono rinvenuti in buon numero nelle sabbie e nelle marne sabbiose della Farnesina; più rara ad Acquatraversa.

Sectio Tellinula Chemnitz.

39. *Tellina exigua* — Poli. Due valve di Acquatraversa (coll. M.).

40. *Tellina fabula* Gronov.— Rara e ritrovata soltanto nelle sabbie di Malagrotta (coll. M.).

41. *Tellina compressa* Brocc.— Non comune nelle sabbie gialle e marne sabbiose della Farnesina; rinvenuta anche nelle sabbie d'Acquatraversa (coll. M.).

Sect. Moera H. A. Adams.

42. *Tellina donacina* Lin. — Assai meno frequente della precedente; Farnesina ed Acquatraversa.

43. *Tellina distorta* Poli. — Piuttosto rara; buoni esemplari si ebbero dalle marne sabbiose della Farnesina; più rara ad Acquatraversa.

44. *Tellina pusilla* Phil.— Specie rara; poche valve dalle marne sabbiose della Farnesina.

Sect. Metis H. A. Adams.

45. *Tellina lacunosa* Chemn. = *T. tumida* Brocc. — Due valve dalle sabbie di Acquatraversa (coll. M.). I due esemplari hanno dimensioni molto minori di quelli che provengono dal pliocene di Valle Andona nell' Astigiano, e di Monte Castello nel Senese. La specie vive oggi nella Guinea.

Sect. Peronaea Poli.

46. *Tellina nitida* Poli.— Una valva dalle sabbie gialle di Acquatraversa (coll. M.) e di Malagrotta (coll. Rigacci).

47. *Tellina planata* Lin. — La specie è segnata come poco comune e rara nei cataloghi del Rayneval-Van den Hecke-Ponzi ed in quelli del Conti. Noi ne abbiamo esaminata una sola valva delle marne sabbiose della Farnesina; un'esemplare completo di questa specie trovasi nella coll. Rigacci proveniente dalle sabbie di Malagrotta.

Sect. Macoma Leach.

48. *Tellina balaustina* Lin. (*Tellina*).— Rara; alcune valve isolate nelle marne sabbiose della Farnesina.

Gen. **Arcopagia** Leach.

49. *Arcopagia ventricosa* M. de Serres (*Corbis*) = *Arcopagia corbis* Bronn (*Tellina*). — Frequente, specialmente alla Farnesina. La specie è estinta.

50. *Arcopagia crassa* Penn. (*Tellina*).— Rarissima. Una valva della Farnesina ed altra di Acquatraversa nella coll. M.

Gen. **Fragilia** Desh.

51. *Fragilia fragilis* Lin. (*Tellina*) = *Petricola ochroleuca* Lamk. — Alcune valve e due esemplari completi dalle sabbie gialle di Malagrotta (coll. M.).

Gen. **Lucinopsis** Forbes e Hanley.

52. *Lucinopsis undata* Penn. (*Venus*) = *Venus incompta* Phil. — Poche e rare valve dalle marne sabbiose della Farnesina. Un' esemplare completo (coll. M). Qualche esemplare vivente di questa specie fu raccolto da Meli sulla spiaggia di Anzio.

Gen. **Psammobia** Lamk.

Sect. Gari Schumacher.

53. *Psammobia ferroensis* Chemn. (*Tellina*). — Marne sabbiose e sabbie della Farnesina.

Sect. Amphichaena Philippi.

54. *Psammobia costulata* Turt. — Molto più rara della precedente; poche valve raccolte alla Farnesina (coll. M.)

Sect. Psammocola Blainv.

55. *Psammobia vespertina* Chemn. (*Lux*). — Un frammento, ben caratteristico, dalle sabbie gialle della Farnesina (coll. M.)

Fam. *Donacidae* Desh.

Gen. **Donax** Lin.

Sect. Serrula Chemnitz.

56. *Donax trunculus* Lin. — Conosconsi poche giovani valve di questa specie rinvenute nelle marne sabbiose della Farnesina. Ma la specie è molto frequente in valve isolate ad Acquatraversa.

57. *Donax semistriata* Poli. — Specie rara rinvenuta nelle sabbie di Acquatraversa (coll. M.).

58. *Donax venusta* Poli. — Una sola valva delle sabbie di Acquatraversa (coll. M.).

Fam. *Veneridae* Stoliczka.

Gen. **Venus** Lin.

Subg. Chione Megerle von Mühlfeldt (Sect. Chamelaea Klein).

59. *Venus verrucosa* Lin. — Di questa specie possiamo con certezza indicare una sola e giovane valva delle marne sabbiose della Farnesina. (coll. M.).

60. *Venus gallina* Lin. (= *V. senilis* Conti). — Non fu rinvenuta al monte Mario, ma non è rara ad Acquatraversa insieme ai Donax, ed a Malagrotta sulla via Aurelia. La specie allo stato vivente è abbondate sul nostro littorale.

61. *Venus ovata* Penn. — Comunissima nelle marne sabbiose e sabbie della Farnesina e Valle dell' Inferno.

Sect. Anaitis Röm.

62. *Venus casina* Lin. — Rarissima nelle marne della Farnesina. Alcuni pochi esemplari si estrassero dalle sabbie della Valle dell' Inferno (coll. M.).

63. *Venus multilamella* Lam. (*Cytherea*). — Comune. Belli esemplari si hanno dalla località fossilifera della Valle dell' Inferno.

64. *Venus lamellosa* Rayn. - Ponzi - Van den Hecke (fig. 1, 1*a*).

1854. Venus lamellosa Ponzi-Rayneval-Van den Hecke *Catalogue des fossiles du Monte Mario (près Rome)* p. 6 n. 43; pag. 15, (B).
1860. » fasciculata Reuss *Die mar. Tertiärsch. Böhm. und ihre Verst.* (Sitzb. d. k. Ak. Vol. 39 pag, 254, tav. IV, fig. 7).
1870. » fasciculata Hörnes. *Die foss. Moll. d. Tertiär-beck. v. Wien.* vol. II, pag. 128, sp. 8. tav. XIII fig. 5 a-c.
1871. » lamellosa, Conti *Il Monte Mario e i suoi fossili subapp.* pag. 28.

*V. testa transversa, convexa, subtrigona, inaequilatera, posterius obsolete angulata, costata; costis confertis adproximatis, laminaribus, erectis, ad angulum evanescentibus: area planiuscula, laevi: lunula impressa, ovato-lanceolata: margine crenulato: sinu palleali triangulari, parum profundo.* Conchiglia trasversa, convessa, subtrigona, inequilatera, leggermente angolata nel lato posteriore: rivestita di coste strette e ravvicinate, le quali nelle giovani sono smussate e angolose; ma colla età si fanno salienti, laminari, erette, per terminare tutte bruscamente sull'angolo posteriore e così lasciare l'area piana e liscia. La lunula è impressa, ovato-lanceolata: il margine finamente crenellato; il seno palleale triangolare, come in tutte le veneri, ma poco profondo. Dimensioni di un'esemplare completo, di mediocre grandezza: altezza mm. 18; larghezza mm. 21; spessore mm. 8.

Questa conchiglia tanto comune al Monte Mario fu per la prima volta pubblicata da noi nel catalogo del 1854 col nome di *Venus lamellosa*; ma in seguito nell'anno 1860 Reuss descrisse e figurò una specie rinvenuta a Rudelsdorf (Boemia) assai vicina alla *lamellosa* (1) col nome di *V. fasciculata*. Conti la registrò nelle due edizioni del suo catalogo col nome di *V. lamellosa*. Questa conchiglia a prima vista potrebbe confondersi con altre congeneri, specialmente colla *V. multilamella* Lamk. (*Cytherea*) con cui ha molta somiglianza. Però se ne distingue per i seguenti caratteri: 1° per le dimensioni minori (i più grandi esemplari hanno una larghezza di mm. 22; ed un'altezza di mm. 19); mentre i maggiori di *V. multilamella* presentano una larghezza di mm. 60 ed un'altezza di mm. 48. — 2° per avere la cerniera formata in entrambi le valve da 3 denti cardinali, mentre la *V. multilamella* presenta la cerniera del genere

(1) La *V. lamellosa* avrebbe colla *fascicularis* le seguenti differenze: forma più triangolare e trasversa, mentre la V. *fascicularis* ha contorno più circolare; 3 denti in entrambi le valve; mentre nella *fascicularis* si nota un 4° dente rudimentale nella sinistra valva, tanto che il Reuss la collocò nel genere *Cytherea*; coste più numerose e ravvicinate verso il margine ventrale della conchiglia, specialmente negli esemplari aventi la grandezza della *V. fasciculata* figurati dall' Hörnes.

*Cytherea*, formata cioè di 4 denti nella valva sinistra, dei quali uno è laterale, anteriore, isolato e collocato sotto la lunula con corrispondente fossetta nella cerniera della valva opposta. Fu appunto per il quarto dente nella valva sinistra (destra per Lamarck) che questi descrisse la *V. multilamella* nel genere *Cytherea* (1). — 3° per la forma più convessa e più triangolare, essendo le giovani *V. multilamella* di uguali dimensioni della *lamellosa*, più appiattite e con una forma più rotonda. — 4° per le coste o lamelle più ravvicinate e in numero maggiore sopra una uguale superficie. — 5° per avere nella prima età le coste laminari crasse e smussate, le quali negli esemplari adulti di *V. lamellosa* si fanno sempre più salienti e lamellari, mentre nelle giovani *multilamella* si mostrano sempre lamellari e ben distanti fra loro, specialmente nella prima età. Negli esemplari giovani di *V. multilamella*, dall'apice discendendo per una lunghezza di mm. 4 verso il bordo della conchiglia, si contano in media 7 lamelle, mentre nella *lamellosa* se ne hanno 23. In esemplari più adulti di *V. multilamella* che misurano una altezza di mm. 15, si contano 22 o 23 lamelle mentre in esemplari di uguale sviluppo della *lamellosa* se ne contano fino a 40, le ultime verso il bordo essendo molto ravvicinate fra loro. Finalmente anche l'area dorsale nella *lamellosa* è più spaziosa che nell'altra, fatto il confronto in esemplari di uguali dimensioni.

Questa specie differisce per la forma e per l'ornamentazione dalla *V. casina* Lin., *V. gallina* Lin., *V. senilis* Brocc., *V. Boryi* D' Orb., *V. guineensis* Gmel., (= *V. circinata* Born.), *V. crebrisulca* Lamk., ecc. Venne rinvenuta, secondo Hörnes, in parecchie località del bacino di Vienna, a Salles presso Bordeaux, Rudelsdorf in Boemia, Szobb presso Gran in Ungheria ed a Lapugy nel Siebenbürgen: nel pliocene di Modena, Siena e Pisa. Da un appunto manoscritto di Van den Hecke rileviamo che egli vide nel Museo di Pisa esemplari di questa specie, provenienti dalle colline Pisane (2). Però è certo che fu confusa con la *V. libellus*, giacchè Hörnes avverte di avere ricevuta col nome di *V. libellus* la forma che descriviamo dal pliocene di Modena, Siena e Pisa (3). Però, confrontando la descrizione della specie in parola (4) con quella della *V. libellus* (5) e della *fascicularis* Reuss, appare evidente che la

(1) Lamarck - *Histoire nat. des an. s. vertèbres.* 2me. édit. tom. VI, pag. 329, n. 2.

(2) La descrizione della *V. lamellosa* essendo stata stampata nel 1854, e quella della *V. fasciculata* nel 1860, avrebbe la precedenza il nome di *V. lamellosa*. Ma, esistendo già una *Cytherea lamellosa* Goldf. = *Cardinia Listeri* Strickland (cfr. Goldfuss. *Petrefacta Germaniae* 2ª ediz. 1862-63, tom. II, pag. 227, n. 4, tav. CXLIX fig. 8a, b, c), che del resto proviene dal Lias di Grubingen (Würtemberg) ed è una forma tutt'affatto diversa, potrebbe per la nostra specie accettarsi il nome datole dal Reuss.

(3) « Herr Doderlein hat diese Form mit der Bezeichnung *Venus libellus* Ponzi aus Modena « eingesendet, ebenso wurde mir dieselbe von Herrn Pecchioli aus Siena und Pisa zugeschickt, ein « Beweis, dass diese Form in den Subapenninenschichten vorkommt. Ob aber diese Form wirklich auf « *Venus libellus* Ponzi bezogen werden darf, konnte ich aus der kurzen Beschreibung dieser Art, die « in dem : *Catalogue d. foss. du Monte Mario*, enthalten ist, nicht enträthseln » (Hörnes op. cit. vol. II, pag. 129).

(4) Ponzi-Rayneval-Van den Hecke « *Catalogue des fossiles du Monte Mario* » Versailles 1854 (Ved. pag. 15 (B)).

(5) *Catalogue* cit. Ved. pag. 15 (A).

*V. lamellosa* e la *fascicularis* sono due specie vicinissime fra loro, qualora non si vogliano riunire in una sola, ma invece esse differiscono di molto dalla *V. libellus;* per lo che non può in alcun modo la *V. libellus* essere ravvicinata o riferita alla *V. fascicularis* Reuss.

La *V. lamellosa* è molto frequente al monte Mario; rinviensi in bellissimi esemplari nelle marne e sabbie della Farnesina; a Villa Madama; Valle dell'Inferno; Acquatraversa.

La specie non venne riscontrata finora vivente.

65. *V. libellus* Ponz.-Rayn.-v. d. Hec. (fig. 2) — *V. testa rotundata, globosa, concentrice costatata; costis numerosis, plano-convexis, adproximatis, interstitia quasi aequantibus; costis et interstitiis dense et concentrice lamellato-striatis; lunula cordiformi, impressa; margine interno minute crenulato; impressione musculari parva.*

« Conchiglia ricoperta di coste concentriche e strette, che la fanno comparire finissima-
« mente e regolarmente striata. Coll'ingrandimento per età si mostra rivestita di tante pic-
« cole faccette frangiate da somigliare ai fogli di un libro tagliati collo stecco, e perciò
« il nome di *libellus*. Nella prima età le coste sono più salienti, benchè sempre rico-
« perte di minute striature ma coll' aumentarsi del guscio si smussano, si arroton-
« dano e si allontanano fra loro, facendosi più apparenti. Una sola valva di questa
« specie, misurante mm. 11 in larghezza e mm. 9 in altezza, fu raccolta a Monte
« Mario dal conte di Rayneval; essa servì per descriverne la specie nel nostro cata-
« logo (1) e per farne allora un disegno, che (in scala maggiore dell'esemplare) ripro-
« duciamo tal quale nella fig. 2, avendolo per fortuna conservato presso di me.
« Il disegno non riuscì molto perfetto, specialmente nelle coste concentriche; non ho
« potuto migliorarlo, non tenendo a disposizione l'esemplare del fossile, nè possedendone altre valve » (2).

(1) *Catalogue* cit. pag. 6, n. 42 e pag. 15 (A).

(2) La descrizione della *V. libellus*, che ho fatto stampare virgolata, è riprodotta integralmente dal manoscritto del Ponzi. La fig. 2 rappresentante la specie in parola fu ricavata da un disegno, assai imperfetto, fatto molti anni indietro sulla valva posseduta dal Rayneval, con ingrandimento di oltre 3 volte l'esemplare.

Credo di potere con sicurezza identicare la *V. libellus* colla *V. praecursor* May. (= *V. Bronni* May. — Cfr. Mayer K. *Die Tertiär-Fauna d. Azoren u. Madeiren* pag. 18, n. 37 estr.). Basta infatti leggere la descrizione di questa specie, riportata nell'Hörnes (*Die foss. Moll. des Tert-Beck. von Wien* tom. II, pag. 126), confrontarla con l'altra pubblicata nel « *Catalogue des foss. d. Monte Mario* » [pag. 15 (A)] e con le superiori brevi osservazioni diagnostiche, per rilevare con facilità che la valva posseduta dal Rayneval spettava ad una giovane *V. praecursor*. Ciò resta poi confermato dall' avere io rinvenuto nelle marne della Farnesina un' altra piccola valva indubbiamente di *V. praecursor* (dimens. mm. 12 di larghezza, mm. 10 di altezza) e 2 grosse valve di questa bella specie con un giovane esemplare completo dalle sabbie gialle della Valle dell' Inferno. I due più grandi esemplari della mia collezione, hanno dimensioni ben maggiori delle figure della *V. praecursor* date dall' Hörnes (fig. 5-8 della tav. XIV), misurando l'una valva: mm. 42 di larghezza, mm. 40 di altezza, e mm. 16,5 di spessore, e l'altra: mm. 36,5 di larghezza, mm. 34,5 di altezza, e mm. 15 di spessore. Queste due valve hanno forma globosa e contorno quasi circolare, e rassomigliano per la forma globosa della conchiglia e per le coste concentriche la *Venus Herzogii* Hausm. (*Cytherea*) (cfr. Goldfuss ed. cit. tom. II pag. 228 tav. CXIX fig. 10 *a, b*). L'altro giovane esemplare della Valle dell'Inferno misura mm. 21 di larghezza e mm. 19 di altezza ed ha forma alquanto transversa, meno gonfia, del tutto

La specie non è conosciuta vivente.

66. *Venus fasciata* Donov. — Piuttosto comune nelle varie località fossilifere del Monte Mario.

### Gen. **Cytherea** Lamk.

67. *Cytherea chione* Lin. (*Venus*). — Rinvensi nelle sabbie gialle e marne sabbiose della Farnesina ed alla Valle d'Inferno, talvolta in belli esemplari.

### Gen. **Cariatis** Römer.

68. *Cariatis rudis* Poli (*Venus*). — Se ne trovano belli e grandi esemplari, taluni dei quali fanno passaggio alla *Cytherea mediterranea* Tib. — Località: Farnesina (marne sabbiose e sabbie gialle).

69. *C. islandicoides* Lamk. (*Venus*) = *V. Brocchii* Desh. (partim). — A questa specie riferiamo alcuni frammenti ritrovati dal Meli ad Acquatraversa, ed alcuni provenienti dalle sabbie gialle, che trovansi nella coll. Universitaria. Specie ritenuta estinta.

### Gen. **Circe** Schumacher.

70. *Circe minima* Montg. (*Venus*). — Piuttosto comune (Farnesina, Acquatraversa, Valle d'Inferno).

---

simile all'unica piccola valva proveniente dalla Farnesina. Questi ultimi giovani esemplari s'avvicinano per la forma alla figura 2 della *Venus libellus* e ne confermano la identità.

La *V. libellus* sembra sia stata scambiata, per mancanza di figure, con la *V. lamellosa*, come ho accennato parlando di questa specie, citando in proposito le parole dell' Hörnes. Anche Brugnône nel suo lavoro: « *Le Conchiglie plioceniche delle vicinanze di Caltanisetta* » (Boll. d. Soc. Malacologica ital. vol. VI [1880] vedi pag. 149-150 e fig 22 *a, b*), riporta inasattamente la *V. libellus* alla *V. fascicularis* Reuss, e descrive una var. *parvula*. Il Brugnone riunì le 2 specie, avendo fatto confronto dei suoi esemplari con quelli del Modenese, determinati dal Doderlein come *V. libellus*, mentre Hörnes (op. cit. t. II, pag. 129) dichiara che sono da riferirsi alla *V. fasciculata* = *V. lamellosa*.

Avendo veduto, qualche anno fa, la collezione di fossili del Monte Mario fatta dal Conti, che trovasi nel Museo di Storia naturale di Ferrara, rilevai che col nome di *V. rugosa* (segnata come rarissima nel catalogo Conti), era indicata una valva della *V. praecursor*.

Pantanelli e De Stefani citano la *V. libellus* come fossile del Senese (Ghiaie del Riluogo e Larniano). (Pantanelli e De Stefani « *Moll. plioc. d. dintorni di Siena* ». Boll. d. Soc. Malacol. ital. vol. IV (1878), pag. 54. — Pantanelli D. « *Aggiunte e correzioni al catalogo dei molluschi plioc. dei dintorni di Siena* ». Boll. cit. vol. X (1884) pag. 11).

Da un'appunto manoscritto del Van den Hecke rilevo che egli vide nel museo di Pisa esemplari della *V. libellus* trovati nel pliocene di Volterra e di Bologna. Io ne ho veduto un' esemplare proveniente dalle argille plioceniche di s. Colombano al Lambro (circond. di Lodi).

La *V. Bronni* May. si rinvenne rara a Forchtenau, Grussbach nel bacino di Vienna, a s. Clement in Turena, Les Barritz presso Dax ed a Lapugy nel Siebenbürgen (Hörnes); presso Pinheiros nell' isola di Santa Maria (Azzorre), a Pico da Juliana nell'isola di Porto Santo nel gruppo di Madera (Mayer).

Gen. **Tapes** Megerle von Mühlfeldt.

Sect. Amygdala Römer.

71. *Tapes caudata* D'Anc. — Molto frequente in grossi esemplari dalle sabbie gialle di Malagrotta. Meli la ritrovò pure nelle argille della Magliana e nelle superiori sabbie di Ponte Galera. Specie non conosciuta vivente.

72. *Tapes decussata* Lin. (*Venus*). — Rarissima; alcuni esemplari dalle sabbie gialle di Malagrotta (coll. M.).

73. *Tapes aurea* Gml. (*Venus*). — Come la precedente.

Sect. Parembola Römer.

74. *Tapes edulis* Chemn. (*Venus*). — È la specie più frequente di questa sezione. (Farnesina, Valle d'Inferno).

75. *Tapes Olivi* Menegh. — Rara molto. Qualche esemplare da Malagrotta. Non crediamo che la specie sia stata riscontrata vivente.

Gen. **Dosinia** Scopoli.

76. *Dosinia lincta* Pultn. (*Venus*). — Specie comune e della quale si hanno splendidi esemplari dalla marne sabbiose della Farnesina.

77. *Dosinia exoleta* Lin. (*Venus*). — Assai rara; poche valve da Acquatraversa nella coll. Meli.

78. *Dosinia lentiformis* Sow. (*Venus*). — Poche valve dalle sabbie di Acquatraversa. La specie si rinviene anche nel Red Crag (Wood), ed è riguardata come estinta.

79. *Dosinia* (cfr. *D. discus* Reeve). — Nella coll. Meli si hanno alcune grandi valve di Dosinia rinvenute ad Acquatraversa, che per la *facies* generale furono riferite con dubbio a questa bella specie, la quale è vivente nell'Atlantico.

Ord. Siphonida.

II. Integropalliata.

Famil. *Cyprinidae* Lamk. (emend. Gray).

Gen. **Cyprina** Lamk.

80. *Cyprina islandica* Lin. (*Venus*). — Frequente alla Farnesina, specialmente nelle sabbie gialle. Molto più rara nelle sottostanti marne sabbiose grigie. Vivente nei mari della zona nordica. Meli ritiene che la *Cyprina* del Monte Mario non possa identificarsi colla *C. islandica* (Lin.) e perciò costituisca specie diversa da questa.

Gen. **Isocardia** Lamk.

81. *Isocardia cor* Lin. (*Chama*). — Rara; buoni esemplari si ebbero dalle sabbie della Valle dell'Inferno.

Famil. *Cyrenidae* H. e A. Adams.

Gen. **Corbicula** Megerle von Mühlfeldt.

82. *Corbicula fluminalis* Müll. (*Tellina*) = *Cyrena consobina* Caill. — Poche valve, per lo più logorate, ad Acquatraversa. Rinvenuta anche nelle marne tripolacee d'acqua

dolce quaternarie della Sedia del Diavolo sulla via Nomentana (1) e nelle marne parimenti quaternarie del Monte Verde (2). — Vive ora principalmente nel Nilo; trovasi anche nell' Eufrate (Niebuhr); nei corsi d'acqua del Libano (Bellardi), nella Georgia e nella Persia (Eichwald) (3).

### Gen. **Cardium** Lin.

#### Sect. Acanthocardia Gray.

83. *Cardium hians* Brocc. — Loc. Farnesina, Villa Madama; meno frequente Valle dell' Inferno e Acquatraversa.

84. *Cardium echinatum* Lin. — Buoni esemplari si hanno dalle sabbie della Valle dell'Inferno, ove è frequente; più raro alla Farnesina.

85. *Cardium Deshayesii* Payr. — Dalle marne sabbiose della Farnesina si estrassero magnifici esemplari di questa specie, conservanti le papille tubulose, specialmente al lato anteriore. Rinviensi anche nelle sabbie della Valle dell'Inferno.

(1) Meli R., *Ulteriori notizie ed osservazioni sui resti fossili rinvenuti nei tufi vulcanici della prov. di Roma* (Boll. R. Com. Geol. Anno 1882 pag. 272: Ved. n. 10 nella nota in fondo alla pagina).

(2) Clerici E., *Sopra alcune formazioni quaternarie dei dintorni di Roma* (Boll. R. Com. Geol. 1885 pag. 377 e 384).

(3) Nelle sabbie gialle di Acquatraversa la *C. fluminalis* trovasi in valve logorate, unita alle specie littorali marine (*Donax trunculus* Lin., *Cardium edule* Lin., *Mactra corallina* Lin., *Solen*, *Tellina*, ecc.). La presenza di tale specie, d'accordo con i ciottoli, che si trovano frammisti alle sabbie, e colla *facies* dei fossili che l'accompagnano (vi rinvenni anche un esemplare frammentario di *Limnaea*), indicherebbero in quel punto una spiaggia, nei pressi della quale si versasse nel mare un corso d'acqua.

Anche in Sicilia, come pure in Inghilterra nel Coralline Crag di Gedgrave [Ved. Wood S. W. *A monogr. of the Crag Moll.* Vol. I, p. 109. — Whitaker nel *Quart. Journ. of the Geol. Soc.* Vol. XXXVIII, n. 152, pag. 745. — Wood S. V. jun. *The newer pliocene period in England.* Part. I (*the Red and fluvio-marine Crag* ecc.) nel *Quart. Journ. of the Geol. Soc.* Vol. XXXVIII, n. 152, pag. 697], a Kelsea Hill (*Q. J.* vol. cit. pag. 744), Boulder-clay presso Hull (Ved. Prestwich « *On the occurence of the Cyrena fluminalis together with marine shells of recent species in beds of sand and gravel over beds of Boulder-clay near Hull* etc. » nel *Quart. Journ. of the Geolog. Soc.* November 1861, pag. 446 a 456) la specie è accompagnata da fossili marini. Philippi la rinvenne appunto in Sicilia nell'argilla marina di Cefali presso Catania e la descrisse col nome di *Cyrena Gemmellarii* (Philippi *Enum. moll. Sic.* vol. I, pag. 39, Tab. IV, fig. 3 *a*, *b* e vol. II, pag. 31). L'argilla di Cefali, secondo il march. A. De Gregorio sarebbe post-pliocenica e sincrona coi depositi di Monte Pellegrino e Ficarazzi presso Palermo.

Le valve di Acquatraversa della mia collezione, sono da riportarsi alla forma tipica (Ved. Dollfus *Le terrain quatern. d'Ostende et la Corbicula fluminalis*, Mém. d. la Soc. r. Malac. de Belgique. Tom. XIX, 1884, fig. 3, 6-8, 20, 23, 27 della tav. I, II) ed alla var. *trigonula* Wood. (Dollfus, Mem. cit. fig. 1, 2, 9, 16-19 delle tav. I e II e Wood. *A monogr. of the Crag Moll.*, vol. II pag. 104, tav. XI, fig. 15 *c*).

La più grande valva della mia collezione misura mm. 18,5 di altezza, mm. 19 di larghezza e mm. 6 di spessore nella valva.

La *C. fluminalis* fu rinvenuta fossile in molte località, in terreni prevalentemente quaternarî. Su questa specie si può consultare la importante Memoria di Dollfus sopra citata.

86. *Cardium aculeatum* Lin. — Grandi valve, molto ben conservate cogli aculei, si estrassero alla Farnesina, sia dalle sabbie gialle, che dalle marne sabbiose grigie.

87. *Cardium Bianconianum* Cocc. — Pochi esemplari dalla Farnesina; una valva da Acquatraversa. Specie non riscontrata allo stato vivente,

88. *Cardium erinaceum* Lin. — Rarissimo. Qualche valva dalla Farnesina, una dalla Valle dell'Inferno e da Acquatraversa. Belli esemplari vivi furono dragati nella rada di Anzio.

89. *Cardium multicostatum* Brocc. — Non comune; Località: Farnesina (sabbie e marne sabbiose); Valle dell'Inferno (sabbie). Specie finora non riscontrata vivente.

90. *Cardium hirsutum* Bronn. = *C. Metaxà* Conti. = *C. scabrum* Ponzi-Rayn. (n. Phil.). — Rarissimo; pochissime valve e frammenti dalle marne sabbiose della Farnesina. La specie non venne riscontrata finora, come vivente.

91. *Cardium minimum* Phil. — Abbondante, specialmente alla Farnesina.

92. *Cardium roseum* Lamk. — Piuttosto raro, specialmente alla Farnesina.

Sect. Cerastoderma Poli.

93. *Cardium paucicostatum* Sow. = *C. ciliare* auct. — Assai raro. Gli esemplari di questa specie provengono dalla Farnesina.

94. *Cardium edule* Lin. — Si rinviene ad Acquatraversa e più frequentemente a Malagrotta, ove offre parecchie varietà.

95. *Cardium papillosum* Poli. — Abbondante. Loc.: Farnesina, Acquatraversa, Villa Madama, Valle dell'Inferno.

96. *Cardium tuberculatum* Lin. — Un frammento alla Farnesina; una valva dalle sabbie di Valle dell'Inferno; molte valve dalle sabbie di Acquatraversa, ove trovasi associato al *Donax trunculus* Lin.

Gen. **Laevicardium** Swainson.

97. *Laevicardium pectinatum* Lin. (*Cardium*). — Rarissimo; se ne conoscono pochi esemplari e qualche frammento dalle sabbie gialle e grigie della Farnesina. La specie è vivente nell'Oceano Indiano.

98. *Laevicardium oblongum* Chemn. (*Cardium*). — Comune ed in belli esemplari Loc.: Farnesina, Villa Madama, Acquatraversa; meno frequente Valle dell'Inferno.

99. *Laevicardium norvegicum* Spengl. (*Cardium*) — Non frequente: località della precedente specie.

Fam. *Lucinidae* Desh.

Gen. **Diplodonta** Bronn.

100. *Diplodonta rotundata* Montg. (*Tellina*). — I più belli esemplari si hanno dalle sabbie grigie e gialle della Farnesina.

101. *Diplodonta dilatata* Wood (non Phil.). — Più rara della precedente; un esemplare da Acquatraversa. La specie si rinviene nel Crag inglese ed è considerata estinta.

102. *Diplodonta apicalis* Phil. (*Tellina*). — Rara nelle marne sabbiose della Farnesina.

103. *Diplodonta astartea* Nyst (*Lucina*). — Alcune valve della Farnesina ed una dalle sabbie gialle di Acquatraversa. La specie è ripetuta estinta.

Gen. **Axinus** Sow.

104. *Axinus flexuosus* Montg. (*Tellina*). — Rarissimo; poche valve. Specie citata anche dal Jeffreys come fossile al Monte Mario (1).

105. *Axinus transversus* Bronn. (*Lucina*)—Rara: marne sabbiose della Farnesina.

106. *Axinus Croulinensis* Jeffr. — Alcune valve di questa piccola specie. Marne sabbiose della Farnesina.

Gen. **Megaxinus** Brugnone.

107. *Megaxinus rostratus* Pecch. (*Lucina*). — Sabbie della valle dell'Inferno; non rara. Specie estinta.

Gen. **Lucina** Brug.

108. *Lucina borealis* Lin. (*Venus*). — Gli esemplari delle marne e sabbie della Farnesina sono in generale di mediocri dimensioni; invece quelli provenienti dalle sabbie gialle della Valle dell'Inferno hanno dimensioni maggiori, raggiungendo una larghezza di mm. 38 ed un' altezza di mm. 34.

Gen. **Myrtea** Turt.

109. *Myrtea spinifera* Mtg. (*Venus*). — Non frequentissima nelle sabbie gialle e grigie del Monte Mario, ad Acquatraversa, ed alla Valle dell'Inferno.

110. *Myrtea lactea* auct. (*Lucina*) = *L. leucoma* Turt. — Questa specie è frequente nelle sabbie gialle di Malagrotta sulla Via Aurelia; una valva logorata da Acquatraversa; non si conoscono esemplari provenienti dalle altre località fossilifere del Monte Mario.

Gen. **Loripes** Poli.

111. *Loripes divaricatus* Lin. (*Tellina*) = *Lucina commutata* Phil. — Non frequente alla Farnesina; una valva da Acquatraversa; la specie è vivente sul littorale romano di Anzio.

Fam. *Erycinidae* Desh.

Gen. **Erycina** Lamk. emend. Desh.

112. *Erycina pusilla* Phil. — Alcune valve dalle marne sabbiose della Farnesina.

Gen. **Kellia** Turton.

113. *Kellia suborbicularis* Montg. (*Mya*). — Poche valve delle sabbie gialle.

(1) Jeffreys in Prestwich, *On the structure of the Crag-beds of Norfolk and Suffolk with some observat. on their organic remains.* (Quart. Journ. of the Geol. Soc. 1871 pag. 138 e 482).

Gen. **Lepton** Turton.

114. *Lepton squamosum* Montg. (*Solen*).

115. » *subtrigonum* Jeffr.

Rare valve di queste due specie del giacimento fossilifero della Farnesina.

Gen. **Montacuta** Turton.

116. *Montacuta bidentata* Montg. (*Mya*). — Qualche valva della Farnesina. Molto rara.

117. *Montacuta ferruginosa* Montg. (*Mya*). — Rara come la precedente.

Fam. *Galeommidae* Gray.

Gen. **Scintilla** Desh.

118. *Scintilla recondita* Fischer. — Alcune valve delle marne sabbiose della Farnesina.

Fam. *Chamidae* Lamk.

Gen. **Chama** Lin.

119. *Chama gryphoides* Lin. = *Ch. asperella* Lamk (1). — Specie non rara alla Farnesina (marne e sabbie). Belli e completi esemplari, di perfetta conservazione, trovansi nelle sabbie di Valle dell'Inferno.

120. *Chama squamata* Desh.— Frequente; i migliori esemplari, completi dalle loro due valve, si ebbero dalla Farnesina (marne e sabbie). Valle dell'Inferno (sabbie). Deshayes riferì a questa specie gli esemplari di Chama del Monte Mario inviategli dal

(1) È singolare che nella maggior parte dei precedenti cataloghi del Monte Mario sia segnata la *Chama gryphina* Lamk., che è sinistrorsa e della quale non rinvenni mai, nè vidi nelle varie collezioni di fossili del Monte Mario alcun' esemplare. Nel « *Catalogue des foss. du Monte Mario par Rayneval* etc. » è segnata la *Ch. gryphina* Lamk. come comune (Ved. pag. 8, n. 82) e parimenti la stessa specie è riportata nella « *Cronaca subapennina o abbozzo d'un quadro generale del periodo glaciale* » (Ved. pag. 20 n. 56 e 24 n. 96), nelle due edizioni del Catalogo Conti; nella lista di fossili del Monte Mario data dal Mantovani « *Descr. geol. d. Camp. Romana* » 1875 pag. 45 n. 168. — « *Sulla distribuz. generale della fauna foss. nel mare pliocen.* » 1868 pag. 14, ecc. Nella collezione del Monte Mario del Rigacci erano determinati come *Ch. gryphina* alcuni esemplari di *Ch. squamata* Desh. e, in seguito alle mie osservazioni, fu tolta la *Ch. gryphina* dalla lista dei fossili del Monte Mario di quella collezione, che venne pubblicata nel 1882. Della *Ch. squamata* Desh. alcuni esemplari converrebbero esattamente con la *Ch. dissimilis* Bronn [Bronn « *Italiens Tertiär-gebilde und d. organ. Einschlüsse* » 1831 p. 111 n. 641. — Philippi « *Enum. moll. utriusq. Sicil.* » Vol. I, pag. 69 n. 3, Tav. V. fig. 15 *a*, *b*; Vol. II. pag. 50 n. 3]; altri hanno l'apice della valva inferiore spirato e molto allungato a guisa di corno e ricordano la *Ch. unicornis* Lamk. la quale è generalmente riguardata come una semplice var. della *gryphoides*. Però questi esemplari sono, per la loro grandezza (alcuni hanno dimensioni doppie delle figure della *Ch. unicornis* date dal Chemnitz « *Neues syst. Conchyl. Cab.* » Tom. VII, Tav. 52, fig. 519, 520, dal Gualtieri « *Index test. Conch.* » Tab. 101. fig. F. G. ecc.), per la *facies* della conchiglia e per l'ornamentazione, da riportarsi alla *Ch. squamata*, della quale possono considerarsi varietà.

Van den Hecke e li paragonò con quelli tipici riportati dalla Morea e figurati nella « *Expédition scientifique de Morée* » (Tom. III). La specie è ritenuta estinta.

Fam. *Astartidae* Gray.
(*Carditae* Desh.).

Gen. **Cardita** Brug.

121. *Cardita sulcata* Brug. — Specie assai comune e frequente nelle sabbie; meno abbondante nelle marne della Farnesina.

122. *Cardita intermedia* Brocc. (*Chama*). — Due valve provenienti dalle sabbie gialle di Acquatraversa.

123. *Cardita pectinata* Brocc. (*Chama*). — Sabbie gialle d'Acquatraversa, ove rinviensi insieme ai Donax.

Queste due specie di Cardita non sono conosciute viventi.

124. *Cardita corbis* Phil. — Frequente nelle sabbie gialle e marne della Farnesina.

125. *Cardita aculeata* Poli. — Pochi esemplari delle marne e sabbie della Farnesina (coll. M.).

Gen. **Mytilicardia** Blainv.

126. *Mytilicardia calyculata* Lin. (*Chama*). — Parecchie valve delle sabbie grigie della Farnesina; alcune di esse fanno passaggio alla *Myt. sinuata* (Lamk.) che può considerarsi come una var. della *calyculata*.

Gen. **Astarte** Sow.

127. *Astarte fusca* Poli. (*Tellina*). — Frequentissima nelle sabbie gialle; meno comune nelle marne della Farnesina; se ne ha una varietà a margine integro.

128. *Astarte triangularis* Montg. (*Mactra*). — Sabbie gialle e marne sabbiose della Farnesina.

Ord. Asiphonida.

I. Homomyaria.

Famil. *Arcidae* Lamk. — Subfam. *Arcinae* H. e A. Adams.

Gen. **Arca** Lin.

129. *Arca tetragona* Poli. — Specie frequentissima alla Farnesina (marne e sabbie); rinviensi anche nelle sabbie della Valle dell'Inferno.

130. *Arca imbricata* Poli (non Brug.) — Una sola valva, proveniente dalle sabbie gialle di Acquatraversa (coll. M.).

Gen. **Barbatia** Gray.

131. *Barbatia barbata* Lin. (*Arca*). — Specie assai rara al Monte Mario; una valva delle sabbie grigie della Farnesina, altra delle sabbie gialle di Acquatraversa ed una terza di Valle dell'Inferno (coll. M.).

Sect. Venusta Gray.

132. *Barbatia lactea* Lin. (*Arca*). — Specie che rinviensi piuttosto con frequenza nelle marne e nelle sabbie gialle; Farnesina, Villa Madama, Acquatraversa e Valle dell'Inferno.

Gen. **Anomalocardia** Klein.

133. *Anomalocardia diluvii* Lamk. (*Arca*). — Rarissima al Monte Mario: una valva alla Farnesina; una valva nelle sabbie gialle di Acquatraversa. Invece è abbondantissima nelle sabbie gialle della Valle dell'Inferno, ove si rinvengono esemplari completi e molto grandi.

134. *Anomalocardia pectinata* Brocc. (*Arca*) var. [= *A. Breislaki* Phil. (n. Baster.)].— Frequente nelle sabbie gialle di Malagrotta, ove in generale le valve sono alterate e non presentano buona conservazione. Specie non conosciuta vivente.

Gen. **Soldania** Pantanelli e De Stefani

135. *Soldania mytiloides* Brocc. (*Arca*). — Frequente nelle sabbie gialle; (Farnesina, Acquatraversa) più rara nelle sottostanti marne sabbiose. Anche questa specie non è conosciuta vivente.

Geu. **Cucullaea** Lamk.

136. *Cucullaea*(?)*pectunculoides* Scacc. (*Arca*). — Qualche rara valva nelle sabbie gialle della Farnesina, Valle dell'Inferno e Acquatraversa.

Subfam. *Pectunculinae* Ad.

Gen. **Pectunculus** Lamk.

(Sect. Axinaea Poli)

137. *Pectunculus pilosus* Lin. (*Arca*). — Raro: nelle marne e sabbie della Farnesina; una grossa valva dalle sabbie d'Acquatraversa (coll. M.).

138. *Pectunculus bimaculatus* Poli (*Arca*). = *P. glycimeris* auct. (n. Lin).= *P. undatus* Ponzi-Rayn. (n. Lin.). — Raro: belli esemplari dalla Farnesina (marne e sabbie); d'ordinario si rinviene in valve isolate e logorate.

139. *Pectunculus violacescens* Lamk. — È una delle specie comuni al Monte Mario; trovasi alla Farnesina sia nelle sabbie che nelle marne, ad Acquatraversa, ecc. Alla sommità del Monte Mario presso la chiesa del Rosario rinviensi questa specie in esemplari spatizzati, sui quali il Brocchi fondò il *Pectunculus romuleus* Brocc. (*Arca*).

140. *Pectunculus insubricus* Brocc. (*Arca*) (non Weink.) (fig. 3, 3ª). — È uno dei fossili più comuni al Monte Mario e si rinviene in tutte le località, ove si mostra quella zona fossilifera. É una conchiglia assai importante per le modificazioni, che assume coll'età. Ne abbiamo studiato lo sviluppo su più di un centinaio d'individui di tutte età. Allorchè la conchiglia è molto giovane ha forma orbicolare; il suo contorno è pressochè circolare; è equilatera; è subauriculata; nel bordo interno presenta una dentellatura regolare ed assai marcata. La superficie esterna delle valve è liscia; appena sono indicate le linee concentriche di accrescimento: un poco più sono accennate le linee raggianti, che decussano le strie di accrescimento. In questo stato la conchiglia venne descritta e

figurata dal Brocchi col nome di *Arca nummaria* (non Lin.) (1). Ma col crescere si fa sempre meno sentito l'angolo formato dall'unione laterale dell'area cardinale col bordo della conchiglia scomparendo in tal modo le prominenze auricolari; le valve si gonfiano e divengono semi-globose; le strie d'accrescimento si fanno ben marcate specialmente verso il lato posteriore delle valve, che così in questa parte si mostrano rugose, mentre compaiono più accennati i solchi raggianti: la dentellatura del margine si fa più grossa, ma meno regolare. Così si ha la forma descritta dal Brocchi col nome di *Arca inflata* (2). Però col corrugamento della superficie posteriore della conchiglia, comincia a comparire un'angolosità nella parte postica delle valve, che tende a toglierle l'aspetto equilatere. Quest'angolo si fa sempre più apparente coll'ingrandimento del guscio e dà alla conchiglia una forma alquanto obliqua ed inequilatera, tanto che il suo contorno non è più circolare, ma angoloso nel lato posteriore, rendendo la conchiglia più alta che larga. La superficie esterna diviene sottilissimamente striata e decussata per le linee rugose d'accrescimento e per le strie raggianti. Nella cerniera si cancellano i denti nel mezzo per ingrandimento dell'area del ligamento. La dentellatura si oblitera, specialmente nel lato posteriore, che spesso si mostra col bordo acuto. Le impressioni muscolari si fanno sempre più grandi ed appariscenti. In tal modo si giunge al *Pectunculus insubricus* Brocc. (*Arca*).

Peraltro non si arrestano qui le modificazioni di questa conchiglia, giacchè offre alcune notevoli varietà, che è bene avvertire. Qualche volta l'angolo è così prolungato da rendere la conchiglia assai ovoidale ed obliqua in modo che Conti la giudicò una specie distinta dandole il nome di *P. trasversus*. Ma quello che più importa di conoscere è che restando fino ad un certo tempo globosa, il margine posteriore col crescere si fa ondulato producendo due rilievi corrispondenti a due insenature, mentre si viene cancellando la corrispondente crenellatura fino a che si oblitera del tutto restando il margine liscio. Questo processo di svolgimento non è proprio di tutti gl'individui, trovandosi di rado la curvatura prodotta sul margine da quelle onde; queste sono più o meno intense ma qualche rara volta così salienti da rendere l'aspetto della conchiglia singolare. Di questa varietà Conti fece una specie nuova, che chiamò *P. bisundatus*, il quale infine altro non è che una varietà del *P. insubricus*.

Diamo nelle figure (3, 3a) il disegno di una valva destra del *Pectunculus insubricus* (tipo) scegliendo un'esemplare ben conservato e sviluppato.

Ecco le dimensioni dei maggiori esemplari di tale specie, esistenti nella collezione Meli, provenienti tutti dalle marne superiori della Farnesina:

| | Larghezza | Distanza dall'apice all'estremità dell'angolo del bordo ventrale. | Spessore massimo a valve chiuse. |
|---|---|---|---|
| (forma inflata) | mm. 79 | mm. 77 | mm. 54 |
| idem | » 80 | » 84 | » 59 |
| (forma insubrica) | » 55 | » 55 | » 47 |
| idem | » 70 | » 74 | » 53 |
| idem | » 72 | » 78 | » 54 |
| idem | » 67 | » 76 | » 62 |
| (forma bis-undata) | » 76 | » 78 | » 65 |

(1) Brocchi G. B. *Conch. foss. subap.* edizione 1814. Tom. II pag. 483 n. 12. Tav. XI fig. 8.
(2) Brocchi, Op. cit. Tom. II pag. 494 n. 20. Tav. XI fig. 7.

I più belli esemplari, perfettamente conservati, dalle valve unite, mostranti ancora traccia del ligamento tendinoso sull'area, si rinvengono nelle marne sabbiose della Farnesina; ritrovansi anche nelle sabbie gialle della Farnesina, di Villa Madama, di Acquatraversa e di Valle dell'Inferno.

La specie non è conosciuta vivente (1).

141. *Pectunculus obliquatus* Nob. (fig. 4, 4a). — *Testa obliqua, transversa, parum tumida, aequivalvis, inaequilatera, subaurita, lineis transversis undulatis superficialibus; lineis radiantibus vix conspicuis, distantibus; margine cardinali curvo, ventrali interno late crenulato.* Conchiglia trasversa obliqua più larga che alta, meno gonfia delle altre congeneri, a valve eguali, inequilaterali, non simmetriche per la loro obliquità. Gli omboni sono prominenti; la superficie esterna è liscia con strie raggianti numerose e distanti; quelle di accrescimento, minute ed alquanto ondulate sul margine ventrale; il margine cardinale curvo, subauricolato con 4-5 grossi denti laterali; l'area del ligamento, piuttosto spaziosa, è scavata da 4 solchi bene marcati angolosi sotto l'apice; mancano sempre i denti nel mezzo dell'area, perchè obliterati dall'accrescimento dell'area ligamentare; il bordo interno delle valve è largamente crenellato; i solchi in corrispondenza delle dentellature non s'arrestano sulla linea dell'impressione palleale, ma proseguono con intensità decrescente formando delle costicine appena accennate nella superficie interna delle valve: e sfumano circa l'altezza delle impressioni muscolari.

Ecco le dimensioni di alcuni esemplari provenienti dalla Farnesina:

| | | |
|---|---|---|
| larghezza mm. 53 | altezza mm. 47 | spessore della valva mm. 14 |
| » » 57 | » » 50 | » » » » 16 |
| » » 36 | » » 35 | » a valve chiuse » 26 |
| » » 47 | » » 40 | » » » » 28 |
| » » 48 | » » 42 | » » » » 27 |
| » » 51 | » » 43 | » » » » 27 |

Mostra simiglianza col *P. violacescens* Lamk. ma se ne distingue pei suoi caratteri di obliquità trasversa; perchè è più sottile e meno gonfia; per il minor numero di denti e per la loro grossezza. L'area è più larga, le strie della superficie più marcate e distanti (2).

Specie estinta. Fossile non comune al Monte Mario; fu rinvenuta alla Farnesina (marne e sabbie) e ad Acquatraversa.

## Gen. **Nucinella** S. Wood.

142. *Nucinella ovalis* S. Wood (*Pleurodon*) = *N. miliaris* Wood (n. Desh.) = *Nuculina Alibrandi* Conti. — Rarissima. Due valve delle sabbie di Valle dell'Inferno (coll. Martinetti); un'esemplare completo delle sabbie gialle della Farnesina (coll. M.).

(1) Weinkauff (Ved. « *Die Conchyl. des Mitt.* » Vol. I, pag. 187 sp. 3) riunì a torto il *P. violacescens* Lamk., vivente nel Mediterraneo, al *Pectunculus insubricus* (Brocc.), specie che non venne riscontrata ancora vivente.

(2) Alcuni esemplari delle sabbie di Acquatraversa hanno grandissima analogia col *P. oblongus* Pecchioli (in sch.), di cui vidi esemplari provenienti dalle sabbie gialle di M. Castello (Prov. di Siena), così classificati.

Specie rinvenuta nel Crag inglese (Ramsholt, Sutton), nell'Astiano di Calatabiano (Seguenza). Hörnes la mette pure nel bacino di Vienna (Forchtenau), e Reuss a Rudelsdorf in Boemia ed a Lapugy nel Siebenbürgen; ma Seguenza (1) avverte che la specie del bacino di Vienna è da separarsi dalla *N. ovalis*.

Specie non conosciuta allo stato vivente.

### Gen. **Limopsis** Sassi.

143. *Limopsis anomala* Eichw. (*Pectunculus*) = *L. pygmaeus* Phil. (*Pectunculus*) — Quasi sempre in valve isolate e logorate. Gli esemplari di buona conservazione sono rari alla Farnesina (marne e sabbie); più comuni nelle sabbie della Valle dell'Inferno. — La specie non è conosciuta vivente.

### Gen. **Nucula** Lamarck.

144. *Nucula sulcata* Bronn. — Non molto frequente al Monte Mario. Si rinviene anche nelle marne del Monte Vaticano.

145. *Nucula placentina* Lamk. — Specie comune nelle sabbie e nelle marne sabbiose superiori della Farnesina. Bellissimi esemplari colle due valve chiuse e perfettamente conservate si rinvengono nelle sabbie della Valle dell'Inferno. Specie estinta.

146. *Nucula nucleus* Lin. (*Arca*) = *N. margaritacea* Lamk. — Specie frequente nelle marne superiori e nelle sabbie gialle (Farnesina, Villa Madama, Valle dell'Inferno, Acquatraversa).

147. *Nucula Jeffreysii* Bell. = *N. rugosa* Conti. — Il Conti con ragione ritenne come nuova questa graziosa specie e la descrisse nel suo catalogo col nome di *N. rugosa*. Il Bellardi nella monografia delle Nuculidi (2) riconobbe che realmente si trattava di nuova specie e la descrisse di nuovo e figurò col nome di *N. Jeffreysii*, non conservandole il nome impostole dal Conti, giacchè altra specie precedentemente era stata indicata dal Buckland con tal nome (3). La specie non venne riscontrata vivente.

148. *Nucula decipiens* Phil. — Piuttosto scarsa; pochi esemplari dalle marne della Farnesina, i quali convengono più con la forma figurata dal Philippi, che con le figure date da Wood col nome di *N. tenuis* Montg. (*Arca*). Del resto, queste due specie sono tra loro assai vicine. Il march. di Monterosato ha staccato la specie esistente nel Mediterraneo dalla *N. tenuis* vivente nei mari Nordici e l'ha riferita alla *N. aegeensis* Forb., la quale ultima è dal Seguenza giudicata una varietà della *N. decipiens* Phil.

### Gen. **Leda** Schumacher

149. *L. commutata* Phil. = *L. minuta* Brocc. (*Arca*). — Specie comunissima nelle varie località fossilifere del Monte Mario.

(1) Seguenza G., *Nuculidi terziarie rinvenute nelle prov. merid. d'Italia*. Atti della r. Acc. dei Lincei, serie 3ª, Mem. d. Cl. di sc. fis. e nat. vol I, 1877 (vedi pag. 10, n. 1 dell'estr.).

(2) Bellardi, *Monografia delle Nuculidi trovate finora nei terreni terziarî del Piemonte e della Liguria* 1875 (Ved. p. 12, n. 11 e fig. 6a, b).

(3) Bronn, *Index palaeontologicus* pag. 826.

150. *Leda consanguinea* Bell. — Meno frequente della precedente. Si potrebbero distinguere due varietà; l'una a coste molto prominenti, e l'altra a coste minutissime tanto che ad occhio non munito di lente sembra liscia e lucente.

Si rinviene alla Farnesina (rara) ed alla Valle dell' Inferno. Specie estinta.

Sect. Lembulus Leach

151. *Leda pella* Lin. (*Arca*) = *N. emarginata* Lamk. — Non molto frequente nelle sabbie marnose grigie della Farnesina e nelle sabbie gialle immediatamente sovrastanti. Alquanto più frequente ed in esemplari di forti dimensioni (fino a 13 mm. di larghezza, 7 mm. circa di altezza e 6 di spessore) nelle sabbie gialle alla base delle colline nella valle di Acquatraversa.

Sect. Jupiteria Bell.

152. *Leda concava* Bronn. *var. A.* Bell. — Rara: pochi esemplari, logorati, nelle marne e sabbie della Farnesina, tutti riferibili alla *var. A.* del Bellardi. Forma non riscontrata vivente.

Gen. **Yoldia** Möll.

153. *Yoldia nitida* Brocc. (*Arca*). — Il Conti mise questa specie nei suoi cataloghi come rara: Meli dichiara di non averne alcun' esemplare nella sua collezione e che avendo osservato gli esemplari della coll. Conti conservata nel Museo di storia naturale in Ferrara, questi non sono da riferirsi a tale specie, ma che invece spettano alla *Leda concava* Bronn. *var. A.* Bell. D'altra parte avverte che nella coll. Rigacci si hanno due esemplari, come provenienti dal Monte Mario, che sono con certezza da riportarsi alla *Y. nitida*. Specie non conosciuta vivente.

Nelle 153 sopra indicate specie si contano 30 specie estinte. Queste sono le seguenti: *Clavagella bacillaris* Desh., *Cardilia Michelotti* Desh., *Pholadomya alpina* Math., *Arcopagia ventricosa* (M. de Serres), *Venus lamellosa* Ponz.-Rayn., *Venus libellus* Ponz.-Rayn., *Venus islandicoides* Lamk., *Tapes caudata* D' Anc., *Tapes Olivi* Menegh., *Dosinia lentiformis* (Sow.), *Cardium Bianconianum* Cocc., *Cardium multicostatum* Brocc., *Cardium hirsutum* Bronn, *Diplodonta dilatata* Wood, *Diplodonta astartea* (Nyst), *Megaxinus rostratus* (Pecch.), *Chama squamata* Desh., *Cardita intermedia* (Brocc.), *Cardita pectinata* (Brocc.), *Anomalocardia pectinata* (Brocc.) var., *Soldania mytiloides* (Brocc.), *Pectunculus insubricus* (Brocc.), *Pectunculus obliquatus* Ponz.-Rayn.-v. d. Hec., *Nucinella ovalis* (Wood), *Limopsis anomala* (Eichw.), *Nucula placentina* Lamk., *Nucula Jeffreysii* Bell., *Leda consanguinea* Bell., *Leda concava* Bronn var., *Yoldia nitida* (Brocc.).

Vi si riscontrano poi 6 specie emigrate, viventi cioè attualmente in altri bacini fuori del Mediterraneo; tali sono la *Lutraria intermedia* Sow., *Cyprina islandica* (Lin.), *Tellina lacunosa* Chemn., *Dosinia discus* Reeve, *Laevicardium pectinatum* (Lin.), e la *Corbicula fluminalis* (Müll.). Le due prime specie vivono ora nei mari Nordici.

Le rimanenti 117 specie si conoscono tutte viventi nel Mediterraneo.

Peraltro, siccome le specie enumerate rappresentano soltanto una parte della

fauna fossile del Monte Mario e dintorni, così non è rigoroso di venir ora ad alcuna conclusione sul rapporto tra le specie viventi ed estinte, e conseguentemente sul piano, al quale devono essere riferiti quegli strati fossiliferi. Tuttavia, tenuto conto che nelle specie citate si riscontra il 19 per 100 di forme estinte e osservata la *facies* generale della fauna, gli strati fossiliferi del Monte Mario sarebbero da collocarsi nella parte superiore del pliocene recente.

---

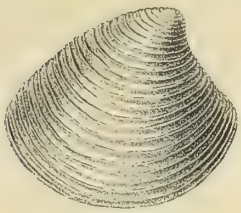
## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

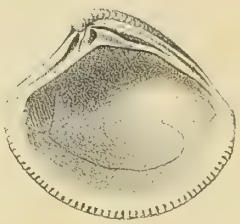
Fig. 1, 1ª *Venus lamellosa* Ponz.-Rayn.-v. d. Hec. (ingrandita di $^1/_3$).
La figura a contorno punteggiato rappresenta un esemplare di mediocre grandezza.

» 2. *Venus libellus* Ponz.-Rayn.-v. d. Hec.
Il disegno fu ricavato da una giovane valva coll'ingrandimento di poco più di 3 volte l'esemplare.

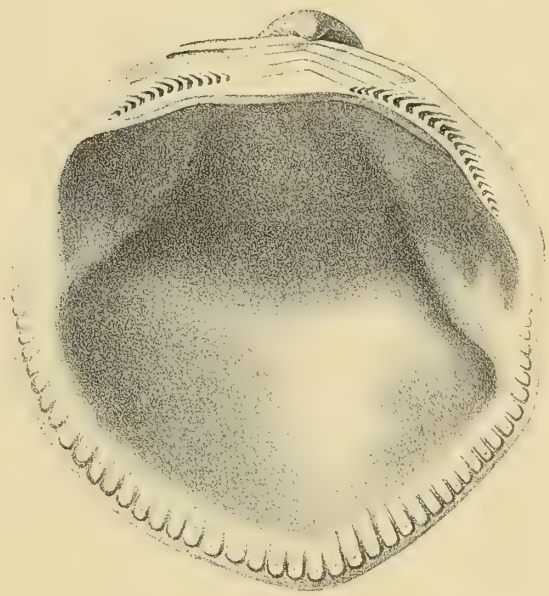
» 3, 3ª *Pectunculus insubricus* Brocc. (*Arca*) (grand. natur.).

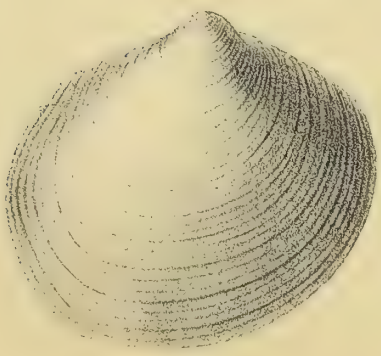
» 4, 4ª *Pectunculus obliquatus* Ponz.-Rayn.-v. d. Hec. (grand. natur.).

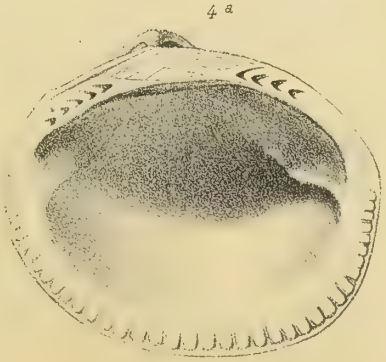


1ᵇ




LIT BRUNO E SALOMONE, ROMA

# INDICE DEL VOL. III.° — SERIE 4.ª

## Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali


Paternò e Nasini. *Sulla determinazione del peso molecolare delle sostanze organiche per mezzo del punto di congelamento delle loro soluzioni.* . Pag. 3

Righi. *Ricerche sperimentali e teoriche intorno alla riflessione della luce polarizzata sul polo d'una calamita* (Con una tavola) . . . . . » 14

Colasanti e Mengarini. *Il fenomeno spettrale fisiologico* (Con una tavola). . » 66

Lovisato. *Una pagina di preistoria sarda* (Con due tavole). . . . . » 80

Montesano. *Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa* . . . . . » 105

Taramelli e Mercalli. *I terremoti Andalusi, cominciati il 25 dicembre 1884* (Con quattro tavole). . . . . » 116

La Valle. *Sul Diopside di Val d'Ala* (Con quattro tavole). . . . . » 226

De Paolis. *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* . » 265

Schiaparelli. *Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte, fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz. (Opposizione 1881-1882)* (Con tre tavole) . . » 281

Pittarelli. *Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2)*. » 375

Id. *Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2)*. . » 401

Betocchi. *Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1885* (Con una tavola). » 417

Venturi. *Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dall'attrazione di Giove*. . . . . » 425

Mosso U. *Sull'azione fisiologica della Cocaina*. . . . . » 516

Righi. *Ricerche sperimentali intorno alla riflessione della luce polarizzata sulla superficie equatoriale d'una calamita*. . . . . » 562

Körner e Menozzi. *Intorno ad alcuni nuovi derivati dell'acido isosuccinico*. » 577

La Valle. *Studio cristallografico di alcuni nuovi derivati dell'acido iso-succinico* (Con una tavola). . . . . » 590

Visalli. *Sulle correlazioni in due spazî a tre dimensioni*. . . . . » 597

Ponzi e Meli. *Molluschi fossili del Monte Mario presso Roma* (Con una tavola). » 672

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I, II. (1884-86).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. II. III.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I. II.

---

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

### AI RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 6452